تمرين .1أحسب التكامل المضاعف $\iint_A f(x,y)dxdy$ نفرض أن f دالة مستمرة وهذا لمـا(يـطلب رســومات توضيحية) :

1- $f(x,y)=x^2y-3y^2,\ A=\{(x,y):0\le x\le 2,1\le y\le 2\}$
2- $f(x,y)=2xy+x,\ A=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$
3- $f(x,y)=x+y\ ,\ A=\{(x,y):y=x,y=x^3\}$
4- $f(x,y)=2xy-3y^2,\ A=\{(x,y):0\le x\le 1,x^2\le y\le x\}$
5- $f(x,y)=2xy-y^2,\ A=\left\{(x,y):1\le x\le 2,\frac{1}{x}\le y\le x^2\right\}$

تمرين 2 .1-أحسب باستخدام الأحداثيات القطبية: مساحة جزء من القرص المملوء مع الرسم فالتكامل $\iint_D (x^2+y^2)^{-2}dxdy$:

$D=\{(x,y):1\le x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$ و $D=\left\{(x,y):4\le x^2+y^2\le 16,\frac{\pi}{4}\le arctg\left(\frac{y}{x}\right)\le\frac{\pi}{3}\right\}$

2.أحسب باستخدام الأحداثيات القطبية : مساحة القرص المملوء $A=\{(x,y):x^2+y^2\le 121\}$.

3.أحسب باستخدام الأحداثيات القطبيـة: التكامل $\iint_D\sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$ بحيث $D=\{(x,y):0\le x^2+y^2\le 9\}$.

4. نطبق في هذا التمرين نظرية تبديل المتغير بمختلف مواضعها.
أولا : التبديل التآلفي هو: $x=au+bv+c,y=a'u+b'v+c$ بحيث $(x,y)\in D$ و $\Delta=\{(u,v)\in R^2:(x,y)\in D\}$
بين أولا أن : $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Delta f(au+bv+c,a'u+b'v+v)dudv$

تمريـن 3 .1.وضح أن : $\iint_D (x-1)^2dxdy=\frac{136}{3}$ على الميدان : $D=\{(x,y)\in R^2:|x+y|\le 1,|x-y|\le 2\}$

2. أحسب مساحة متوازيي الأضلاع : $D=\{(x,y)\in R^2:|x|+|y|\le 1\}$ و $D_c=\{(x,y)\in R^2:|x|+|y|\le c\}$

3.أحسب مساحة المثلث القائم مع الرسم : $T=\{(0,0),(a,0),(0,b)\}$ و احسب مساحة المثلث : $T=\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$

ثم فســـر نتيجة مع البرهان : $\int_0^1(\int_0^{1-x}xy^2dy)dx=\int_0^1(\int_0^{1-y}xy^2dx)dy=\frac{1}{60}$ ...

4. نقترح الآن المثلث $T=\{(0,1),(0,-1),(1,0)\}$ أرســـم ثم بين ان : $\iint_T(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{3}$. أحسب ببساطة

$\iint_T(x^2y+y^2x)dxdy$ و $\iint_T(1+yx)dxdy$.بيـن أن : $\int_0^\pi(\int_0^\pi y\cos(xy)dx)dy=\frac{1-\cos(\pi^2)}{\pi}$ وضح أيضا أن :

$\int_0^\pi(\int_0^\pi\sin(x+y)dx)dy=2$ ثم أحسب التكامل المضاعف $\int_0^\pi(\int_0^\pi\cos(x+y)dx)dy$.

تمرين 4. أحسب التكامل الثلاثي $\iiint_A f(x,y,z)dxdydz$ نفرض أن f دالة مستمرة وهذا لمـا (يطلب رسومات توضيحية) :

1- $f(x,y,z)=x+3yz,\ A=\{(x,y,z):0\le x\le 1,1\le y\le 2,1\le z\le 3\}$
2- $f(x,y,z)=yz+x^2,\ A=\{(x,y,z):x+y+2z\le 1,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\}$
3- $f(x,y,z)=1+y^2+x^2,\ A=\{(x,y,z):x^2+y^2\le 1,0\le z\le 2\}$. (coordonnées cylindriques)
4- $f(x,y,z)=z,\ A=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le\rho^2,z\ge 0\}$
5- $f(x,y,z)=xyz\ \ A=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le\rho^2\}$
6- $f(x,y,z)=\frac{1}{(1+x^2+y^2)^3},\ A=\{(x,y,z):x^2+y^2-z^2\le 0,0\le z\le 1\}$.(الإحداثيات الأسطوانية)

أحسب حجـــم الحيز المحصور : $x^2+y^2=4$ و المستويات $y+z=4$ و $z=0$.أحسب حجم نصف الكرة الوحدة.....

د . عبـد الـحميـــد رحومة