نتطرق من خلال هذا الفصل إلى العناصر التالية:

أولا- المتوسط الحسابي

ثانيا- المنوال

ثالثا- الوسيط

رابعا- مشتقات الوسيط

خامسا- مشتقات المتوسط الحسابي

تمهيد:

لقد لاحظ المحللون للسلاسل الإحصائية حول مواضيع مختلفة أن معظم بيانات السلسلة الإحصائية تتجه أو تنزع إلى التمركز أو التجمع حول قيم متميزة تقع في مركز البيانات والقليل منها تتطرف إما بالكبر وا ٍما بالصغر. نسمي هذه الظاهرة بظاهرة النزعة المركزية. أما القيم التي تتمركز حولها البيانات الأخرى فتسمى مقاييس النزعة المركزية أو المتوسطات، فهي إذن تعين لنا موقع الظاهرة ونستعملها في تقدير مستوى الظاهرة المدروسة.

هناك عدة مقاييس للتعبير عن هذه الظاهرة تختلف من ناحية الدقة والمدلول الإحصائي وطريقة الحساب، من أهمها:

- المتوسط الحسابي ومشتقاته(المتوسط الهندسي، المتوسط التوافقي، المتوسط التربيعي).
- الوسيط ومشتقاته(الربيعيات، العشيريات، والمئويات).
- المنوال .

أولا- المتوسط الحسابي $\bar{X}$:

يعتبر المتوسط الحسابي من أهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها استخداما في النواحي التطبيقية، ويعرف عموما على أنه مجموع القيم مقسوما على عددها.

1- الطريقة المباشرة:

1-1- المتوسط الحسابي البسيط (غير المرجح):

لتكن السلسلة الإحصائية X_1، X_2 ... ... ، X_i، ... ... ، X_n ، يحسب $\bar{X}$ كالتالي:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

حيث: X_i تمثل قيم المتغير الإحصائي، و n تمثل عدد القيم.

مثال(3-1):

ليكن لدينا علامات مجموعة من الطلبة في مقياس الإحصاء1:

12، 14، 16، 08، 07، 05، 11، 15، 06، 13.

المطلوب: حساب متوسط علامات الطلبة؟.

الحـــــل: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{n} = \frac{12+14+16+08+07+05+11+15+06+13}{10} = \frac{107}{10} = 10{,}7$

متوسط علامات الطلبة في مقياس الإحصاء1 هو 10,7.

1-2- المتوسط الحسابي المرجح:

إذا كانت لدينا بيانات مبوبة أي في شكل توزيع تكراري فإن:

$$\bar{X} = \frac{n_1X_1 + n_2X_2 + \cdots + n_kX_k}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_iX_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

حيث: X_i تمثل قيم المتغير الإحصائي المتقطع، و n_i تمثل التكرارات المطلقة الموافقة لها و n تمثل مجموع التكرارات.

ملاحظات:

- نسمي $\bar{X}$ في الصيغة (2) بالمتوسط الحسابي المرجح، لأننا نرجح كل قيمة X_i في الجدول بتكرارها المطلق n_i أو تكرارها النسبي f_i.
- نلاحظ من الصيغة (2) أن $f_i = \frac{n_i}{\sum n_i}$ وبالتعويض في الصيغة نفسها نجد:

$$\bar{X} = f_1X_1 + f_2X_2 + \cdots + f_kX_K = \sum_{i=1}^{k} f_iX_i \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

مثال(3-2): البيانات التالية تمثل عدد الغرف في المسكن الواحد لعينة من 50 مسكن ببلدية سطيف.

الجدول(3-1): توزيع عينة من 50 مسكن ببلدية سطيف حسب عدد الغرف في المسكن الواحد

عدد الغرف (قيم المتغير) X_i	عدد المساكن (التكرار) n_i	n_iX_i	التكرار النسبي f_i	f_iX_i
1	1	1	0,02	0,02
2	8	16	0,16	0,32
3	13	39	0,26	0,78
4	13	52	0,26	1,04
5	6	30	0,12	0,60
6	4	24	0,08	0,48
7	3	21	0,06	0,42
8	2	16	0,04	0,32
المجموع	$\sum n_i = 50$	199	1	3,98

المطلوب: حساب متوسط عدد الغرف في المسكن الواحد؟

الحـــــــل:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_iX_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{8} n_iX_i}{50} = \frac{199}{50} = 3,98$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{k} f_iX_i = \sum_{i=1}^{8} f_iX_i = 3,98$$

متوسط عدد الغرف في المسكن الواحد هو 3,98.

2- الطريقة غير المباشرة:

عندما تكون لدينا بيانات كبيرة القيم فإننا نستخدم طريقة غير مباشرة في حساب المتوسط الحسابي (طريقة

الانحراف عن متوسط فرضي)، الغرض منها هو تصغير قيم البيانات من أجل تسهيل عملية حساب المتوسط الحسابي.

2-1- المتوسط الحسابي البسيط:

إذا كانت لدينا بيانات غير مبوبة أي في شكل سلسلة إحصائية، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- نفرض قيمة ثابتة a تكون قريبة من القيم الأصلية وتتوسطها (نسميها متوسط فرضي)؛

ب- حساب الانحرافات d_i بين قيم السلسلة والمتوسط الفرضي: $d_i = X_i - a$؛

ج- حساب المتوسط الحسابي للقيم الجديدة: $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$؛

د- حساب المتوسط الحسابي الأصلي حيث لدينا: $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{\sum (X_i - a)}{n} = \frac{\sum X_i - \sum a}{n} = \frac{\sum X_i}{n} - \frac{na}{n}$

$$\bar{d} = \bar{X} - a \Rightarrow \boxed{\bar{X} = \bar{d} + a}$$

مثال(3-3):

لتكن لدينا القيم التالية: 12، 10، 15، 8، 5. أحسب الوسط الحسابي عن طريق انحرافات القيم عن وسط فرضي.

الحل: نفرض أن $a = 9$، وعليه نحسب الانحرافات وفق الصيغة التالية: $d_i = X_i - a$، فيتتج لدينا:

X_i	$d_i = X_i - a$
5	-4
8	-1
10	1
12	3
15	6
المجموع	**5**

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{5}{5} = 1$$
$$\bar{X} = \bar{d} + a = 1 + 9 = 10$$

كما أننا نحصل على نفس النتيجة بتطبيق العلاقة:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{n} = \frac{50}{5} = 10$$

2-2- المتوسط الحسابي المرجح:

إذا كانت لدينا بيانات مبوبة أي في شكل توزيع تكراري فإننا نتبع نفس الخطوات السابقة ولكن بوضع:

$$\boxed{\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{k} d_i n_i}{\sum n_i}}$$ كما أن: $$\boxed{\bar{X} = \bar{d} + a}$$

مثال(3-4): أحسب المتوسط الحسابي بطريقة الانحراف عن متوسط فرضي نفترض أنه $a = 800$؟

X_i	500	700	800	850	900	1000	المجموع
n_i	10	16	02	18	16	10	72

الحل:

X_i	n_i	$d_i = x_i - 800$	$d_i n_i$
500	10	−300	−3000
700	16	−100	−1600
800	02	0	0
850	18	50	900
900	16	100	1600
1000	10	200	2000
المجموع	72	/	−100

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i d_i}{\sum n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{6} n_i d_i}{72} = \frac{-100}{72} = -1{,}39$$

حساب المتوسط الحسابي الأصلي: $\bar{X} = \bar{d} + a = -1{,}39 + 800 = 798{,}61$

إذن المتوسط الحسابي لهذه البيانات: 798,61.

ملاحظة: إذا كان المتغير الإحصائي مستمر فإننا نعوض X_i بمراكز الفئات C_i في كل المعادلات السابقة أي:

$$\boxed{\bar{X} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k}{\sum n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i c_i}{\sum n_i}}$$

$$\boxed{\bar{X} = f_1 c_1 + f_2 c_2 + \dots + f_k c_K = \sum_{i=1}^{k} f_i c_i}$$

$\boxed{\bar{X} = \bar{d} + a}$ حيث $\boxed{\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{k} d_i n_i}{\sum n_i}}$ و $\boxed{d_i = c_i - a}$

مثال(3−5): البيانات التالية تمثل أوزان 60 طالبا بالكيلوغرام في أحد أقسام الـــ: LMD بكلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير بجامعة سطيف،و المطلوب حساب متوسط أوزان الطلبة؟

الجدول(3−2): أوزان 60 طالبا بالكيلوغرام في أحد أقسام الـ: LMD بكلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير بجامعة سطيف

أوزان الطلبة X_i	عدد الطلبة n_i
]55 − 50]	2
]60 − 55]	5
]65 − 60]	12
]70 − 65]	16
]75 − 70]	14
]80 − 75]	8
]85 − 80]	3
المجموع	60

الحل:

$X_i n_i$	C_i	عدد الطلبة n_i	أوزان الطلبة X_i
105	52,5	2	]55 – 50]
287,5	57,5	5	]60 – 55]
750	62,5	12	]65 – 60]
1080	67,5	16	]70 – 65]
1015	72,5	14	]75 – 70]
620	77,5	8	]80 – 75]
247,5	82,5	3	]85 – 80]
4105	/	60	المجموع

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{7} n_i c_i}{\sum n_i} = \frac{4105}{60} = 68{,}42$ ، ومنه فإن متوسط أوزان الطلبة هو 68,42 كلغ.

3- خصائص المتوسط الحسابي:

أ- يتأثر المتوسط الحسابي بالقيم المتطرفة.

مثلا: تتكون أسرة من 5 أفراد، تبلغ أعمارهم على الترتيب: 55، 49، 13، 11، 10.

المتوسط الحسابي هو: $\bar{X} = \frac{55+49+13+11+10}{5} = \frac{138}{5} = 27{,}6$

نلاحظ أن النتيجة المحصل عليها لا تمثل أي قيمة من القيم المدروسة، وبالتالي نستنتج أنه لا يمكن استعمال المتوسط الحسابي في مثل هذه الحالات، لأنه من المفروض أن تكون قيم المتغير الإحصائي متمركزة حول النتيجة المحصل عليها.

ب- يستعمل المتوسط الحسابي في حالة المتغيرات الكمية أي القابلة للقياس.

ج- لا يمكن حساب المتوسط الحسابي في حالة البيانات المفتوحة (أقل من، أكثر من).

د- مجموع انحرافات القيم عن متوسطها يساوي دائما الصفر. $\boxed{\sum(X_i - \bar{X}) = 0}$

$$\sum(X_i - \bar{X}) = \sum X_i - \sum \bar{X}$$
$$\sum(X_i - \bar{X}) = \sum X_i - n\bar{X} = n\bar{X} - n\bar{X} = 0$$

تدل هذه الخاصية على أن المتوسط الحسابي يقع في مركز البيانات.

هـ- مجموع مربع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي أقل من مجموع مربعات انحراف نفس القيم عن أي قيمة أخرى، أي: $\boxed{\sum(X_i - \bar{X})^2 < \sum(X_i - X_\alpha)^2}$ حيث: $\bar{X} \neq X_\alpha$

تدل هذه الخاصية على أن المتوسط الحسابي أقرب إلى البيانات X_i من أي قيمة أخرى.

مثلا: إذا كانت لدينا القيم التالية: 24، 8، 6، 16، 14، 4، أثبت صحة الخاصيتين د ، هـ؟

نفرض أن النقطة المختارة هي: $X_\alpha = 10$ ولدينا: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{6} X_i}{n} = \frac{72}{6} = 12$

القيم x_i	$(X_i - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(X_i - X_\alpha)$	$(X_i - X_\alpha)^2$
24	12	144	14	196
8	−4	16	−2	4
6	−6	36	−4	16
16	4	16	6	36
14	2	4	4	16
4	−8	64	−6	36
$\sum X_i = 72$	$\sum(X_i - \bar{X}) = 0$	$\sum(X_i - \bar{X})^2 = 280$	$\sum(X_i - X_\alpha) = 12$	$\sum(X_i - X_\alpha)^2 = 304$

بالنسبة للخاصية الأولى نلاحظ من خلال الجدول أن: $\sum(X_i - \bar{X}) = 0$ وهو المطلوب.

أما بالنسبة للخاصية الثانية فمن خلال مقارنة النتائج المتحصل عليها في الجدول أعلاه نجد: $304 > 280$

ينتج عن ذلك: $\sum(X_i - \bar{X})^2 < \sum(X_i - X_\alpha)^2$.

ثانيا – المنوال:

يعرف المنوال على أنه القيمة الأكثر تكرارا من بين مجمل القيم المعطاة، ويرمز لها بـ: M_o.

1- حساب المنوال في حالة سلسلة إحصائية:

قيمة المنوال للبيانات: 12، 16، 10، 12، 17، 9 هي: $M_o = 12$ لأنها الأكثر تكرارا من غيرها.

قيمة المنوال للبيانات: 10، 15، 18، 13، 10، 15، 16 هي: $M_o = 10$ و $M_o = 15$.

البيانات التالية: 14، 16، 9، 17، 13 ليس لها منوالا.

2- حساب المنوال في حالة توزيع تكراري لمتغير إحصائي منفصل:

يستنتج مباشرة من جدول التوزيع التكراري، مع الإشارة إلى أنه يمكننا أن نجد أكثر من منوال، كما يمكننا ألا نجد ولا منوال.

مثا(3-6): البيانات التالية تمثل عدد الغرف في المسكن الواحد لعينة من 35 مسكن ببلدية سطيف.

الجدول(3-3): عدد الغرف في المسكن الواحد لعينة من 35 مسكن ببلدية سطيف

عدد الغرف (قيم المتغير) X_i	عدد المساكن (التكرار) n_i
1	3
2	8
3	13
4	5
5	6
المجموع	35

المنوال في هذا التوزيع هو: $M_o = 3$

الشرح:

أغلبية السكنات تحتوي على 3 غرف.

3- حساب المنوال في حالة توزيع تكراري لمتغير إحصائي مستمر:

إذا كان لدينا جدول توزيع تكراري على شكل فئات فإننا نتبع الخطوات التالية لحساب المنوال:

- تحديد الفئة المنوالية: وهي الفئة التي تقابل أكبر تكرار عندما تكون أطوال الفئات متساوية، أو الفئة التي تقابل أكبر تكرار معدل عندما تكون أطوال الفئات غير متساوية.

- حساب المنوال بطريقة المد الداخلي:

$$\boxed{M_o = Lim_{M_o} + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right] \times A_{M_o}}$$

حيث:

Lim_{M_o}: الحد الأدنى للفئة المنوالية، Δ_1: الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة السابقة لها.

Δ_2: الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة اللاحقة لها، A_{M_o}: طول الفئة المنوالية.

مثال(3-7): أحسب قيمة المنوال لبيانات المثال(3-5)؟

أوزان الطلبة X_i	عدد الطلبة n_i
$]55-50]$	2
$]60-55]$	5
$]65-60]$	12
$]70-65]$	16
$]75-70]$	14
$]80-75]$	8
$]85-80]$	3
المجموع $\sum n_i$	60

بما أن أطوال الفئات متساوية فإن الفئة المنوالية هي: $]70-65]$

وبالتالي فإن: $\Delta_1 = 16-12 = 4$ ، $\Delta_1 = 16-14 = 2$

ومنه :

$$M_o = Lim_{M_o} + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right] \times A_{M_o}$$

$$M_o = 65 + \left[\frac{4}{4+2}\right] \times 5 = 68{,}33$$

أغلبية الطلبة وزنهم يقدر بـ: 68,33 كلغ.

4- تحديد المنوال بيانيا:

يحدد المنوال بيانيا بواسطة المدرج التكراري، وهذا بإتباع الخطوات التالية:

أ- نرسم المدرج التكراري للتوزيع.

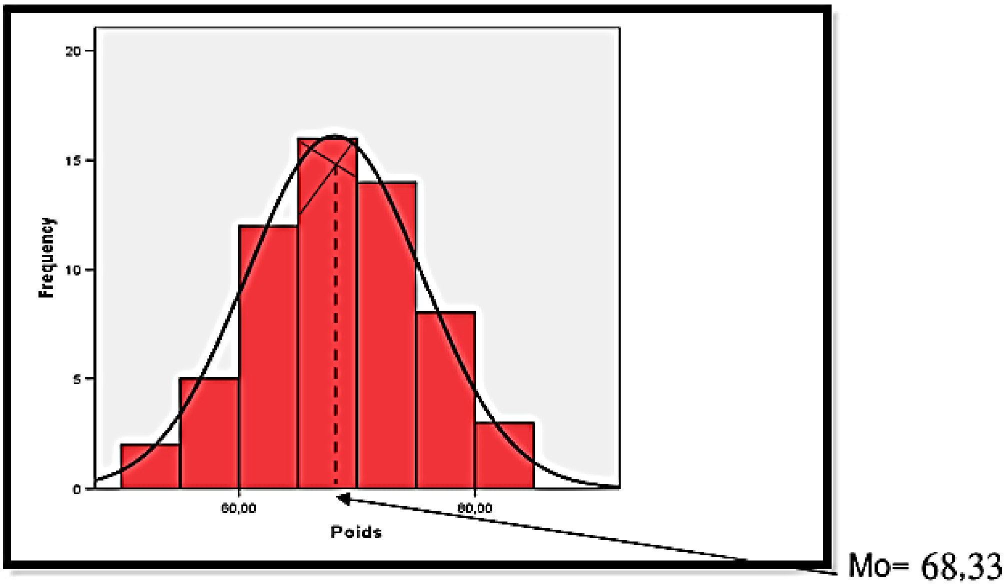
ب- نصل بخط مستقيم رأس الحد الأعلى للفئة المنوالية برأس الحد الأعلى للفئة السابقة لها.

ج- نصل بخط مستقيم رأس الحد الأدنى للفئة المنوالية برأس الحد الأدنى للفئة اللاحقة لها.

د- من تقاطع الخطين السابقين نسقط عمودا على المحور الأفقي ونقطة تقاطعه مع المحور الأفقي تمثل تقديرا لقيمة المنوال بيانيا.

مثال(3-8): حدد قيمة المنوال بيانيا للمثال السابق؟

الحل:



الشكل(3−1): أوزان 60 طالبا بالكيلوغرام في أحد أقسام الـ LMD: بكلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير بجامعة سطيف

ثالثا− الوسيط:

الوسيط هو أحد مقاييس النزعة المركزية الذي يأخذ بعين الاعتبار رتبة القيم، ويعرف الوسيط على أنه القيمة التي تقسم البيانات إلى جزئين متساويين بحيث تكون قيم المتغير الإحصائي مرتبة ترتيبا تصاعديا أو تنازليا، ونرمز له بالرمز M_e

1− حساب الوسيط في حالة سلسلة إحصائية أو توزيع تكراري لمتغير إحصائي متقطع:

لحساب الوسيط في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية:

أ− ترتيب البيانات ترتيبا تصاعديا.

ب− إذا كان عدد البيانات n عددا فرديا فإن الوسيط هو القيمة التي رتبتها $\frac{n+1}{2}$ أي: $\boxed{M_e = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}}$

ج− إذا كان عدد البيانات n عددا زوجيا فإن الوسيط هو متوسط القيمة التي رتبتها $\frac{n}{2}$ والقيمة التي رتبتها $\frac{n}{2}+1$ أي: $\boxed{M_e = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}}$

مثال(3−9): أحسب الوسيط للسلسلتين الإحصائيتين التاليتين:

− السلسلة الأولى: (1، 2، 5، 4، 3، 6، 7، 7، 5، 3،1، 9)

− السلسلة الثانية: (1، 0، 2,5، 3، 5، 5,5، 1، 6، 7,5)

الحل:

− السلسلة الأولى: (1، 1، 2، 3، 3، 4، 5، 5، 6، 7، 7، 9)

عدد البيانات زوجي أي: 12، ومنه: $M_e = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)+X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} = \frac{X_6+X_7}{2} = \frac{4+5}{2} = 4.5$

50% من البيانات أقل من 4,5، و50% من البيانات أكبر من 4,5.

– السلسلة الثانية: (0، 1، 1، 2,5، 3، 5، 5,5، 6، 7,5)

عدد البيانات فردي أي: 9، ومنه: $M_e = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = X_5 = 3$

50% من البيانات على الأكثر أقل من 3، و50% من البيانات على الأكثر أكبر من 3.

2– حساب الوسيط في حالة توزيع تكراري لمتغير إحصائي مستمر:

إذا كان لدينا جدول توزيع تكراري على شكل فئات فإننا نتبع الخطوات التالية لحساب الوسيط:

– تحديد الفئة الوسيطية: وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{n}{2}$، أي: $N^{\uparrow}_{M_e} \geq \frac{n}{2}$

– حساب الوسيط بطريقة المد الداخلي:

$$\boxed{M_e = Lim_{M_e} + \left[\frac{\frac{n}{2} - N^{\uparrow}_{M_e-1}}{n_{M_e}}\right] \times A_{M_e}}$$

حيث:

Lim_{M_e}: الحد الأدنى للفئة الوسيطية، $\frac{n}{2}$: رتبة الوسيط

$N^{\uparrow}_{M_e-1}$: التكرار المتجمع الصاعد المطلق للفئة قبل الفئة الوسيطية.

n_{M_e}: تكرار الفئة الوسيطية ، A_{M_e}: طول الفئة الوسيطية.

مثال(3–10): بالعودة إلى المثال(3–5)، أحسب الوسيط واشرح النتيجة؟

أوزان الطلبة X_i	عدد الطلبة n_i	$N_i^{\uparrow}$.
$]55-50]$	2	2
$]60-55]$	5	7
$]65-60]$	12	19
$]70-65]$	**16**	**35**
$]75-70]$	14	49
$]80-75]$	8	57
$]85-80]$	3	60
المجموع $\sum n_i$	60	/

– تحديد الفئة الوسيطية: وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{n}{2}$ ، أي:

$$N^{\uparrow}_{M_e} \geq \left(\frac{n}{2} = \frac{60}{2} = 30\right)$$

ومنه الفئة الوسيطية هي: $]70 - 65]$

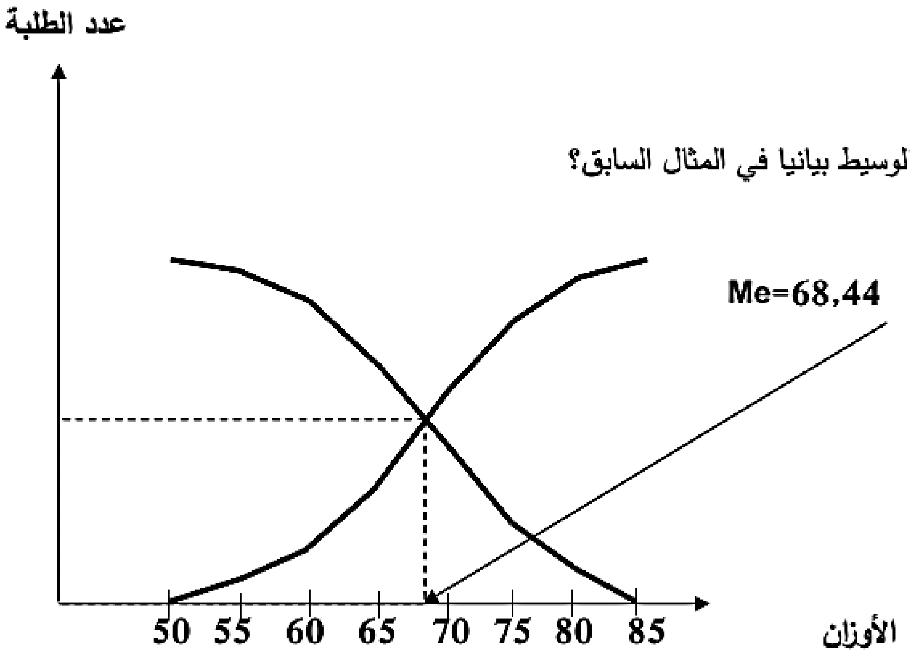
– حساب الوسيط بطريقة المد الداخلي:

$$M_e = Lim_{M_e} + \left[\frac{\frac{n}{2} - N^{\uparrow}_{M_e - 1}}{n_{M_e}}\right] \times A_{M_e} = 65 + \left[\frac{30-19}{16}\right] \times 5 = 68{,}44$$

الشرح: هناك 50% من الطلبة أوزانهم أقل من 68,44 كلغ و 50% من الطلبة أوزانهم أكبر من 68,44 كلغ.

ملاحظة: الوسيط بيانيا هو نقطة التقاطع بين المنحنى المتجمع الصاعد والنازل.

مثال(3−11): حدد قيمة الوسيط بيانيا في المثال السابق؟



الشكل(3−2): أوزان 60 طالبا بالكيلوغرام في أحد أقسام الـ: LMD بكلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير بجامعة سطيف

رابعا: مشتقات الوسيط:

1− الربيعيات: وهي الناتجة من تقسيم البيانات إلى أربع أقسام متساوية، وبالتالي كل قسم يمثل 25% من البيانات.

1−1− الربيع الأول: تقسم البيانات إلى 25% من القيم أقل من قيمة الربيع الأول و 75% من القيم أكبر من قيمة الربيع الأول، ونرمز له بالرمز Q_1.

أ− إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية أو توزيع تكراري لمتغير إحصائي متقطع:

$$\boxed{Q_1 = X_{\left(\frac{n+1}{4}\right)}}$$

إذا كانت $\frac{n+1}{4}$ طبيعية (دون فواصل) نأخذ القيمة مباشرة.

إذا كانت $\frac{n+1}{4}$ غير طبيعية (وجود فواصل) نأخذ متوسط القيمتين، مثلا:1، 3، 5، 7، 9، 11، 13، 15.

$\frac{n+1}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25$.

الربيع الأول هنا: متوسط القيمة التي رتبتها 2 والقيمة التي رتبتها3 أي $Q_1 = \frac{3+5}{2} = 4$

ب- في حالة توزيع تكراري لمتغير إحصائي مستمر:

- تحديد الفئة الربيعية الأولى: وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{n}{4}$، أي: $N^{\uparrow}_{Q_1} \geq \frac{n}{4}$

- حساب الربيع الأول بطريقة المد الداخلي: $\boxed{Q_1 = Lim_{Q_1} + \left[\frac{\frac{n}{4} - N^{\uparrow}_{Q_1-1}}{n_{Q_1}}\right] \times A_{Q_1}}$

1-2- الربيع الثالث: تقسم البيانات إلى 75% من القيم أقل من قيمة الربيع الثالث و 25% من القيم أكبر من قيمة الربيع الثالث، ونرمز له بالرمز $\boldsymbol{Q_3}$.

أ- إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية أو توزيع تكراري لمتغير إحصائي متقطع:

$$\boxed{Q_3 = X_{\frac{3(n+1)}{4}}}$$

إذا كانت $\frac{3(n+1)}{4}$ طبيعية (دون فواصل) نأخذ القيمة مباشرة.

إذا كانت $\frac{3(n+1)}{4}$ غير طبيعية (وجود فواصل) نأخذ متوسط القيمتين، مثلا:1، 3، 5، 7، 9، 11، 13، 15.

$\frac{3(n+1)}{4} = \frac{27}{4} = 6{,}75$.

الربيع الثالث هنا: متوسط القيمة التي رتبتها 6 والقيمة التي رتبتها 7 أي $Q_3 = \frac{11+13}{2} = 12$

ب- في حالة توزيع تكراري لمتغير إحصائي مستمر:

- تحديد الفئة الربيعية الثالثة: وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{3n}{4}$، أي: $N^{\uparrow}_{Q_3} \geq \frac{3n}{4}$

- حساب الربيع الثالث بطريقة المد الداخلي: $\boxed{Q_3 = Lim_{Q_3} + \left[\frac{\frac{3n}{4} - N^{\uparrow}_{Q_3-1}}{n_{Q_3}}\right] \times A_{Q_3}}$

2- العشيريات: وهي الناتجة من تقسيم البيانات إلى عشر أقسام متساوية، وبالتالي كل قسم يمثل 10% من البيانات.

2-1- العشير الأول: تقسم البيانات إلى 10% من القيم أقل من قيمة العشير الأول و90% من القيم أكبر من قيمة العشير الأول، ونرمز له بالرمز $\boldsymbol{D_1}$.

أ- إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية أو توزيع تكراري لمتغير إحصائي متقطع:

$$\boxed{D_1 = X_{\left(\frac{n+1}{10}\right)}}$$

إذا كانت $\frac{n+1}{10}$ طبيعية (دون فواصل) نأخذ القيمة مباشرة.

إذا كانت $\frac{n+1}{10}$ غير طبيعية (وجود فواصل) نأخذ متوسط القيمتين.

مثلا:1، 3، 5، 7، 9، 11، 13، 15، 17، 19، 21.

$\frac{n+1}{10} = \frac{11}{10} = 1{,}1$.

العشير الأول هنا: متوسط القيمة التي رتبتها 1 والقيمة التي رتبتها2 أي $\boldsymbol{D_1} = \frac{1+3}{2} = 2$

ب- في حالة توزيع تكراري لمتغير إحصائي مستمر:

- تحديد الفئة العشيرية الأولى: وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{n}{10}$، أي: $N_{D_1}^{\uparrow} \geq \frac{n}{10}$

- حساب العشير الأول بطريقة المد الداخلي: $\boxed{D_1 = Lim_{D_1} + \left[\frac{\frac{n}{10} - N_{D_1-1}^{\uparrow}}{n_{D_1}}\right] \times A_{D_1}}$

2-2- العشير الثامن: تقسم البيانات إلى 80% من القيم أقل من قيمة العشير الثامن و 20% من القيم أكبر من قيمة العشير الثامن، ونرمز له بالرمز $\boldsymbol{D_8}$.

أ- إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية أو توزيع تكراري لمتغير إحصائي متقطع:

$$\boxed{D_8 = X_{\frac{8(n+1)}{10}}}$$

إذا كانت $\frac{8(n+1)}{10}$ طبيعية (دون فواصل) نأخذ القيمة مباشرة.

إذا كانت $\frac{8(n+1)}{10}$ غير طبيعية (وجود فواصل) نأخذ متوسط القيمتين، مثلا:

مثلا:1، 3، 5، 7، 9، 11، 13، 15، 17، 19، 21.

$\frac{8(n+1)}{10} = \frac{96}{10} = 9{,}6$.

العشير الثامن هنا: متوسط القيمة التي رتبتها 9 والقيمة التي رتبتها 10 أي $\boldsymbol{D_8} = \frac{17+19}{2} = 18$

ب- في حالة توزيع تكراري لمتغير إحصائي مستمر:

- تحديد الفئة العشيرية الثامنة: وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{8n}{10}$، أي: $N_{D_8}^{\uparrow} \geq \frac{8n}{10}$

- حساب العشير الثامن بطريقة المد الداخلي: $\boxed{D_8 = Lim_{D_8} + \left[\frac{\frac{8n}{10} - N_{D_8-1}^{\uparrow}}{n_{D_8}}\right] \times A_{D_8}}$

وهكذا بالنسبة لباقي العشيريات، مع مراعاة الرتبة المناسبة.

3- المئويات: وهي الناتجة من تقسيم البيانات إلى مائة قسم متساوي، وبالتالي كل قسم يمثل 1% من البيانات.

3-1- المئوي الأول: تقسم البيانات إلى 1% من القيم أقل من قيمة المئوي الأول و 99% من القيم أكبر من قيمة المئوي الأول، ونرمز له بالرمز $\boldsymbol{C_1}$.

أ- إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية أو توزيع تكراري لمتغير إحصائي متقطع:

$$\boxed{C_1 = X_{\left(\frac{n+1}{100}\right)}}$$

إذا كانت $\frac{n+1}{100}$ طبيعية (دون فواصل) نأخذ القيمة مباشرة.

إذا كانت $\frac{n+1}{100}$ غير طبيعية (وجود فواصل) نأخذ متوسط القيمتين.

مثلا إذا وجدنا: $\frac{n+1}{100} = 6{,}3$، المئوي الأول هنا: متوسط القيمة التي رتبتها 6 والقيمة التي رتبتها 7.

ب- في حالة توزيع تكراري لمتغير إحصائي مستمر:

- تحديد الفئة المئوية الأولى: وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{n}{100}$، أي: $N_{C_1}^{\uparrow} \geq \frac{n}{100}$

- حساب المئوي الأول بطريقة المد الداخلي:

$$\boxed{C_1 = Lim_{C_1} + \left[\frac{\frac{n}{100} - N_{C_1-1}^{\uparrow}}{n_{C_1}}\right] \times A_{C_1}}$$

3-2- المئوي السابع والستون: تقسم البيانات إلى 67% من القيم أقل من قيمة المئوي السابع والستون و 33% من القيم أكبر من قيمة المئوي السابع والستون ، ونرمز له بالرمز $\boldsymbol{C_{67}}$.

أ- إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية أو توزيع تكراري لمتغير إحصائي متقطع:

$$\boxed{C_{67} = X_{\frac{67(n+1)}{100}}}$$

إذا كانت $\frac{67(n+1)}{100}$ طبيعية (دون فواصل) نأخذ القيمة مباشرة.

إذا كانت $\frac{67(n+1)}{100}$ غير طبيعية (وجود فواصل) نأخذ متوسط القيمتين.

مثلا إذا وجدنا: $\frac{67(n+1)}{100} = 31,6$.

المئوي السابع والستون هنا: متوسط القيمة التي رتبتها 31 والقيمة التي رتبتها 32.

ب- في حالة توزيع تكراري لمتغير إحصائي مستمر:

- تحديد الفئة المئوية السابعة والستون: وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{67n}{100}$، أي: $N_{C_{67}}^{\uparrow} \geq \frac{67n}{100}$

- حساب المئوي السابع والستون بطريقة المد الداخلي:

$$\boxed{C_{67} = Lim_{C_{67}} + \left[\frac{\frac{67n}{100} - N_{C_{67-1}}^{\uparrow}}{n_{C_{67}}}\right] \times A_{C_{67}}}$$

وهكذا بالنسبة لباقي المئويات، مع مراعاة الرتبة المناسبة.

ملخص قوانين مشتقات الوسيط:

الربيعيات إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية أو توزيع تكراري لمتغير إحصائي متقطع:

$$\boxed{Q_i = X_{\frac{i}{4}(n+1)}}$$

الربيعيات إذا كانت البيانات في شكل توزيع تكراري لمتغير إحصائي مستمر:

$$\boxed{Q_i = Lim_{Q_i} + \left[\frac{\left(\frac{i}{4}\right)n - N^{\uparrow}_{Q_i-1}}{n_{Q_i}}\right] \times A_{Q_i}}$$

العشيريات إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية أو توزيع تكراري لمتغير إحصائي متقطع:

$$\boxed{D_i = X_{\frac{i}{10}(n+1)}}$$

العشيريات إذا كانت البيانات في شكل توزيع تكراري لمتغير إحصائي مستمر:

$$\boxed{D_i = Lim_{D_i} + \left[\frac{\left(\frac{i}{10}\right)n - N^{\uparrow}_{D_i-1}}{n_{D_i}}\right] \times A_{D_i}}$$

المئويات إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية أو توزيع تكراري لمتغير إحصائي متقطع:

$$\boxed{C_i = X_{\frac{i}{100}(n+1)}}$$

المئويات إذا كانت البيانات في شكل توزيع تكراري لمتغير إحصائي مستمر:

$$\boxed{C_i = Lim_{C_i} + \left[\frac{\left(\frac{i}{100}\right)n - N^{\uparrow}_{C_i-1}}{n_{C_i}}\right] \times A_{C_i}}$$

خامسا- مشتقات المتوسط الحسابي:

بالإضافة إلى المتوسط الحسابي $\bar{X}$ الذي يحسب بطريقة معينة هناك متوسطات أخرى من نفس درجة الدقة للمتوسط الحسابي، إلا أنها تحسب بطرق متميزة لأن سلسلة البيانات ليس لها نفس الطبيعة في حالة المتوسط الحسابي.

$\bar{X}$ سمي متوسطا حسابيا لأن سلسلة البيانات $x_1, x_2, \dots \dots, x_n$ تحمل من الناحية الرياضية شكل المتتالية الحسابية، وأما إذا كانت السلسلة الإحصائية لا تتزايد بطريقة حسابية فلا يمكن أن نحسب عليها متوسط حسابي بل نستعمل متوسط آخر، فإذا كانت مثلا تتزايد بطريقة هندسية نطبق عليها المتوسط الهندسي.

1- المتوسط الهندسي $\bar{X}_G$:

1-1- في حالة سلسلة إحصائية:

لتكن السلسلة الإحصائية $x_1, x_2, \dots, x_n$ نحسب المتوسط الهندسي $\bar{X}_G$ على هذه السلسلة بالطريقة التالية:

$$\bar{X}_G = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . \dots \dots . x_n} \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\boxed{\bar{X}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}}$$

2-1- في حالة توزيع تكراري:

إذا كانت $x_1, x_2, \dots, x_k$ تمثل قيم المتغير الإحصائي، و $n_1, n_2, \dots, n_k$ تمثل تكراراتها على الترتيب، فإن المتوسط الهندسي يحسب وفق العلاقة التالية:

$$\bar{X}_G = \sqrt[\sum n_i]{(x_1 . x_1 . x_1 \dots x_1)(x_2 . x_2 . \dots x_2) \dots \dots \dots (x_k . x_k \dots x_k)}$$

$$\bar{X}_G = \sqrt[\sum n_i]{x_1^{n_1} . x_2^{n_2} \dots \dots \dots x_k^{n_k}} \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\boxed{\bar{X}_G = \sqrt[\sum n_i]{\prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i}}}$$

ملاحظة هامة:

نلاحظ من الصيغتين (1) و(2) أنه إذا كانت البيانات في السلسلة أو الجدول تحمل قيم كبيرة تصبح الحسابات ضخمة أو حتى مستحيلة وعليه لا نستعمل الصيغتين (1) و(2)، وإنما نلجأ إلى تبسيط البيانات بإدخال الحساب اللوغاريتمي.

1-3- الصيغة اللوغاريتمية للمتوسط الهندسي:

أ- في حالة سلسلة إحصائية:

لتكن الصيغة (1) السابقة:

$$\bar{X}_G = \sqrt[n]{x_1.x_2.\dots.x_n} \Rightarrow \bar{X}_G = (x_1.x_2.\dots.x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow log(\bar{X}_G) = \log(x_1.x_2.\dots.x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow log(\bar{X}_G) = \frac{1}{n}\log(x_1.x_2.\dots.x_n)$$

$$\Rightarrow log(\bar{X}_G) = \frac{1}{n}(\log(x_1) + \log(x_2) + \dots + log(x_n))$$

$$\Rightarrow log(\bar{X}_G) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$$

بعد إجراء الحسابات في الصيغة اللوغاريتمية نحسب $\bar{X}_G$ كما يلي: $log(\bar{X}_G) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$

من هذه الصيغة نستنتج: $\boxed{\bar{X}_G = 10^{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)\right)}}$

ب- في حالة توزيع تكراري:

لتكن الصيغة (2) السابقة:

$$\bar{X}_G = \sqrt[\sum n_i]{x_1^{n_1}.x_2^{n_2}\dots\dots\dots x_k^{n_k}} \Rightarrow \bar{X}_G = (x_1^{n_1}.x_2^{n_2}\dots\dots\dots x_k^{n_k})^{\frac{1}{\sum n_i}}$$

$$\Rightarrow log(\bar{X}_G) = \log(x_1^{n_1}.x_2^{n_2}\dots\dots\dots x_k^{n_k})^{\frac{1}{\sum n_i}}$$

$$\Rightarrow log(\bar{X}_G) = \frac{1}{\sum n_i}\log(x_1^{n_1}.x_2^{n_2}\dots\dots\dots x_k^{n_k})$$

$$\Rightarrow log(\bar{X}_G) = \frac{1}{\sum n_i}\left(\log(x_1^{n_1}) + \log(x_2^{n_2}) + \dots + log(x_k^{n_k})\right)$$

$$\Rightarrow log(\bar{X}_G) = \frac{1}{\sum n_i}(n_1\log(x_1) + n_2\log(x_2) + \dots + n_k log(x_k))$$

$$\Rightarrow log(\bar{X}_G) = \frac{1}{\sum n_i}\sum_{i=1}^{k} n_i\log(x_i)$$

بعد إجراء الحسابات في الصيغة اللوغاريتمية نحسب $\bar{X}_G$ كما يلي: $log(\bar{X}_G) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\log(x_i)$

من هذه الصيغة نستنتج: $\boxed{\bar{X}_G = 10^{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i\log(x_i)\right)}}$

ملاحظة: نستعمل المتوسط الهندسي في المجال الاقتصادي لحساب المعدلات (معدل الفائدة، معدل نمو السكان...إلخ)، متوسط نسبة النمو الاقتصادي لعدة سنوات، الأرقام القياسية.

2- المتوسط التوافقي $\bar{X}_H$:

المتوسط التوافقي هو متوسط نادر الاستعمال نوظفه في بعض الحالات لحساب القدرة الشرائية المتوسطة لسلعة ما بدلالة سلعة أخرى، وعادة ما تكون هذه الوحدة هي الوحدة النقدية لبلد معين، وكذلك لحساب السرعة المتوسطة لمركبة على مسالك مختلفة.

2-1- في حالة سلسلة إحصائية:

لتكن السلسلة الإحصائية $x_1, x_2, \dots, x_n$ نحسب المتوسط التوافقي $\bar{X}_{\mathrm{H}}$ على هذه السلسلة بالطريقة التالية:

- نحسب مقلوبات القيم X_i: $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$
- نحسب متوسط المقلوبات (مجموع المقلوبات تقسيم n): $\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}{n}$
- نقلب هذا المتوسط فنحصل على $\bar{X}_H$ أي: $\boxed{\bar{X}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}}$

2-2- في حالة توزيع تكراري:

في حالة التوزيع التكراري فإن المتوسط التوافقي يحسب بالعلاقة التالية: $\boxed{\bar{X}_H = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{x_i}}}$

3- المتوسط التربيعي $\bar{X}_Q$:

3-1- في حالة سلسلة إحصائية:

لتكن السلسلة الإحصائية $x_1, x_2, \dots, x_n$ نحسب المتوسط التربيعي $\bar{X}_Q$ على هذه السلسلة بالطريقة التالية:

$$\bar{X}_Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

$$\boxed{\bar{X}_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}}$$

3-2- في حالة توزيع تكراري:

في حالة التوزيع التكراري فإن المتوسط التربيعي يحسب بالعلاقة التالية: $\boxed{\bar{X}_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}}}$

نتيجة: مهما تكن البيانات فإنه في كل الأحوال: $\boxed{\bar{X}_H < \bar{X}_G < \bar{X} < \bar{X}_Q}$

ملاحظة: إذا كان المتغير الإحصائي مستمر فإننا نعوض $\boldsymbol{X_i}$ بمراكز الفئات $\boldsymbol{C_i}$ في كل المعادلات السابقة.

مثال(3−12): لتكن البيانات التالية: 3، 2، 4، 6

المطلوب: 1− أحسب: المتوسط الحسابي، المتوسط الهندسي، المتوسط التوافقي، المتوسط التربيعي؟

− **الحل:**

1− حساب المتوسطات:

أ− المتوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{4} X_i}{4} = \frac{2+3+4+6}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

ب− المتوسط الهندسي:

$$\bar{X}_{\mathrm{G}} = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . \dots \dots x_k \dots \dots . x_n} = \sqrt[4]{2 \times 3 \times 4 \times 6} = 3{,}46$$

ج− المتوسط التوافقي:

$$\bar{X}_{\mathrm{H}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{4}{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}} = \frac{4}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = \frac{4}{1{,}247} = 3{,}21$$

د− المتوسط التربيعي:

$$\bar{X}_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4} x_i^2}{4}} = \sqrt{\frac{(2)^2+(3)^2+(4)^2+(6)^2}{4}} = 4{,}03$$