نتطرق من خلال هذا الفصل إلى العناصر التالية:

أولا- التوزيع التكراري للمتغير الإحصائي المنفصل (المتقطع).

ثانيا- التوزيع التكراري للمتغير الإحصائي المتصل (المستمر).

ثالثا- التوزيع التكراري للمتغير الإحصائي الكيفي.

رابعا- دراسة قضية التمركز.

أولا- التوزيع التكراري للمتغير الإحصائي المنفصل (المتقطع).

1- التوزيع التكراري المطلق والنسبي وتمثيلهما البياني:

أ- التوزيع التكراري المطلق:

هو عبارة عن جدول يحتوي في صورته البسيطة على العناصر التالية:

أ-1- قيم المتغير الإحصائي:

وتتمثل في مختلف القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير الإحصائي المدروس مرتبة ترتيبا تصاعديا وتظهر في العمود الأول ونرمز لها بالرمز X_i (i يشير إلى السطر في الجدول بحيث $i = 1,2,3 \dots, k$).

أ-2- التكرار المطلق:

وهو يمثل عدد المرات التي تتكرر فيها نفس القيمة ونرمز له بالرمز n_i.

مثال(2-1): البيانات التالية تمثل نتائج لدراسة إحصائية حول عدد الغرف في المسكن الواحد لعينة من 50 مسكن ببلدية سطيف.

5	2	4	3	3	6	3	2	4	4
2	2	4	3	7	5	4	8	7	4
3	4	7	3	5	2	8	4	3	6
4	5	2	4	6	3	6	3	4	3
2	4	3	5	1	4	5	3	3	2

المطلوب: أنشئ جدول التوزيع التكراري واشرح كل من n_2 و n_4؟.

الحل: نقوم بترتيب البيانات تصاعديا ثم نعرضها في جدول توزيع تكراري كما يلي:

1، 22222222، 3333333333333، 4444444444444، 555555، 6666، 777، 88.

الجدول(2-1): توزيع 50 مسكن حسب عدد الغرف ببلدية سطيف

عدد الغرف (قيم المتغير) X_i	عدد المساكن (التكرار) n_i
1	1
2	8
3	13
4	13
5	6
6	4
7	3
8	2
المجموع	$\sum n_i = 50$

الشرح:

$n_2 = 8$: هناك 8 مساكن من بين 50 مسكنا عدد الغرف فيها يساوي 2.

$n_4 = 13$: هناك 13 مساكن من بين 50 مسكنا عدد الغرف فيها يساوي 4.

ملاحظة:

مجموع التكرارت n_i دائما يساوي حجم العينة n أي: $\boxed{\sum n_i = n}$

ب- التوزيع التكراري النسبي:

هو حاصل قسمة التكرار المطلق لكل قيمة من قيم المتغير الإحصائي المتقطع على مجموع التكرارات

$$\boxed{f_i = \frac{f_i}{\sum n_i}}$$

أما التكرار النسبي المئوي فهو عبارة عن التكرار النسبي مضروبا في مائة: $\boxed{f_{i\%} = \frac{f_i}{\sum n_i} \times 100}$

مثال(2-2): بالعودة إلى المثال(2-1)، أحسب التكرارات النسبية؟

الحل: **الجدول(2-2): التوزيع النسبي للسكنات حسب عدد الغرف ببلدية سطيف**

عدد الغرف X_i	عدد المساكن n_i	f_i	$f_{i\%}$
1	1	0,02	02
2	8	0,16	16
3	13	0,26	26
4	13	0,26	26
5	6	0,12	12
6	4	0,08	08
7	3	0,06	06
8	2	0,04	04
المجموع	$\sum n_i = 50$	**1**	**100**

الشرح:

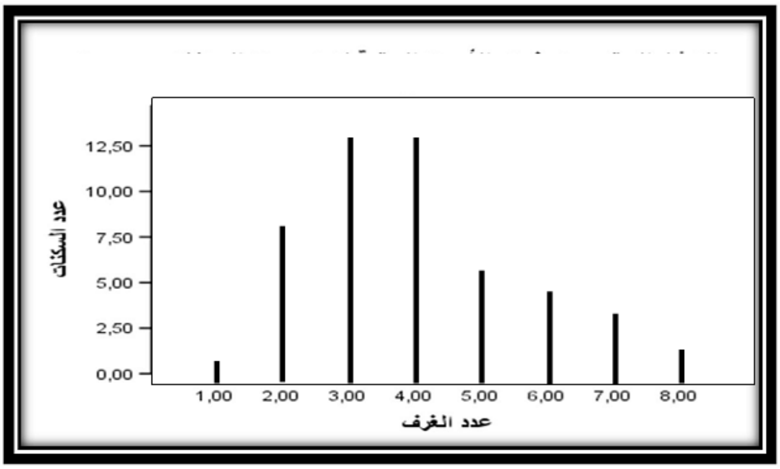
$f_2 = 0.16$: هناك 16 % من المساكن عدد الغرف فيها يساوي 2.

$f_{4\%} = 26\%$: هناك 26% من المساكن عدد الغرف فيها يساوي 4.

ج- التمثيل البياني للتوزيع التكراري المطلق و النسبي:

يمثل التكرار المطلق أو النسبي للمتغير الإحصائي المتقطع عن طريق **الأعمدة**، حيث يتناسب طول العمود مع التكرار المطلق أو النسبي الموافق له.

مثال(2-3): مثل بيانيا معطيات المثال(2-1)؟



الشكل(2-1): توزيع 50 مسكن حسب عدد الغرف ببلدية سطيف

2- التوزيع التكراري التجميعي الصاعد والنازل وتمثيلهما البياني:

أ- التوزيع التكراري التجميعي الصاعد:

أ-1- التوزيع التكراري التجميعي الصاعد المطلق $N_i^{\uparrow}$:

يحسب كالتالي:

$$N_1^{\uparrow} = n_1$$

$$N_2^{\uparrow} = n_1 + n_2 \Rightarrow N_2^{\uparrow} = N_1^{\uparrow} + n_2$$

$$N_3^{\uparrow} = n_1 + n_2 + n_3 \Rightarrow N_3^{\uparrow} = N_2^{\uparrow} + n_3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\boxed{N_i^{\uparrow} = n_1 + n_2 + \cdots + n_i = N_{i-1}^{\uparrow} + n_i}$$

أ-2- التوزيع التكراري التجميعي الصاعد النسبي $F_i^{\uparrow}$:

يحسب كالتالي: $\boxed{F_i^{\uparrow} = f_1 + f_2 + \cdots + f_i = F_{i-1}^{\uparrow} + f_i}$

أو: $\boxed{F_i^{\uparrow} = \frac{N_i^{\uparrow}}{\sum n_i}}$

أ-3- التوزيع التكراري التجميعي الصاعد النسبي المئوي $F_i^{\uparrow}\%$: $\boxed{F_i^{\uparrow}\% = F_i^{\uparrow} \times 100}$

ملاحظة: التكرار المتجمع الصاعد المطلق الأول يساوي دائما التكرار المطلق الأول($N_i^{\uparrow} = n_1$)، والتكرار المتجمع الصاعد المطلق الأخير يساوي دائما مجموع التكرارات ($N_k^{\uparrow} = \sum n_i$).

ب- التوزيع التكراري التجميعي النازل:

ب-1- التوزيع التكراري التجميعي النازل المطلق $N_i^{\downarrow}$

يحسب كالتالي:

$$N_1^{\downarrow} = n$$

$$N_2^{\downarrow} = n - n_1 \Rightarrow N_2^{\downarrow} = N_1^{\downarrow} - n_1$$

$$N_3^{\downarrow} = n - n_1 - n_2 \Rightarrow N_3^{\downarrow} = N_2^{\downarrow} - n_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\boxed{N_i^{\downarrow} = n - n_1 - \cdots - n_{i-1} = N_{i-1}^{\downarrow} - n_{i-1}}$$

ب-2- التوزيع التكراري التجميعي النازل النسبي $F_i^{\downarrow}$:

يحسب كالتالي: $\boxed{F_i^{\downarrow} = 1 - f_1 - \cdots - f_{i-1} = F_{i-1}^{\downarrow} - f_{i-1}}$

أو: $\boxed{F_i^{\downarrow} = \frac{N_i^{\downarrow}}{\sum n_i}}$

ب-3- التوزيع التكراري التجميعي النازل النسبي المئوي $F_i^{\downarrow}\%$: $\boxed{F_i^{\downarrow}\% = F_i^{\downarrow} \times 100}$

ملاحظة: التكرار المتجمع النازل المطلق الأول يساوي دائما مجموعالتكرار ات ($N_1^{\downarrow} = \sum n_i$)، والتكرار المتجمع النازل الأخير يساوي دائما التكرار المطلق الأخير ($N_k^{\downarrow} = n_k$).

مثال(2-4): بالعودة إلى بيانات المثال(2-1)، أحسب كلا من:

$N_i^{\uparrow}$، $N_i^{\downarrow}$، $F_i^{\uparrow}$، $F_i^{\downarrow}$ ، $F_i^{\uparrow}\%$، $F_i^{\downarrow}\%$ ، ثم إشرح كلا من: $N_2^{\uparrow}$، $N_5^{\downarrow}$، $F_2^{\uparrow}\%$، $F_5^{\downarrow}\%$

الجدول(2-3): التكرارات المطلقة والنسبية التجميعية الصاعدة والنازلة لتوزيع السكنات ببلدية سطيف حسب عدد الغرف

عدد الغرف X_i	عدد المساكن n_i	$N_i^{\uparrow}$	$N_i^{\downarrow}$	$F_i^{\uparrow}$	$F_i^{\downarrow}$	$F_i^{\uparrow}\%$	$F_i^{\downarrow}\%$
1	1	1	50	0,02	1	2	100
2	8	9	49	0,18	0,98	18	98
3	13	22	41	0,44	0,82	44	82
4	13	35	28	0,70	0,56	70	56
5	6	41	15	0,82	0,30	82	30
6	4	45	9	0,90	0,18	90	18
7	3	48	5	0,96	0,10	96	10
8	2	50	2	1	0,04	100	4
المجموع	$\sum n_i = 50$	/	/	/	/	/	/

الشرح:

$N_2^{\uparrow} = 9$: هناك 9 مساكن من بين 50 مسكنا عدد الغرف فيها أقل أو يساوي 2.

$N_5^{\downarrow} = 15$: هناك 15 مسكنا من بين 50 مسكنا عدد الغرف فيها أكبر أو يساوي 5.

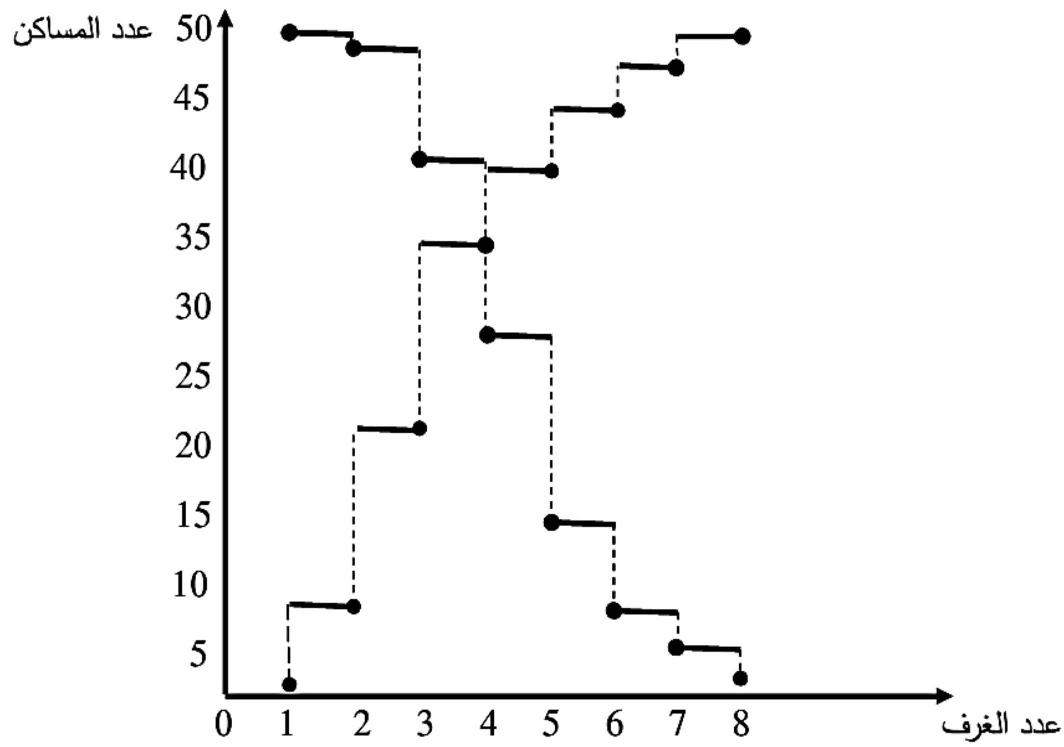
$F_2^{\uparrow}\% = 18\%$: هناك 18% من المساكن عدد الغرف فيها أقل أو يساوي 2.

$F_5^{\downarrow}\% = 30\%$: هناك 30% من المساكن عدد الغرف فيها أكبر أو يساوي 5.

ج- التمثيل البياني للتوزيع التكراري التجميعي الصاعد والنازل:

يمثل التكرار التجميعي الصاعد والنازل المطلق أو النسبي للمتغير الإحصائي المتقطع عن طريق **المنحنى المتجمع الصاعد والنازل**، حيث نلاحظ أنه يأخذ الشكل السلمي إما صاعدا أو نازلا، فنسميه **منحنى سلمي**. كما أنه يظهر على شكل أجزاء متقطعة دلالة على أن المتغير من النوع المنفصل أو المتقطع.

مثال(2-5): التمثيل البياني عن طريق المنحنى المتجمع الصاعد والنازل للمثال(2-1)



الشكل(2-2):التكرارات المطلقة الصاعدة والنازلة لتوزيع 50 مسكن حسب عدد الغرف ببلدية سطيف

ثانيا- التوزيع التكراري للمتغير الإحصائي المتصل (المستمر).

1- جدول التوزيع التكراري لمتغير إحصائي مستمر:

إذا كان المتغير الإحصائي من النوع المتصل رأينا أنه يقبل عددا غير متناهي من القيم الممكنة، المحصورة بين أصغر X_{min} قيمة وأكبر قيمة X_{max} وعليه يستحيل أن نمثله بجدول على شكل قيم فردية كما هو الحال في المتغير المنفصل، فنلجأ في هذه الحالة إلى تجميع أو تكثيف البيانات في مجموعات جزئية نسميها " **فئات** ". فماهو عدد الفئات التي يمكن تحديدها وكيف؟

ليس هناك قاعدة نظرية لذلك وإنما يشترط أن لا يكون عدد الفئات كثير جدا (يفوق 15 فئة) فيصبح الجدول ضخما يصعب تحليله وقراءته، أو يكون عدد الفئات قليل جدا (أقل من 5 فئات) فيصبح الجدول مبسط جدا أين يفقد حينها دقة وتفاصيل البيانات.

رغم ذلك فقد اجتهد بعض العلماء في تحديد قاعدة نظرية لإيجاد عدد الفئات، ومنهم العالم ستورجس (Sturges) الذي وضع قاعدة تجريبية لحساب طول الفئات، حيث تعتمد هذه القاعدة على مجال الدراسة وحجم المجتمع أو العينة.

أ- تحديد عدد الفئات K:

$$\boxed{K = 1 + 1{,}322\ ln(n)} \quad \text{أو} \quad \boxed{K = 1 + 3{,}322\ log(n)}$$

حيث: K تمثل عدد الفئات و n تمثل حجم العينة أو المجتمع

ب- تحديد أطوال الفئات C:

$$\boxed{C = \frac{E}{K}}$$

C : تمثل طول الفئة.

E: المدى العام هو الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة، أي: $\boxed{E = X_{max} - X_{min}}$

و على العموم فإن كل فئة تتميز بما يلي:

- كل فئة تتميز بحدين، حد أدنى وحد أقصى، هذه الحدود وبالخصوص الحد الأقصى يمكن أن يكون حدا فعليا أو غير فعلي، كأن نقول الفئة من أ إلى **ب** أي:[أ – ب] ⇐ ب يعتبر حدا فعليا أي ينتمي للفئة، أو من أ إلى أقل من **ب** أي:[أ – ب[⇐ ب يعتبر حدا غير فعلي أي لا ينتمي للفئة.

- يمكن أن نلاحظ في بعض الجداول أن الفئة الأولى في الجدول غير محددة الحد الأدنى، كأن نقول مثلا 100 فما أقل أي (≥ 100)، كما أن الفئة الأخيرة قد تكون غير محددة الحد الأقصى كأن نقول مثلا 10000 فما أكثر (≤ 10000)، وهذا النوع من الفئات يطرح إشكالا في حساب مراكز الفئات.

- كل فئة تتميز بمجال أو طول وهو: $\boxed{\Delta x_i = Lim_{sup} - Lim_{inf}}$

- كل فئة تتميز بمركز يحسب كالتالي: $\boxed{C_i = \frac{Li_{sup}+Lim_{inf}}{2}}$

- إذا كانت أطوال الفئات متساوية فإن الفروق بين المراكز تساوي أطوال الفئات.

ملاحظة هامة: مهما تكن الطريقة المستعملة في تحديد عدد الفئات وأطوالها فإن المهم في كل ذلك هو أن لا يكون هناك تداخل بين الفئات، بحيث كل قيمة في السلسلة لا يمكن وضعها إلا في فئة واحدة.

كما أن جدول التوزيع التكراري لمتغير إحصائي مستمر قد يحتوي على التكرارات التالية:

- التكرار النسبي f_i والتكرار النسبي المئوي$f_i\%$.
- التكرار التجميعي الصاعد المطلق $N_i^{\uparrow}$ و النازل المطلق $N_i^{\downarrow}$
- التكرار التجميعي الصاعد النسبي $F_i^{\uparrow}$ و الصاعد النسبي المئوي $F_i^{\uparrow}\%$.
- التكرار التجميعي النازل النسبي $F_i^{\downarrow}$،والنازل النسبي المئوي $F_i^{\downarrow}\%$.

ملاحظة: يتم حساب التكرارات السابقة بنفس الطريقة المذكورة في المتغير الكمي المتقطع.

مثال(2-6):

البيانات التالية تمثل أوزان 60 طالبا بالكيلوغرام في أحد أقسام الـــ: LMD بكلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير بجامعة سطيف:

67	64	68	73	73	54	61	74	60	78
80	74	65	63	60	69	72	66	77	65
74	50	76	69	68	66	78	63	70	55
67	67	64	76	61	72	72	57	65	77
59	71	79	78	58	63	74	66	73	67
61	71	69	68	73	81	64	61	84	55

المطلوب: أنشئ جدول التوزيع التكراري واحسب كلا من: $N_i^{\uparrow}$، $N_i^{\downarrow}$، f_i ، $f_i\%$، $F_i^{\uparrow}\%$، $F_i^{\downarrow}\%$ ، ثم إشرح كلا من: n_2 ، $f_2\%$ ، $N_2^{\uparrow}$ ، $N_5^{\downarrow}$، $F_2^{\uparrow}\%$، $F_5^{\downarrow}\%$

الحل: أول خطوة نقوم بها هي ترتيب البيانات السابقة ترتيبا تصاعديا :

61	60	60	59	58	57	55	55	54	50
65	64	64	64	63	63	63	61	61	61
68	67	67	67	67	66	66	66	65	65
72	72	71	71	70	69	69	69	68	68
76	74	74	74	74	73	73	73	73	72
84	81	80	79	78	78	78	77	77	76

لدينا: $C = \frac{E}{K}$

- **حساب المدى:** $E = X_{max} - X_{min} = 84 - 50 = 34$
- **حساب عدد الفئات:** $K = 1 + 3{,}322\, log(n) = 6{,}9 \approx 7$ ، أي 7 فئات.
- **حساب طول الفئة:** $K = \frac{E}{K} = \frac{34}{7} = 4{,}92 \ \approx 5$

أي طول كل فئة يساوي 5 كلغ، ومنه تكون الفئات هي:]55 – 50]،]60 – 55]، ....،]85 – 80].

نقوم بتفريغ البيانات في الفئات المذكورة فنحصل على الجدول الموالي:

الجدول(2–4): توزيع 60 طالبا حسب الوزن بالكيلوغرام في أحد أقسام الـ: LMD بكلية العلوم الاقتصادية – سطيف

$F_i^{\downarrow}\%$	$F_i^{\uparrow}\%$	$N_i^{\downarrow}$	$N_i^{\uparrow}$	$f_i\%$	f_i	C_i	عدد الطلبة n_i	أوزان الطلبة X_i
100	3,3	60	2	3,3	0,033	52,5	2	]55 – 50]
96,7	11,6	58	7	8,3	0,083	57,5	5	]60 – 55]
88,4	31,6	53	19	20	0,2	62,5	12	]65 – 60]
68,4	58,4	41	35	26,8	0,268	67,5	16	]70 – 65]
41,6	81,7	25	49	23,3	0,233	72,5	14	]75 – 70]
18,3	95	11	57	13,3	0,133	77,5	8	]80 – 75]
5	100	3	60	5	0,05	82,5	3	]85 – 80]
/	/	/	/	**100**	**1**	/	$\sum n_i = 60$	**المجموع**

الشرح:

$n_2 = 5$: هناك 5 طلبة من بين 60 طالبا أوزانهم تتراوح بين 55 و 60 كلغ.

$f_2\% = 8,3\%$: هناك 8,3% من الطلبة أوزانهم تتراوح مابين 55 و 60 كلغ.

$N_2^{\uparrow} = 7$: هناك 7 طلبة من بين 60 طالبا أوزانهم أقل من 60 كلغ.

$N_5^{\downarrow} = 25$: هناك 25 طالبا من بين 60 طالبا أوزانهم أكبر أو يساوي 70 كلغ.

$F_2^{\uparrow}\% = 11,6\%$: هناك 11,6% من الطلبة أوزانهم أقل من 60 كلغ.

$F_5^{\downarrow}\% = 41,6\%$: هناك 41,6% من الطلبة أوزانهم أكبر أو تساوي 70 كلغ.

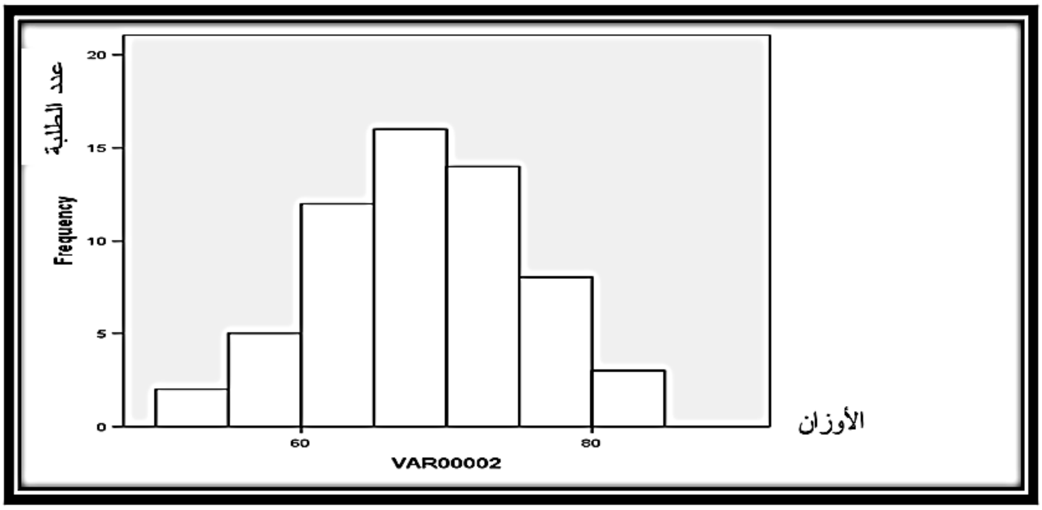
2- التمثيل البياني للمتغير الإحصائي المستمر:

أ- يمثل التكرار المطلق والنسبي للمتغير الإحصائي المستمر عن طريق **المدرج التكراري** حيث تتناسب مساحة المستطيل مع التكرار المطلق أو النسبي الموافق له، إذا ربطنا مراكز الفئات بواسطة خطوط مستقيمة مع بعضها البعض نحصل على **المضلع التكراري** وإذا رسمنا منحنى بجوار المضلع التكراري نحصل على **المنحنى التكراري**.

مثال(2-7):

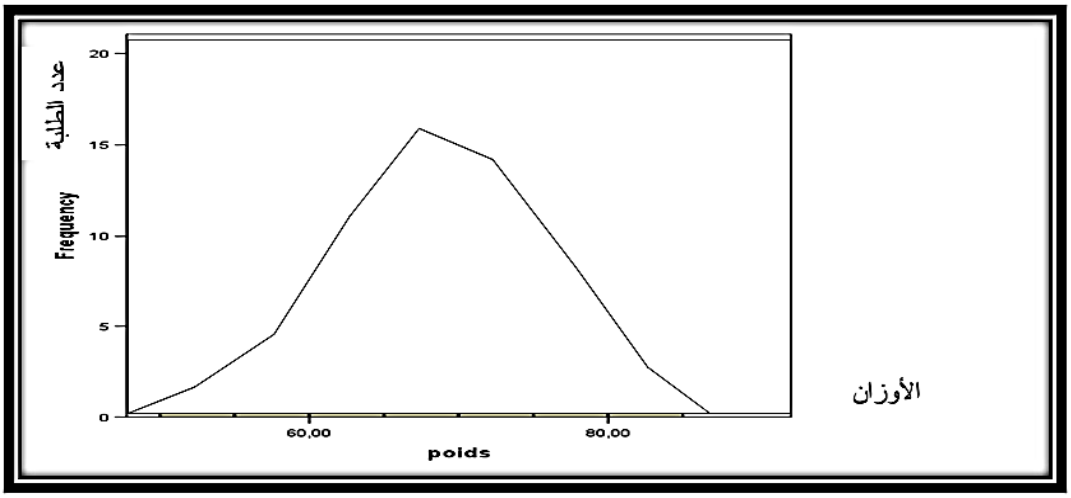
التمثيل البياني للمثال رقم (2-6):

- **بواسطة المدرج التكراري:**



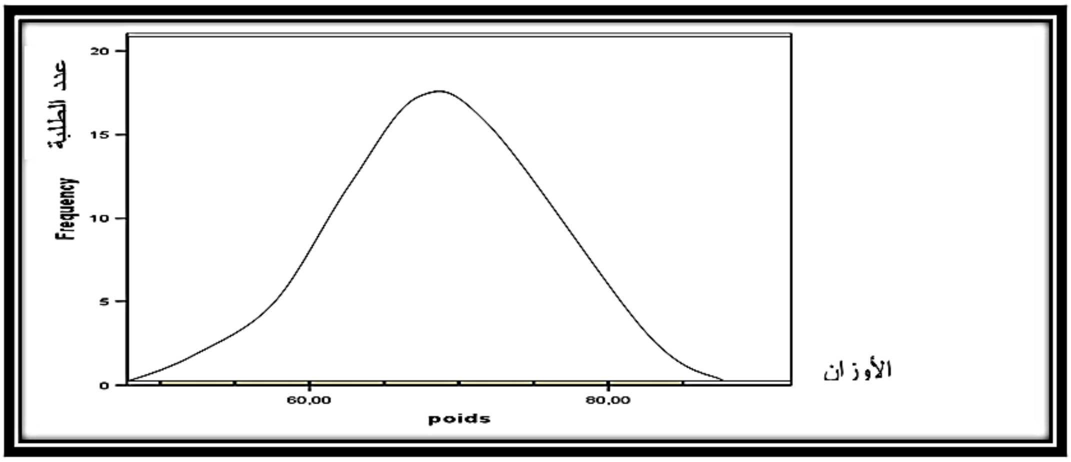
الشكل(2-3): تمثيل بياني بواسطة المدرج التكراري لتوزيع الطلبة الجامعة حسب أوزانهم

- بواسطة المظلع التكراري:



الشكل(2-4): تمثيل بياني بواسطة المظلع التكراري لتوزيع الطلبة الجامعة حسب أوزانهم

- بواسطة المنحنى التكراري:



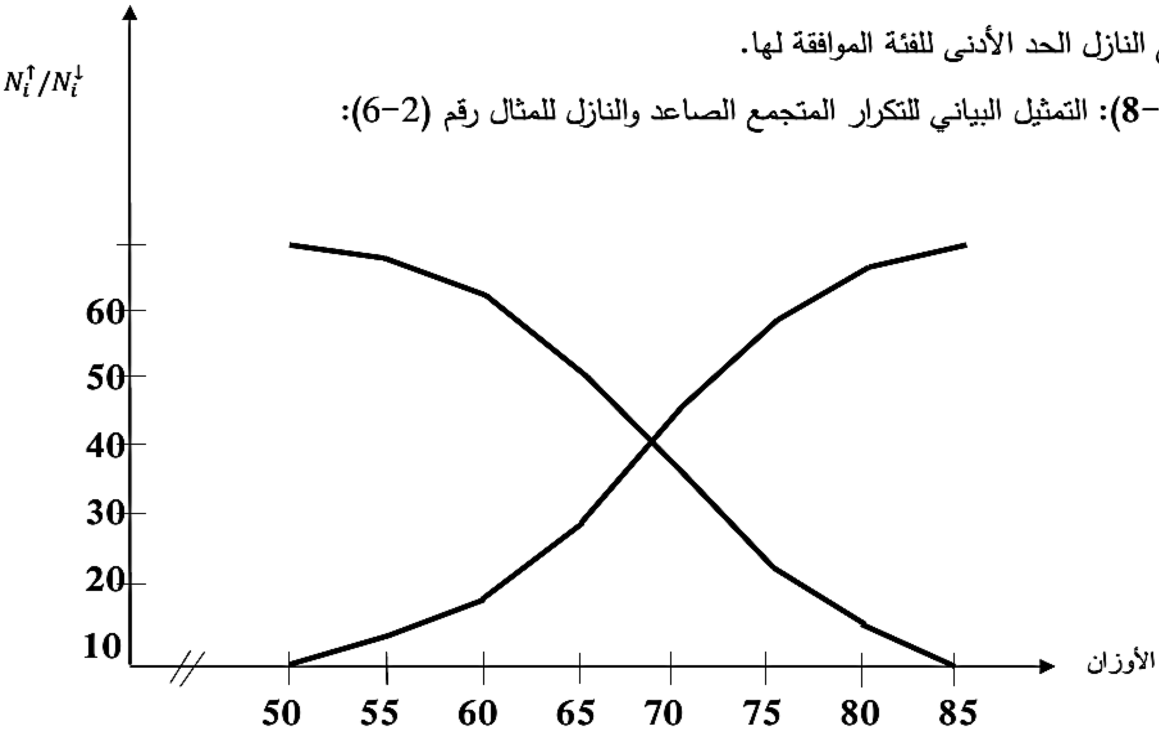
الشكل(2-5): تمثيل بياني بواسطة المنحنى التكراري لتوزيع الطلبة الجامعة حسب أوزانهم

كما يمكن عرض الأشكال الثلاثة على نفس الرسم:

الشكل(2−6): تمثيل بياني بواسطة المدرج التكراري، المظلع التكراري، المنحنى التكراري لتوزيع الطلبة الجامعة حسب أوزانهم

ب− يمثل التكرار المتجمع الصاعد والنازل للمتغير الإحصائي المستمر عن طريق **المنحنى المتجمع الصاعد والنازل**، حيث نرفق بكل قيمة للتكرار المتجمع الصاعد الحد الأعلى للفئة الموافقة لها ونرفق بكل قيمة للتكرار المتجمع النازل الحد الأدنى للفئة الموافقة لها.

مثال(2−8): التمثيل البياني للتكرار المتجمع الصاعد والنازل للمثال رقم (2−6):



الشكل(2−7): المنحنى المتجمع الصاعد والنازل المطلق لتوزيع الطلبة الجامعة حسب أوزانهم

3- التمثيل البياني للتوزيع التكراري لمتغير إحصائي متصل في حالة عدم تساوي أطوال الفئات (طريقة التصحيح):

إذا كانت الفئات غير متساوية، نقوم بتعديل التكرارات لأن قاعدة المقارنة غير ثابتة، حتى يكون هناك تناسب بين طول الفئة والتكرار المقابل لها، أي إيجاد عدد الوحدات الإحصائية الموزعة على وحدة قياس معينة.

التكرار المعدل: هو عبارة عن النسبة بين التكرار البسيط وطول الفئة المقابلة مضروبا في الطول الشائع.

$$\boxed{n_i' = \frac{n_i}{a_i} \times a} \quad \text{أو} \quad \boxed{f_i' = \frac{f_i}{a_i} \times a} \quad \text{أو} \quad \boxed{f_i'\% = \frac{f_i\%}{a_i} \times a}$$

حيث:

n_i' : تمثل التكرار المطلق المعدل. f_i' : تمثل التكرار النسبي المعدل.

$f_i'\%$: تمثل التكرار النسبي المئوي المعدل. a_i : تمثل طول كل فئة.

a : تمثل الطول الشائع.

n_i ، f_i ، $f_i\%$: تمثل بهذا الترتيب التكرار المطلق، التكرار النسبي، التكرار النسبي المئوي.

مثال(2-9): يبين التوزيع التالي توزيع 100 عامل حسب الأجر اليومي، مثله بيانيا؟

الجدول(2-5): توزيع 100 عامل حسب الأجر اليومي

فئات الأجور	التكرار البسيط n_i
$]20-25]$	5
$]25-35]$	15
$]35-40]$	20
$]40-55]$	25
$]55-75]$	30
$]75-80]$	5
مجموع التكرارات	**100**

الحل: نلاحظ أن أطوال الفئات غير متساوية، وعليه يجب إجراء التصحيح على التكرار n_i قبل التمثيل البياني:

فئات الأجور	التكرار البسيط n_i	طول الفئة a_i	$\frac{n_i}{a_i}$	$n_i' = \frac{n_i}{a_i} \times a$
$]20-25]$	5	5	1	5
$]25-35]$	15	10	1,5	7,5
$]35-40]$	20	5	4	20
$]40-55]$	25	15	1,66	8,33
$]55-75]$	30	20	1,5	7,5
$]75-80]$	5	5	1	5
مجموع التكرارات	**100**	/	/	/

الطول الشائع هو 5، أي $a = 5$

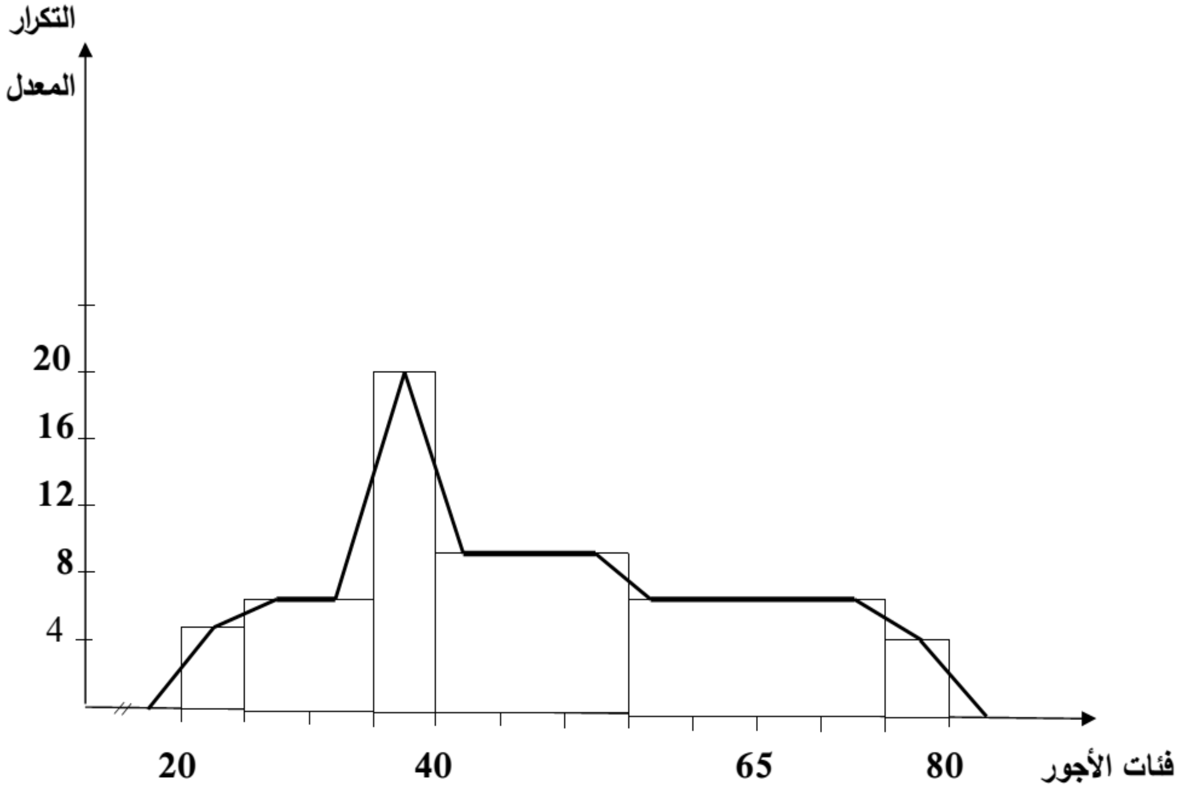
ملاحظة:

نقوم بتعديل التكرارات في حالة الفئات غير المتساوية في حالتين:

1- عند رسم المدرج التكراري.

2- عند تحديد الفئة المنوالية وحساب المنوال.

التمثيل البياني:



الشكل(2-8): توزيع 100 عامل حسب الأجر اليومي

ثالثا- التوزيع التكراري للمتغير الإحصائي الكيفي.

1- التوزيع التكراري للمتغير الإحصائي الكيفي القابل للترتيب وتمثيله البياني:

1-1- جدول التوزيع التكراري:

إذا كان المتغير المدروس كيفيا قابلا للترتيب فإن جدول التوزيع التكراري يحتوي على أنواع المتغير في العمود الأول والتكرار المطلق n_i وكذلك التكرار النسبي والنسبي المئوي، وكذلك التكرار المتجمع الصاعد والنازل المطلق والنسبي.

1-2- التمثيل البياني للمتغير الكيفي القابل للترتيب

تمثل التكرارات المطلقة للمتغير الكيفي القابل للترتيب عن طريق **المستطيل المئوي**، حيث تناسب مساحة كل جزء من المستطيل التكرار المطلق أو النسبي الموافق له.

مثال(2-10):

يمثل الجدول التالي توزيع عينة من 50 فرد حسب المستوى التعليمي، والمطلوب حساب كلا من: $N_i^{\uparrow}$، $N_i^{\downarrow}$، f_i ، $f_i\%$، $F_i^{\uparrow}\%$، $F_i^{\downarrow}\%$ ، ثم إشرح كلا من: n_2 ، $N_2^{\uparrow}$ ، $N_4^{\downarrow}$، $F_2^{\uparrow}\%$، $F_4^{\downarrow}\%$ ، مع التمثيل البياني لهذا التوزيع؟

الجدول(2-6): توزيع عينة من 50 فرد حسب المستوى التعليمي

المستوى التعليمي	n_i
إبتدائي	4
متوسط	14
ثانوي	20
جامعي (تدرج)	10
دراسات عليا	2
المجموع	50

الحل:

المستوى التعليمي	n_i	f_i	$f_i\%$	$N_i^{\uparrow}$	$N_i^{\downarrow}$	$F_i^{\uparrow}$	$F_i^{\downarrow}\%$
إبتدائي	4	0,08	8	4	50	8	100
متوسط	14	0,28	28	18	46	36	92
ثانوي	20	0,40	40	38	32	76	64
جامعي (تدرج)	10	0,20	20	48	12	96	34
دراسات عليا	2	0,04	4	50	2	100	4
المجموع	50	1,00	100	/	/	/	/

الشرح:

$n_2 = 14$: هناك 14 فردا من بين 50 فردا مستواهم العلمي هو المستوى المتوسط.

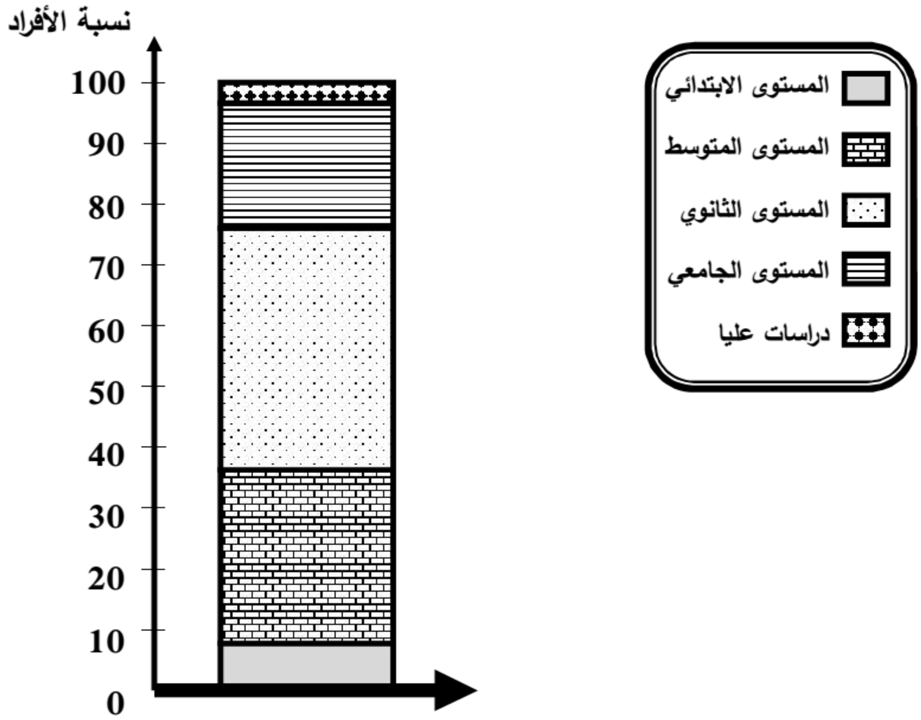
$N_2^{\uparrow} = 18$: هناك 18 فردا من بين 50 فردا مستواهم العلمي على الأكثر هو المستوى المتوسط.

$N_4^{\downarrow} = 12$: هناك 12 فردا من بين 50 فردا مستواهم العلمي على الأقل هو المستوى الجامعي.

$F_2^{\uparrow}\% = 36\%$: هناك 36% من الأفراد مستواهم العلمي على الأكثر هو المستوى المتوسط.

$F_4^{\downarrow}\% = 34\%$: هناك 34% من الأفراد مستواهم العلمي على الأقل هو المستوى الجامعي.

- التمثيل البياني



الشكل(2-9): توزيع عينة من 50 فرد حسب المستوى التعليمي

2- التوزيع التكراري للمتغير الإحصائي الكيفي الغير قابل للترتيب وتمثيله البياني

2-1- جدول التوزيع التكراري:

إذا كان المتغير المدروس كيفيا غير قابل للترتيب فإن جدول التوزيع التكراري يحتوي على أنواع المتغير في العمود الأول والتكرار المطلق n_i وكذلك التكرار النسبي والنسبي المئوي، أما التكرار المتجمع الصاعد والنازل المطلق والنسبي فليس له معنى.

2-2- التمثيل البياني للمتغير الكيفي الغير قابل للترتيب:

تمثل التكرارات المطلقة للمتغير الكيفي الغير قابل للترتيب عن طريق **الدائرة النسبية**، حيث يتناسب قيس كل زاوية مع التكرار المطلق أو النسبي الموافق له.

مثال(2-11): يمثل الجدول التالي توزيع عينة من 40 فرد من الجالية المغاربية في فرنسا حسب البلد الأصلي و المطلوب حساب كلا من f_i ، $f_i\%$ مع شرح n_2 و n_4 و $f_2\%$ ؟.

الجدول(2-7): توزيع عينة من 40 فرد من الجالية المغاربية في فرنسا حسب البلد الأصلي

البلد الأصلي	المغرب	الجزائر	تونس	ليبيا	المجموع
عدد الأفراد	12	16	9	3	**40**

الحل:

البلد الأصلي	n_i	f_i	$f_i\%$	الزاوية المركزية
المغرب	12	0,3	30	108°
الجزائر	16	0,4	40	144°
تونس	9	0,225	22,5	81°
ليبيا	3	0,075	7,5	27°
المجموع	40	1,00	100	360°

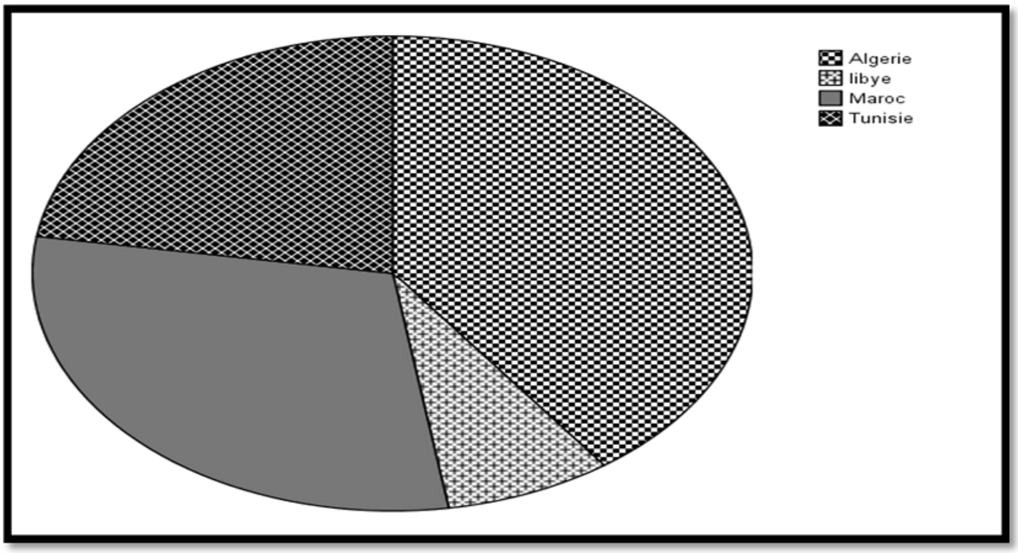
الشرح:

$n_2 = 16$: هناك 16 فردا من بين 40 فردا من الجالية المغاربية في فرنسا من أصول جزائرية.

$n_4 = 3$: هناك 3 أفراد من بين 40 فردا من الجالية المغاربية في فرنسا من أصول ليبية.

$f_2\% = 40\%$: هناك 40% من أفراد الجالية المغاربية في فرنسا من أصول جزائرية.

- **التمثيل البياني:**



الشكل(2−10): توزيع عينة من 40 فرد من الجالية المغاربية في فرنسا حسب البلد الأصلي

رابعا– دراسة قضية التمركز:

دراسة قضية التمركز هي طريقة إحصائية تطبق على التوزيعات التكرارية (الجداول) التي يكون موضوعها توزيع ثروة معينة (دخل، أجور، أراضي...إلخ)، على فئات متفاوتة (فئات من الأسر، فئات العمال، فئات من المزارعين...إلخ)، لكي نعرف هل هناك تمركز في توزيع هذه الثروة أي هل هناك توزيع عادل أو غير عادل لهذه الثروة على مختلف هذه الفئات، فهي إذن تجيب على سؤالين:

1– هل هناك فوارق أو تمركز في توزيع هذه الثروة على مختلف فئات المجتمع الإحصائي؛

2– إذا كانت هناك فوارق فبكم تقدر، أي إعطاء تقييما كميا لهذه الفوارق والحكم عليها هل هي فوارق كبيرة، كبيرة جدا أو معتدلة (يتم ذلك بواسطة نسبة كما سنبين لاحقا).

وقضية التمركز لا تطبق إلا على المتغيرات الإحصائية المستمرة ذات القيم الموجبة، لذا تبدو أهميته واضحة في الظواهر الاقتصادية كلها، ويعتبر توزيع الدخل القومي على المواطنين من أكثر التطبيقات العملية لظاهرة التمركز.

تدرس قضية التمركز بطريقتين:

– طريقة بيانية: بواسطة مربع جيني للتمركز؛

– طريقة حسابية بواسطة معامل جيني للتمركز I_{Gini}

نعرض الطريقتين من خلال المثال التالي:

مثال(2–12):

الجدول التالي يبين الدخل الشهري لـــ 43 أسرة بالدينار الجزائري:

الجدول(2–8): الدخل الشهري لـــ 43 أسرة بالدينار الجزائري

الدخل الشهري	عدد الأسر
$]4000-2000]$	5
$]6000-4000]$	8
$]8000-6000]$	12
$]10000-8000]$	10
$]12000-10000]$	8
المجموع	43

المطلوب: دراسة قضية التمركز؟

الحــــــل:

لدراسة التمركز نتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: إنشاء جدول التوزيع التكراري الخاص بالتمركز(تحضير الحسابات).

1- حساب التكرار النسبي f_i

2- حساب التكرار النسبي المتجمع الصاعد $F_i^{\uparrow}$

3- حساب مراكز الفئات C_i

4- حساب المقادير : $n_i \times c_i$

5- حساب النسب: $s_i = \frac{n_i c_i}{\sum n_i c_i}$

6- حساب النسبة المتجمعة الصاعدة $S_i^{\uparrow}$ بنفس طريقة حساب التكرار النسبي المتجمع الصاعد $F_i^{\uparrow}$

7- مقارنة بعض القيم لـ: s_i و f_i، وإعطاء قراءتها الإقتصادية (بالخصوص الفئتين الأولى والأخيرة).

بالرجوع إلى المثال(2-12):

الدخل الشهري	c_i	n_i	f_i	$F_i^{\uparrow}$	$n_i c_i$	s_i	$S_i^{\uparrow}$
]4000 – 2000]	3000	5	0,1163	**0,1163**	15000	0,0473	**0,0473**
]6000 – 4000]	5000	8	0,1860	**0,3023**	40000	0,1262	**0,1735**
]8000 – 6000]	7000	12	0,2791	**0,5814**	84000	0,2650	**0,4380**
]10000 – 8000]	9000	10	0,2326	**0,814**	90000	0,2839	**0,7319**
]12000 – 10000]	11000	8	0,1860	**1**	88000	0,2776	**1**
المجموع	/	43	1	/	317000	1	/

مقارنة بعض القيم لـ: s_i و f_i :

الفئة الأولى: 11,63% من الأسر يحصلون فقط على 4,73% من الدخل الشهري الإجمالي.

الفئة الأخيرة: 18,6% من الأسر يحصلون لوحدهم على 27,76% من الدخل الشهري الإجمالي.

* نلاحظ أن هناك فوارق في توزيع الدخل الشهري الإجمالي.

الخطوة الثانية: دراسة التمركز بيانيا (مربع جيني)

لرسم مربع جيني نتبع الخطوات التالية:

1- نرسم مربع طول ضلعه 100 ملم موجه على معلم متعامد ومتجانس.

2- تمثل على محور الفواصل $F_i^{\uparrow}$ و على محور التراتيب $S_i^{\uparrow}$.

3- تعيين المثلث ABC على المربع (أنظر الشكل (2-11).

4- ننقل النقاط ($F_i^{\uparrow}$، $S_i^{\uparrow}$) إلى الشكل، مثلا النقطة الأولى (0,1163 ، 0,0473).

5- نربط بين النقاط بمنحنى منكسر.

6- نعرف بعض المفاهيم على الشكل (خط العدالة المطلقة، منحنى لورونز، منطقة التمركز، المساحات خارج منطقة التمركز).

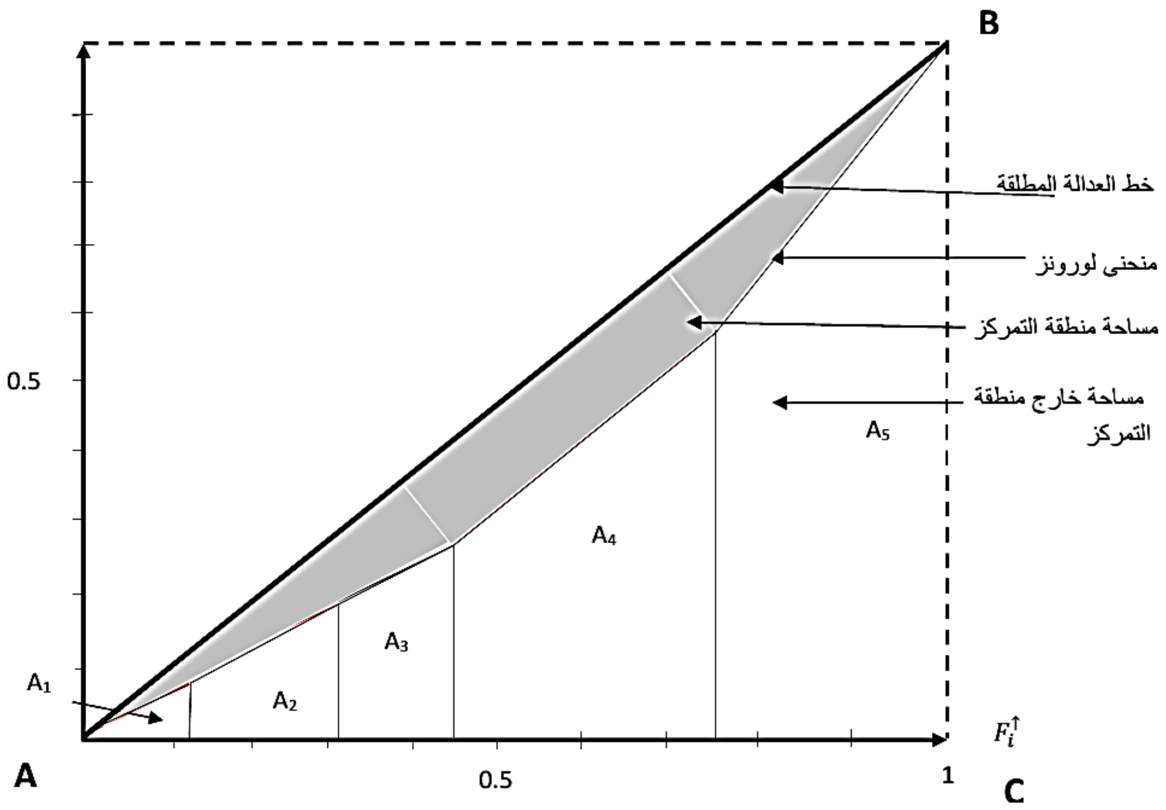
إن شكل منحنى لورونز يأخذ الحالات التالية:

- إذا انطبق منحنى لورونز على المنصف (AB) – خط العدالة (تنعدم مساحة التمركز) – فإننا نقول أن توزيع الثروة عادل تماما(إنعدام التمركز).

- إذا انطبق منحنى لورونز على المثلث (ABC)(مساحة التمركز تساوي مساحة المثلث) فإننا نقول أن توزيع الثروة جائز تماما(تمركز كلي).

- كلما اقترب منحنى لورونز من خط العدالة (AB)(كانت مساحة التمركز صغيرة مقارنة بمساحة المثلث ABC) كلما كان التوزيع التكراري أكثر عدالة، وكلما ابتعد منحنى لورونز من خط العدالة (AB) (كانت مساحة التمركز كبيرة مقارنة بمساحة المثلث ABC) كلما كان التوزيع التكراري أقل عدالة.

بالرجوع إلى المثال(2-12) نقوم برسم مربع جيني كما يلي:



الشكل(2-11): مربع جيني لتوزيع 43 عامل حسب الأجر الشهري

***التعليق على الشكل:**

نراقب الشكل المحصل عليه بالعين المجردة، نلاحظ أن منحنى لورونز يقترب من خط العدالة وبالتالي فإن مساحة التمركز تبدو صغيرة مقارنة بمساحة المثلث ABC ومنه فإن التمركز يبدو ضعيفا أي أكثر عدالة.

الخطوة الثالثة: دراسة التمركز حسابيا **(حساب معامل جيني للتمركز)**

إن معامل جيني للتمركز هو عبارة عن حاصل قسمة مساحة التمركز (S) المحصورة بين منحنى لورونز وخط العدالة (AB) على مساحة المثلث (ABC)، ومنه:

- **إذا كانت النسب نسبية فإن:**

$$\boxed{I_{Gini}=\frac{S}{\text{مساحة المثلث } ABC}=\frac{S}{1/2}=2S\ \dots\dots\dots\dots(1)}$$

$$S=\frac{1}{2}-(A_1+A_2+\cdots+A_K)$$

حيث A_1،A_2، ... ،A_K تمثل مساحات أشباه المنحرف تحسب كلا منها وفق القاعدة التالية:

$$A_i=\frac{\text{القاعدة الصغرى} + \text{القاعدة الكبرى}}{2}\times \text{الإرتفاع}$$

$$S=\frac{1}{2}-\left(\frac{S_1^{\uparrow}\times f_1}{2}+\frac{(S_2^{\uparrow}+S_1^{\uparrow})f_2}{2}+\frac{(S_3^{\uparrow}+S_2^{\uparrow})f_3}{2}+\cdots+\frac{(S_k^{\uparrow}+S_{k-1}^{\uparrow})f_k}{2}\right)$$

$$S=\frac{1}{2}-\left(\frac{(S_1^{\uparrow}+S_0^{\uparrow})f_1}{2}+\frac{(S_2^{\uparrow}+S_1^{\uparrow})f_2}{2}+\frac{(S_3^{\uparrow}+S_2^{\uparrow})f_3}{2}+\cdots+\frac{(S_k^{\uparrow}+S_{k-1}^{\uparrow})f_k}{2}\right)$$

حيث: $S_0^{\uparrow}=0$

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}f_i(S_i^{\uparrow}+S_{i-1}^{\uparrow})$$

بالتعويض في العلاقة (1) نجد:

$$I_{Gini}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}f_i(S_i^{\uparrow}+S_{i-1}^{\uparrow})\right)$$

$$\boxed{I_{Gini}=1-\sum_{i=1}^{k}f_i(S_i^{\uparrow}+S_{i-1}^{\uparrow})}$$

وهي علاقة تقريبية لحساب هذا المعامل.

حيث أن:

f_i: تمثل التكرار النسبي، $S_i^{\uparrow}$: تمثل النسبة المتجمعة الصاعدة و $S_0^{\uparrow}=0$.

إن الحالات التي يأخذها معامل جيني للتمركز هي:

$I_{Gini}=0$: هذا يعني أن منحنى لورونز ينطبق على خط العدالة وبالتالي فالتوزيع عادل تماما.

$I_{Gini}=1$: هذا يعني أن منحنى لورونز ينطبق على المثلث (ABC) وبالتالي نقول أن التوزيع جائر تماما.

$I_{Gini}\leq 0{,}3$: هذا يعني أن منحنى لورونز قريب من خط العدالة، وبالتالي فالتوزيع أكثر عدالة.

$I_{Gini}>0{,}3$: هذا يعني أن منحنى لورونز بعيد عن خط العدالة، وبالتالي فالتوزيع أقل عدالة.

ملاحظة: القيمة 0,3 هي قاعدة تطبيقية للحكم على قوة التمركز من إقتراح بعض الخبراء، كما يعتمد في بعض المراجع على معيار آخر وهو 0,2

بالرجوع إلى المثال(2−12) نقوم بحساب معامل جيني كما يلي:

$f_i(S_i^{\uparrow} + S_{i-1}^{\uparrow})$	$S_i^{\uparrow} + S_{i-1}^{\uparrow}$	$S_i^{\uparrow}$	f_i
0,0055	0,0473	0,0473	0,1163
0,0411	0,2208	0,1735	0,1860
0,1687	0,6043	0,4380	0,2791
0,2721	1,1699	0,7319	0,2326
0,3221	1,7319	1	0,1860
0,8095	/	/	1

$$I_{Gini} = 1 - \sum_{i=1}^{k} f_i(S_i^{\uparrow} + S_{i-1}^{\uparrow})$$
$$I_{Gini} = 1 - 0{,}8095$$
$$I_{Gini} = 0{,}1905$$

بما أن معامل جيني للتمركز أقل من 0,3 فإن توزيع الدخل الشهري للأسر أكثر عدالة.

- **إذا كانت النسب مئوية فإن:**

$$\boxed{I_{Gini} = \frac{S}{ABC} = \frac{S}{5000}}$$

$$S = 5000 - (A_1 + A_2 + \cdots + A_K)$$

وبإتباع الطريقة السابقة نحصل على:

$$\boxed{I_{Gini} = 1 - \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{k} f_i\%(S_i^{\uparrow}\% + S_{i-1}^{\uparrow}\%)}$$

إن الحالات التي يأخذها معامل جيني للتمركز في هذه الحالة هي:

$I_{Gini} = 0$: هذا يعني أن منحنى لورونز ينطبق على خط العدالة وبالتالي فالتوزيع عادل تماما.

$I_{Gini} = 1$: هذا يعني أن منحنى لورونز ينطبق على المثلث (ABC) وبالتالي نقول أن التوزيع جائر تماما.

$I_{Gini} \leq 30\%$: هذا يعني أن منحنى لورونز قريب من خط العدالة، وبالتالي فالتوزيع أكثر عدالة.

$I_{Gini} > 0{,}3\%$: هذا يعني أن منحنى لورونز بعيد عن خط العدالة، وبالتالي فالتوزيع أقل عدالة.