COURS 2: Techniques de commande avancée

LA TRANSFORMEE EN Z

Par: DJOKHRAB Ala Eddine

INTRODUCTION

L'analyse et l'étude des systèmes analogiques linéaires et invariants (SLIT) tels que les filtres analogiques, exige souvent le passage au domaine spectral à travers:

- la réponses fréquentielle H(f) ou H(ω) (en utilisant la transformée de Fourier)
- et aussi la fonction de transfert H(p) (en utilisant la Transformée de Laplace).

En effet, il est avantageux de décrire les systèmes analogiques dans le domaine des fréquences ce qui permet de tirer un certain nombre de conclusions concernant leurs propriétés.

Le même principe est alors appliquée pour l'étude et l'analyse des systèmes discrets linéaires et invariant (SDLIT). A cet effet, la transformée en z, basée sur l'utilisation d'une **fréquence complexe z**, va procurer des avantages similaires pour les systèmes SDLI.

La transformation en z transforme l'espace du temps discret en un espace de fréquences z.

INTRODUCTION

- La transformée en *z* (TZ) de la réponse impulsionnelle d'un système SDLI est sa fonction de transfert en z que l'on note souvent H(z).

- Il existe une relation directe entre la TZ et la TFTD (la transformée de Fourier à temps discret).

- La TZ permet la solution directe des équations aux différences finies de la même façon que la transformée de Laplace avec les équations différentielles.

- La TZ est une méthode générale pour l'étude des systèmes discrets.

DEFINITION DE LA TZ

On rappelle que la fonction de transfert en p d'un filtre analogique (ou SLIT) est obtenue grâce à la transformée de Laplace TL de sa réponse impulsionnelle h(t) :

$$H(p) = TL[h(t)] = \int_D h(t)\exp(-pt)dt \qquad p = \sigma + j\omega$$

Où D est le domaine de définition de h(t) et p l'opérateur de Laplace

Quant à un système discret SDLIT (ou numérique) on utilise la transformée en z de sa réponse impulsionnelle discrète $h(nT_e)$ (Te le pas d'échantillonnage) directement obtenue à partir de la transformée de Laplace en posant $z=\exp(pT_e)$

$$H(z) = TZ[h(nT_e)] = \sum_n h(nT_e) z^{-n}$$

z, une variable complexe, peut prendre toute valeur sur le plan complexe appelé, en l'occurrence, plan *z*.

Souvent on suppose Te=1, pour simplifier

DEFINITION DE LA TZ

Ainsi, pour Te supposé égal à 1, on définit la transforrmée en z bilatérale de h(n) par:

$$H(z) = TZ[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n}$$

Contrairement aux signaux causaux ou aux séquences discrètes causales, on utilise la transformée en z unilatérale :

$$H(z) = TZ[h(n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) z^{-n}$$

Exemple : Calculez la TZ de la séquence discrète non causale suivante : x(n) ={−5,2,1,3,−4,6,3}. Où x(0) = 1;

$$X(z) = TZ[x(n)] = \sum_{n=-2}^{4} x(n) z^{-n} =$$

$$= -5z^{2} + 2z + 1 + 3z^{-1} - 4z^{-2} + 6z^{-3} + 3z^{-4}$$

DEFINITION DE LA TZ

Exemples :

Calculez la TZ de la séquence discrète suivante où u(n) est l'échelon unitaire:

$$x(n) = 0.5^n u(n)$$

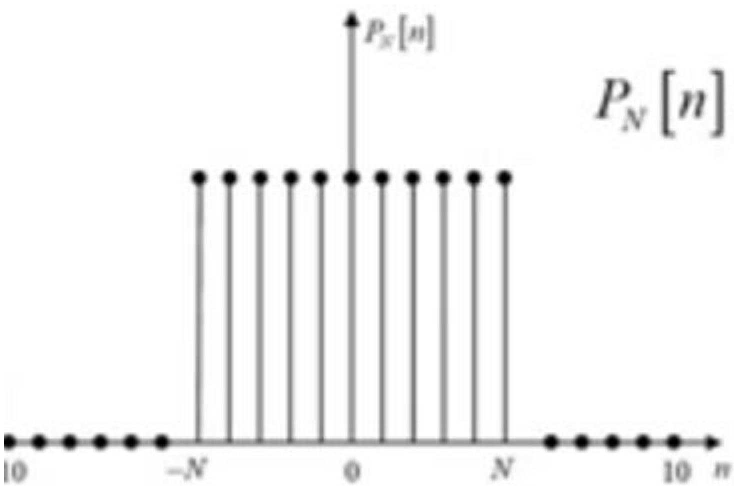
$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0.5^n z^{-n} = 1 + 0.5z^{-1} + 0.5^2 \mathbf{z} + 0.5^3 z^{-3} + 0.5^4 z^{-4} + \ldots.$$

DEFINITION DE LA TZ

Exemples

$$\delta[n] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = 1$$

$$\delta[n-k] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = z^{-k}$$



$$P_N[n] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = z^{N} + z^{N-1} \ldots\ldots z \ +1 + z^{-1} + \ldots\ldots\ldots z^{-N}$$

$$P_N[n] \leftrightarrow z^{N}\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots\ldots + z^{-2N}\right)$$

$$P_N[n] \leftrightarrow \frac{z^{N}\left(1 - z^{-2N-1}\right)}{\left(1 - z^{-1}\right)}$$

REGION DE CONVERGENCE DE LA TZ

La région de convergence, connue sous le nom de ROC, est importante à comprendre car elle définit la région où la transformée z existe.

En effet, la TZ est une série de puissance généralement infinie, om faut indiquer a région de convergence.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

Le ROC pour un x(n) donné est défini comme la plage de z pour laquelle la transformée en z converge. Puisque la transformée z est une série de puissances, elle converge lorsque $\mathbf{x(n)z^{-n}}$ est absolument sommable.

Autrement dit:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| x(n) z^{-n} \right| < \infty$$

REGION DE CONVERGENCE DE LA TZ

Propriétés du ROC:

La région de convergence a un certain nombre de propriétés qui dépendent des caractéristiques de la séquence discrète x(n):

- Le ROC ne peut contenir aucun pôle.

- Si x(n) est une séquence de durée finie, alors le ROC est le plan z entier, sauf éventuellement **$z = 0$ ou $|z| = \infty$**. En effet, tant que chaque valeur de x(n) est finie, la séquence sera absolument sommable.

- Le seul signal dont le ROC est le plan z entier est donc **$x(n) = c\delta(n)$.**

REGION DE CONVERGENCE DE LA TZ

Exemples de calculs du ROC

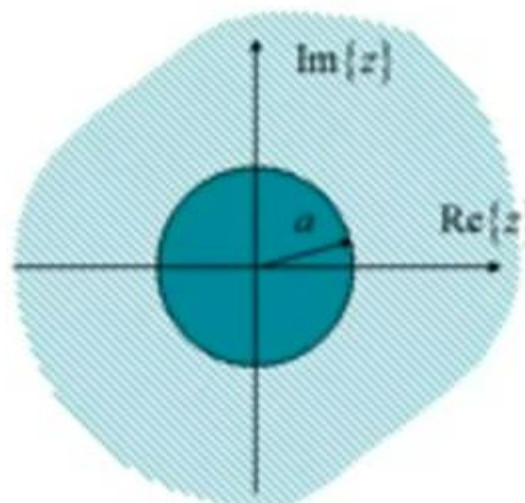
Exponentielle

$$a^n u[n] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = 1 + az^{-1} + \left(az^{-1}\right)^2 + \ldots.. = \frac{1}{1-az^{-1}} \ ,$$

lorsque $\left|az^{-1}\right| < 1$ c`est à dire $|z| > |a|$

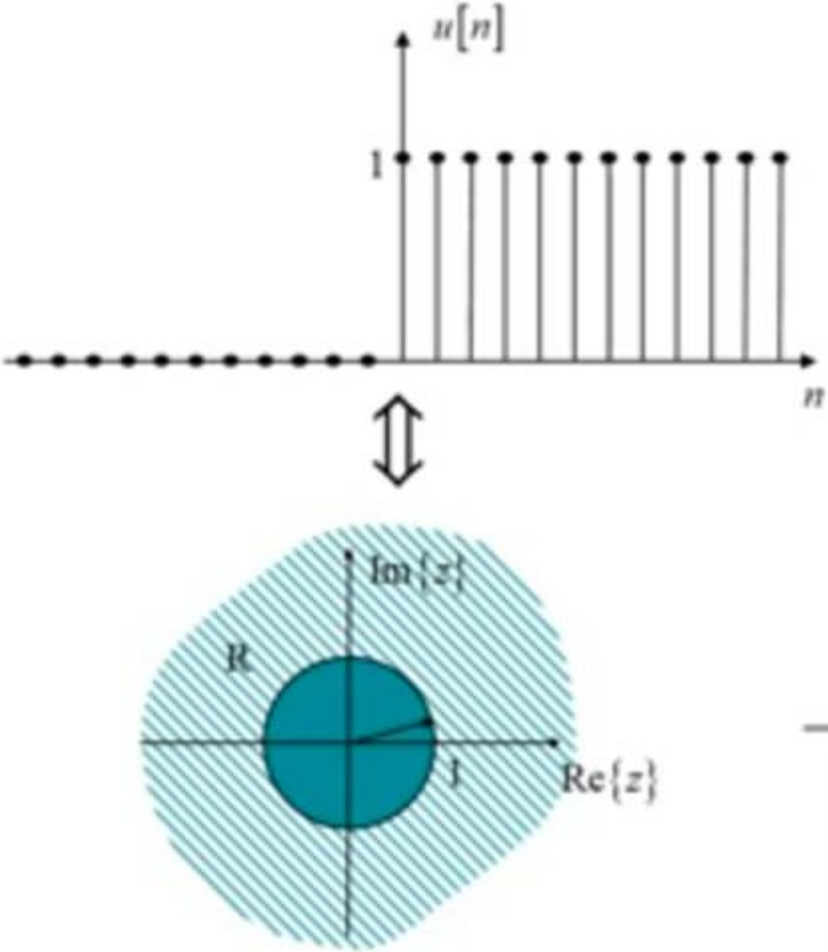
$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \ , \ |z| > |a|$$

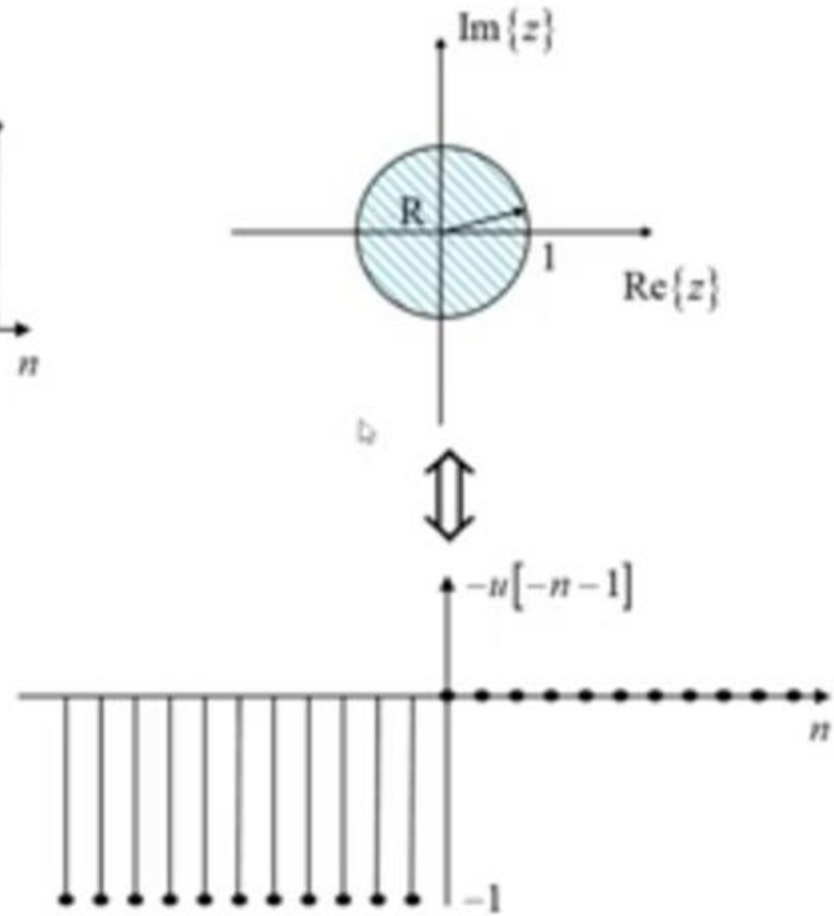
La condition $|z|>|a|$ définit la région de convergence *R*, ou RDC de la transformée en *z*, c'est à dire le domaine du plan *z* où cette transformée existe.



REGION DE CONVERGENCE DE LA TZ

Exemples de calculs du ROC





PROPRIETES DE LA TZ

- la linéarité $$TZ[ax(n)+by(n)] = aX(z)+bY(z)$$
- le retard $$TZ[x(n-m)] = z^{-m}X(z)$$
- la multiplication par une séquence exponentielle $$TZ[a^n x(n)] = X(z/a)$$
- Inversion de temps $$TZ[x(-n)] = X(z^{-1})$$
- dérivation dans le domaine z $$TZ[n^k x(n)] = (-1)^k z^k \frac{d^k X(z)}{dz^k}$$
- convolution $$TZ[x(n) * y(n)] = X(z) \times Y(z)$$
- corrélation $$TZ[x(n) \otimes y(n)] = X(z) \times Y(z^{-1})$$
- Valeur initiale $$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$
- valeur finale $$x(\infty) = \lim_{z \to 1} [z-1] X(z)$$

  valable pour une séquence causale

LA TRANSFORMEE EN Z INVERSE TZ^{-1}

La transformée en z inverse permet de retrouver la séquence discrète $x(n($ à partir de sa transformée en z X(z). La base de la TZ inverse est l'intégrale de Cauchy selon laquelle :

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} z^{k-1}dz = \begin{cases} 1 & , \quad k=0 \\ 0 & , \quad k \neq 0 \end{cases}$$

Γ étant un contour fermé d'intégration renfermant l'origine. Ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} X(z)z^{k-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}\right)z^{k-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n+k-1}dz$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} z^{-n+k-1}dz = x[k]$$

LA TRANSFORMEE EN Z INVERSE TZ^{-1}

La transformée en z inverse est donc établie comme étant :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz$$

Il s'agit d'une intégrale fermée sur un contour Γ se situant dans le plan *z* entièrement dans la zone de convergence. Or lorsque *X(z)* est une expression rationnelle en *z*, selon le théorème des résidus de Cauchy,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz = \sum_{i} \rho_i$$

les ρ_i étant les résidus évalués aux pôles de $X(z)z^{n-1}$ à l'intérieur de Γ.

LA TRANSFORMEE EN Z INVERSE TZ^{-1}

Autres méthodes :

Pour calculer la TZ inverse, souvent, des méthodes plus simples sont possibles

Si de plus $X(z)$ est une **fonction rationnelle en z** :

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots b_Nz^{-N}}{1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}-\ldots-a_Mz^{-M}}$$

on peut utiliser des méthodes comme les suivantes :

- On peut utiliser un développement en éléments simples et se ramener à des transformées en z connues.

- Dans certains cas, une division suivant des puissances croissantes de z^{-1} est suffisante.