COURS 2: Techniques de commande avancée

Commande Optimale

Par: DJOKHRAB Ala Eddine

Les problèmes de commande optimale se rencontrent dans la vie de tous les jours : comment arriver à destination le plus rapidement possible, comment minimiser sa consommation Pour un système dynamique donné et dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère donné.

1. CONTROLE OPTIMAL DES SYSTEMES

La conception de contrôle optimal des systèmes est une fonction importante de l'automatique. Le but de la conception est de réaliser un système de contrôle de telle façon que le système en boucle fermée est identique à un système désiré (ce système est imposé selon des critères bien défini).

L'exécution de ces critères désirés est obtenue par la minimisation d’un critère de performance ou l’indice de performance (noté J).

Les indices de performance sont normalement spécifiés dans le domaine temporel; donc, il est normal que nous souhaitions élaborer des procédures de conception dans le domaine temporel.

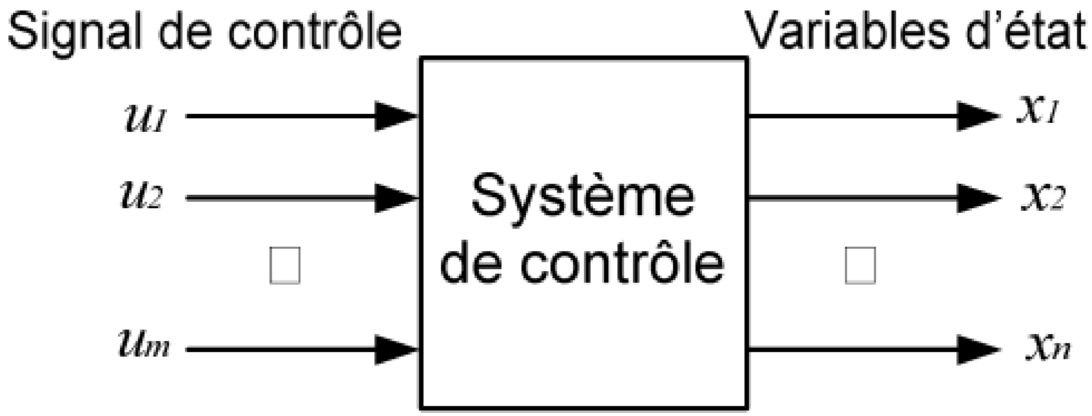
la conception de système de contrôle optimal qui est décrit par une formulation de variable d'état. Nous considérerons que la mesure des variables d'état est utilisée pour calculer un signal de commande u(t) de sorte que l'exécution du système soit optimisée.

Soit un système à temps continu de représentation d'état : $\dot{x} = f(x, u, t)$ et de condition initiale $x(t_0) = x_0$. Pour la condition initiale x_0 et la commande *u*, l'équation d'état définit une trajectoire unique : pour l'état sur $[t_0, t_f]$.

L'indice de performance *J* d'un système de contrôle peut être exprimé en général par :

$$J = \int_0^{t_f} f(x, u, t) dt$$

Où x est le vecteur d'état, u est le vecteur de commande, et t_f est le temps final.



Le système de contrôle que nous considérerons est montré sur la figure et peut être représenté par l'équation différentielle suivante: $\dot{x} = Ax + Bu$

Il est intéressant de noter que la commande optimale obtenue s'écrit comme un retour d'état :

$$\hat{u} = -Kx(t)$$

Par exemple, nous pourrions employer

$$\hat{u}_1 = -k_1 x_1\,;\hat{u}_2 = -k_2 x_2\ \ldots \hat{u}_m = -k_n x_n$$

Alternativement, nous pourrions choisir le vecteur de commande par :

$$\widehat{u}_1 = -k_1(x_1 + x_2); \widehat{u}_2 = -k_2(x_2 + x_3) \ldots.$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_m \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{m1} & \cdots & k_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax - BKx = Hx$$

Où H est une matrice de dimension n:n résultant de l'addition des éléments *A-BK*

Dans ce cas, l'indice de performance J est l'intégral du carré d'erreur, donc le critère s'écrit alors :

$$J = \int_0^{t_f} [x_1(t)]^2 dt$$

Pour deux variables d'états x_1 et x_2, l'indice de performance s'écrit par :

$$J = \int_0^{t_f} \left(x_1^2(t) + x_2^2(t)\right) dt$$

Puisque nous souhaitons définir le critère de performance en termes d'intégral de la somme des carrées des variables d'état, nous emploierons l'opération vectorielle suivante :

$$x^T x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Où x^T est le transposé du vecteur x. L'indice de performance devient :

$$J = \int_0^{t_f} x^T x dt$$

Pour t_f tend vers l'infini, le principe de la commande optimale est de dériver l'indice de performance par rapport au temps (Pour obtenir la valeur minimum), on obtient :

$$\frac{d}{dt}(x^T P x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

Substituant l'équation (3-8), nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x^T P x) &= (Hx)^T P x + x^T P (Hx) \\ &= x^T H^T P x + x^T P H x \\ &= x^T (H^T P + P H) x\end{aligned}$$

Avec $(Hx)^T = x^T H^T$. Si nous supposons que $H^T P + PH = -I$, alors l'équation devient :

$$\frac{d}{dt}(x^T P x) = -x^T x$$

Substituant l'équation (3-15) dans l'équation (3-12), nous obtenons

$$J = \int_0^\infty -\frac{d}{dt}(x^T P x) dt = -x^T P x|_0^\infty = x^T(0) P x(0)$$

Dans l'évaluation de la limite à $t = \infty$, nous supposons que le système est stable, et par conséquent $x(\infty) = 0$. Par conséquent, pour réduire au minimum le critère de performance J, nous considérons les deux équations :

$$J = \int_0^\infty x^T x \, dt = x^T(0) P x(0)$$

Et :

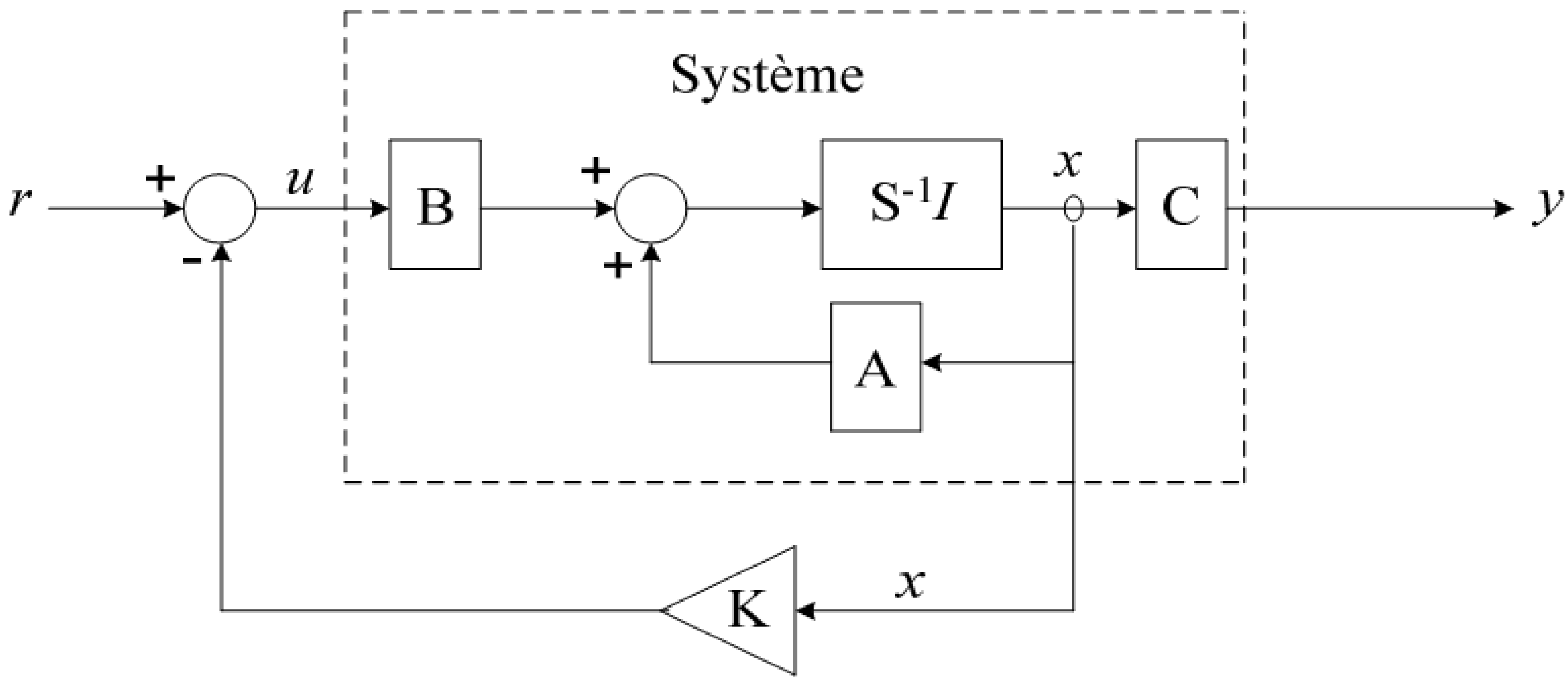
$$H^T P + PH = -I$$

Les étapes de conception sont alors comme suit :

1. Déterminer la matrice P qui satisfaite l'équation $H^T P + PH = -I$, où H est connu.
2. Réduire au minimum J en déterminant le minimum de l'équation $J = \int_0^{\infty} x^T x \, dt = x^T(0) P x(0)$ en ajustant un ou plusieurs paramètres de système non spécifiés

2. COMMANDE LINEAIRE QUADRATIQUE

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR pour linear quadratic regulator. Le système est linéaire et la commande est quadratique. La commande optimale est un retour d'état. Le principe de la commande LQR est présenté dans la figure.



2.1 SYNTHESE DU REGULATEUR LQR

2.2 CHOIX DES MATRICES DE PONDERATION

2.3 COMMANDE LINEAIRE GAUSSIENNE LQG