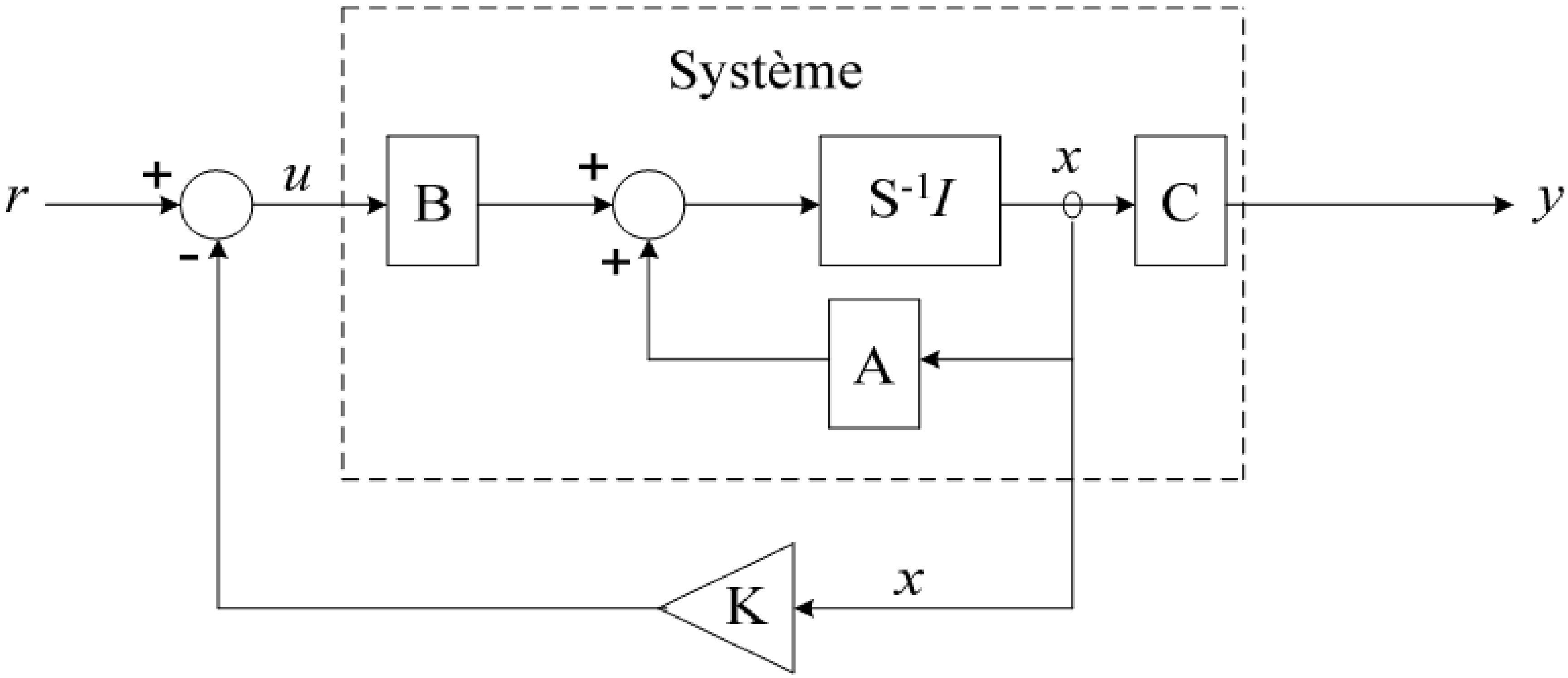
COURS 2 (suite): Techniques de commande avancée

Commande Optimale

Par: DJOKHRAB Ala Eddine

2. COMMANDE LINEAIRE QUADRATIQUE

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR pour linear quadratic regulator. Le système est linéaire et la commande est quadratique. La commande optimale est un retour d'état. Le principe de la commande LQR est présenté dans la figure.



3.3.1. SYNTHESE DU REGULATEUR LQR

Considérons un système linéaire sous forme d'équation d'état suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3\text{-}19)$$

Où on va supposés que La paire (A, B) est stabilisable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mode instable et ingouvernable dans le système.

Soit un régulateur par retour d''etats dont le processus a pour équation d'état l'équation (3-19). Le problème simplifié du régulateur linéaire quadratique consiste à trouver la matrice du correcteur K qui minimise la fonction du coût (ou le critère de performance) suivante :

$$J(x_0, u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right)dt \quad (3\text{-}20)$$

Les matrices de pondération Q et R sont définies positives et symétriques. Et S est la matrice de solution de l’équation de Riccati (est définie positives et symétrique).

Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L(x,u,p,t) = p^T A(t)x + p^T B(t)u + \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u) \tag{3-21}$$

La loi de commande optimale est obtenue si le dérivé de lagrangien par rapport à la loi de commande est nul :

$$\frac{\partial L}{\partial u} = B^T(t)p + R(t)u = 0 \tag{3-22}$$

Donc, on peut tirer la optimale à partir d'équation (3-22) :

$$u_{opt} = -R^{-1}(t)B^T p(t) \tag{3-23}$$

Où :

$$p(t_f) = Sx(t_f) \tag{3-24}$$

Le principe du maximum donne la condition suivante :

$$\dot{p} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -A^T(t)p - Q(t)x \tag{3-25}$$

Alors l'équation dynamique du système en boucle fermée s'écrit :

$$\dot{x} = A^T(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)p(t) \tag{3-26}$$

Les équations (3-24) et (3-26) peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel appelé système Hamiltonien :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} \tag{3-27}$$

Ecrivons p(t) = P(t)x(t), comme nous y incite (4-8), avec comme condition finale $P(t_f)$=S. L'équation (3-26) s'écrit alors :

$$\dot{p}(t) = -\left(A^T(t)P(t) + Q(t)\right)x(t) \qquad (3\text{-}28)$$

Avec $\dot{p}(t) = \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t)$et l'équation d'état (3-19) du système, l'équation (3-28) s'écrit (en omettant la référence au temps au d'alléger les notations) :

$$\left(\dot{P} + PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q\right)x = 0 \qquad (2\text{-}29)$$

La solution est alors obtenue en résolvant l'équation (différentielle) de Riccati suivante:

$$\dot{P} + PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \qquad (3\text{-}30)$$

Avec la condition finale $P(t_f)$ = S. Remarquons que la condition :

$$x^T\left(P + PA + A^T\dot{P} - PBR^{-1}P + Q\right)x = 0 \qquad (3\text{-}31)$$

S’écrit aussi :

$$\frac{d}{dt}(x^T P x) + x^T Q x + u^T R u \tag{3-32}$$

Il est intéressant de noter que la commande optimale obtenue s'écrit comme un retour d'état $u = -K(t)x$ avec :

$$K = -R^{-1} B^T P \tag{3-33}$$

3.4. COMMANDE LINEAIRE GAUSSIENNE LQG

Le régulateur LQG est une combinaison entre un régulateur LQR et un estimateur de Kalman (LQG=LQR+filtre de Kalman). La synthèse LQG de retours dynamiques d'état, qui combine un retour d'état LQ et un filtre de Kalman. Nous présentons principalement les propriétés structurelles de la commande LQG (principe de séparation).

3.4.1. PRINCIPE DU FILTRE DE KALMAN

Nous supposerons donc que notre système perturbé peut être modélisé par le modèle d'état suivant appelé modèle de Kalman :

$$\begin{cases} x(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \end{cases} \tag{3-35}$$

Où : $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^q,\ y \in \mathbb{R}^p,\ v \in \mathbb{R}^p$

Où w et v représentent des bruits blancs, de moyenne nulle, indépendants, avec respectivement pour matrice de covariance W et V.

Auquel nous adjoindrons les hypothèses suivantes. Nous supposerons que :

H1 : La paire (A,C) est détectable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mode instable et inobservable dans le système,

H2: les signaux $w(t)$ et $v(t)$ sont des bruits blancs gaussiens centrés de Densité Spectrale de Puissance (DSP) W et V respectivement, c'est-à-dire :

$$E[w(t)w(t+\tau)^T] = W\delta(\tau)$$

$$E[v(t)v(t+\tau)^T] = V\delta(\tau)$$

$E[w(t)v(t+\tau)^T] = 0$ (cette dernière relation traduit l'indépendance stochastique des bruits w(t) et v (t) : cette hypothèse est introduite pour alléger les calculs qui vont suivre mais n'est pas nécessaire).

Avec : $W \geq 0 \quad et \quad V \geq 0$.

Où :

E: C'est espérance mathématique.

δ: Est le symbole de Kronecker.

H3: V est inversible (il y a autant de sources de bruits blancs indépendantes que de mesures dans l'′′equation de mesure).[1]

3.4.2. SYNTHESE DU REGULATEUR LINEAIRE QUADRATIQUE GAUSSIENNE LQG

Par rapport à la commande LQ, la commande LQG présente l'intérêt de s'appliquer a des systèmes dont l'état n'est pas mesuré. Développée au début de la seconde moitié du 20ème siècle et appliquée lors du programme spatial Apollo pour la stabilisation de lanceurs, elle est apparue comme la première méthode générale pour l'asservissement des systèmes multivariable. La commande LQG est composée d'une commande LQR avec un observateur des états par la méthode du filtre de Kalman. Où le schéma de principe de cette commande est illustré par la figure (3-3). On remarque d'après cette figure que le principe de la commande LQG est le même comme la commande LQR seulement la loi de commande dans le régulateur LQG est la multiplication du gain de retour par l'état estimée par le filtre de Kalman :

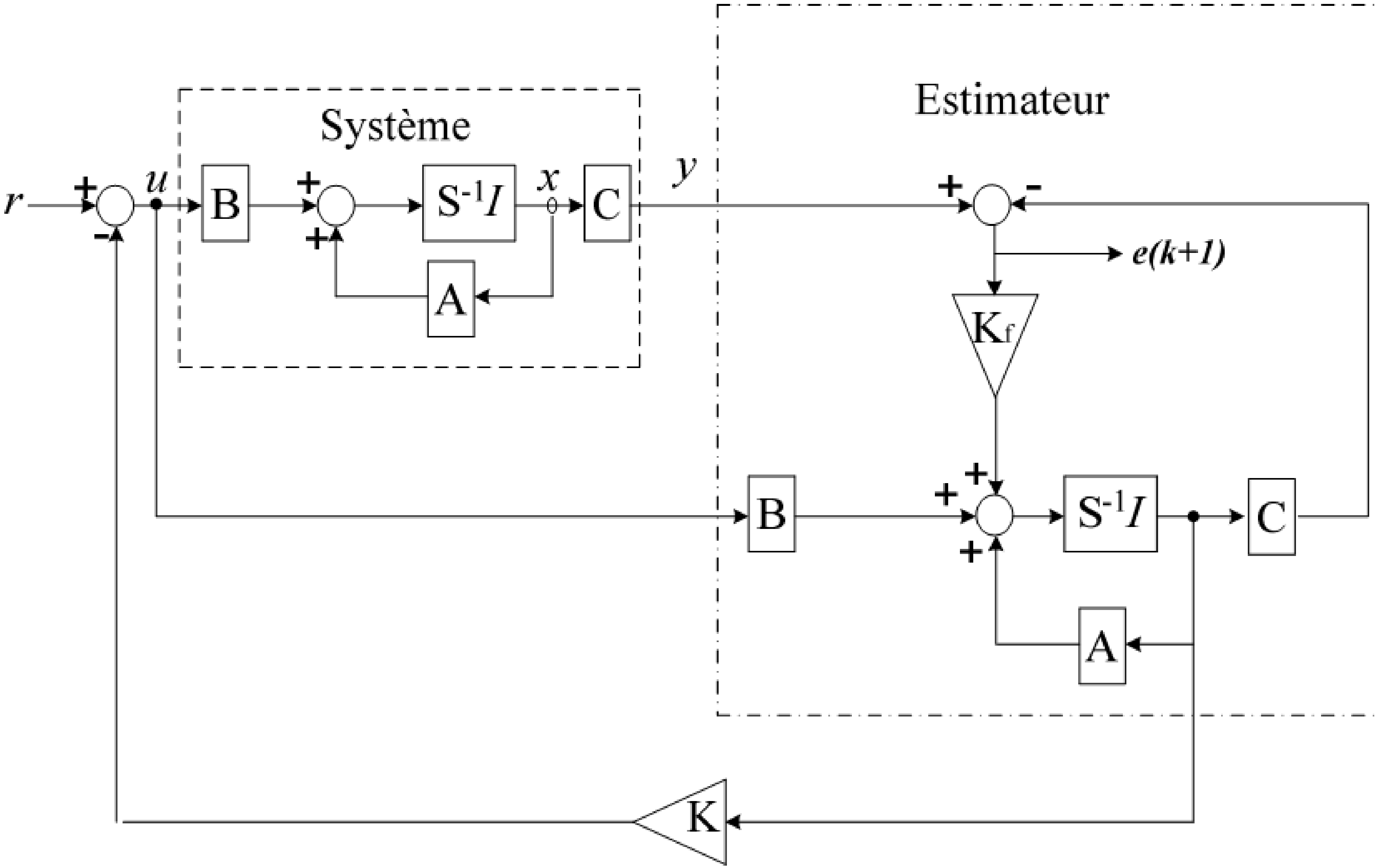


Figure (3-3) : La structure du correcteur LQG.

La loi de commande est obtenue par :

$$u_{opt}(t) = -K\hat{x}(t)$$

Avec : $K = -R^{-1}B^TP$

3.4.2.1. SYNTHESE DU FILTRE DE KALMAN

On considère le système linéaire stationnaire et stochastique possédant la modélisation d'état suivante :

$$\begin{cases} x(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \end{cases} \qquad (3\text{-}38)$$

A partir du vecteur y de mesures bruitées (retour de sortie), nous recherchons une loi de commande qui minimise le critère :

$$J = \lim_{t\to\infty} E\left[\int_0^t y^T Q_f y + u^T R_f u\right] \qquad (3\text{-}39)$$

Q_f et R_f deux matrices de pondération avec, comme précédemment :

$$Q_f = Q_f^T \geq 0 \quad et \quad R_f = R_f^T \geq 0$$

La solution de ce problème s'appuie sur le principe de séparation qui établit que la commande optimale est obtenue comme le montre dans figure (3-3).

Le principe de la commande LQG est basé sur les étapes suivantes :

a) en recherchant l'estimé optimal $\hat{x}$ (au sens de la variance d'erreur minimale) de l'état x par la méthode du Filtre de KALMAN, c'est-à-dire on estime l'état x par l'équation classique du filtre de KALMAN à condition que le triplet $(A, MW^{\frac{1}{2}}, C)$ soit détectable et stabilisable.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_f\big(y - C\hat{x} - Du(t)\big)$$

Avec : $K_f = P_f C^T R_f^{-1}$ où obéit à l'équation de RICCATI suivante :

$$P_f A^T + AP_f - P_f C^T R_f^{-1} C P_f + Q_f = 0 \qquad (3\text{-}40)$$

Avec : $P_f = P_f^T \geq 0$

b) en employant cet estimé comme s'il était la mesure exacte du vecteur d'état, pour résoudre le problème de commande optimale linéaire déterministe (méthode LQ) ; soit (si $(A, B, Q^{\frac{1}{2}})$) est détectable et stabilisable) :

$$u = -K\hat{x}(t)$$

Avec :

$$\begin{cases} K = R^{-1}B^T P \\ PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \end{cases}$$

La figure (3-3) représente la structure du correcteur LQG dans la boucle de régulation.

La représentation d'état du correcteur LQG s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK - K_f C + K_f DK & K_f \\ -K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ y \end{bmatrix} \tag{3-41}$$