COURS:
Techniques de commande avancée

Unité d'enseignement	Matières	Crédits	Coefficient	Volume horaire hebdomadaire			Volume Horaire Semestriel (15 semaines)	Travail Complémentaire en Consultation (15 semaines)	Mode d'évaluation	
	Intitulé			**Cours**	**TD**	**TP**			**Contrôle Continu**	**Examen**
UE Fondamentale Code : UEF 2.1.1 Crédits : 10 Coefficients : 5	Modélisation et simulation des systèmes électromécaniques	6	3	3h00	1h30		67h30	82h30	40%	60%
	Techniques de commande avancée	4	2	1h30	1h30		45h00	55h00	40%	60%

Par: DJOKHRAB Ala Eddine

Objectifs:

Présenter à l'étudiant une synthèse utilitaire sur les différents modèles graphiques et analytiques des commandes avancées des systèmes nécessaires à la compréhension des divers aspects de leurs fonctionnement, de comprendre le formalisme des techniques d'identification.

Connaissances préalables recommandées:

Modèles dynamiques des machines électriques.

Contenu de la matière:

Chapitre 1. Commande par retour d’état

Chapitre 2. Commande optimale

Chapitre 3. Commande adaptative

Chapitre 4. Commande par régulateur RST

Chapitre 5. Commande robuste

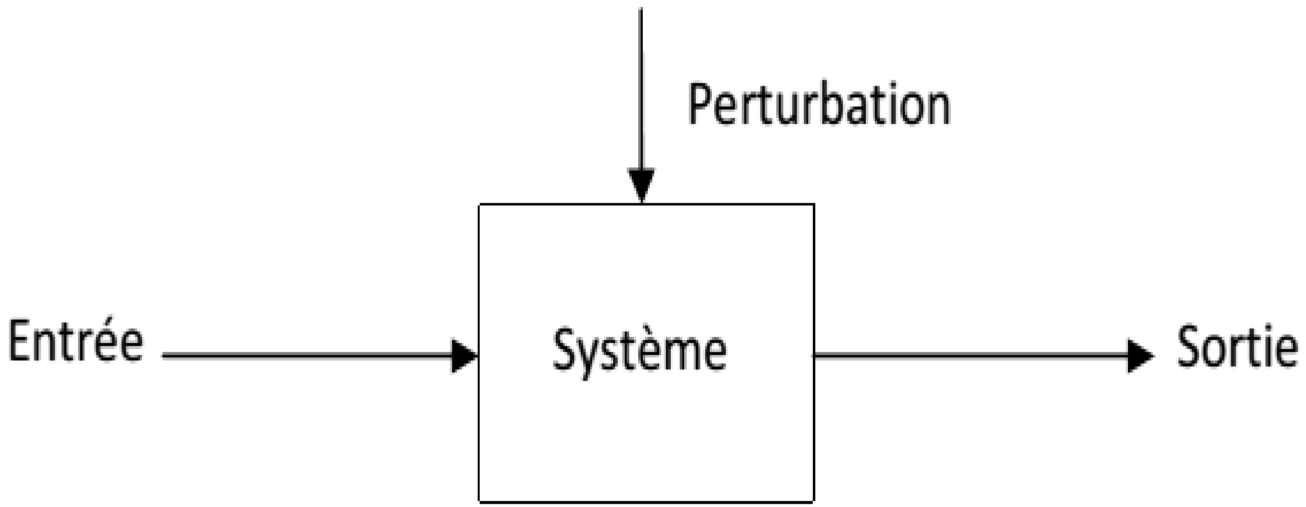
Chapitre 6. Commande prédictive

Chapitre 1- commande par retour d'état

1. Introduction à la représentation d'état

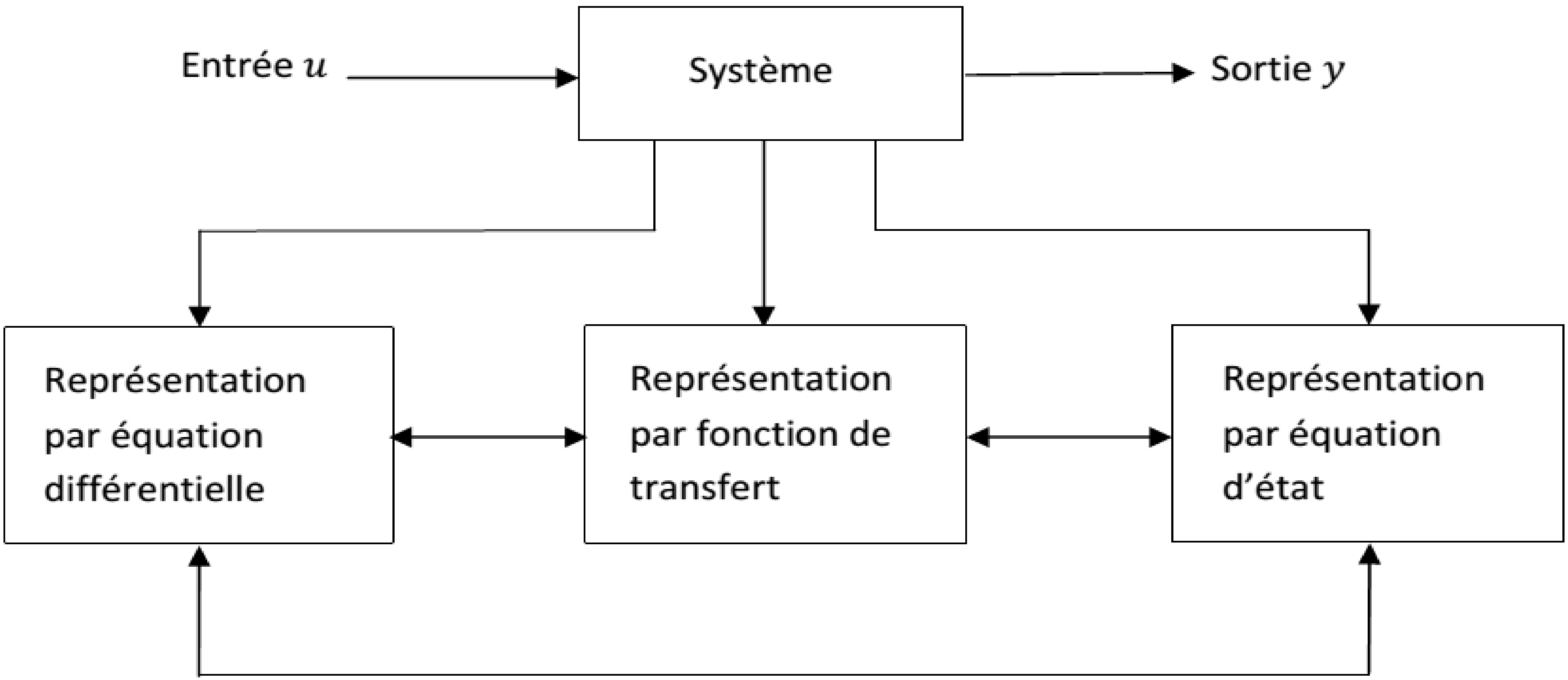
Lorsque l'on envisage la commande d'un système, la 1ère étape consiste à la modéliser.

Modéliser un système consiste à élaborer une représentation mathématique qui permette de décrire et prédire son comportement dynamique et permanent lorsqu'il soumit à des influences externes (entrées de commande, perturbation, …)



1.1. Les déférentes formes de modalisation

Tout système linéaire peut être représente de plusieurs manières comme le montre le schéma suivant :



Parmi les déférentes modélisations possibles d'un système seul la représentation d'état permet une approche interne.

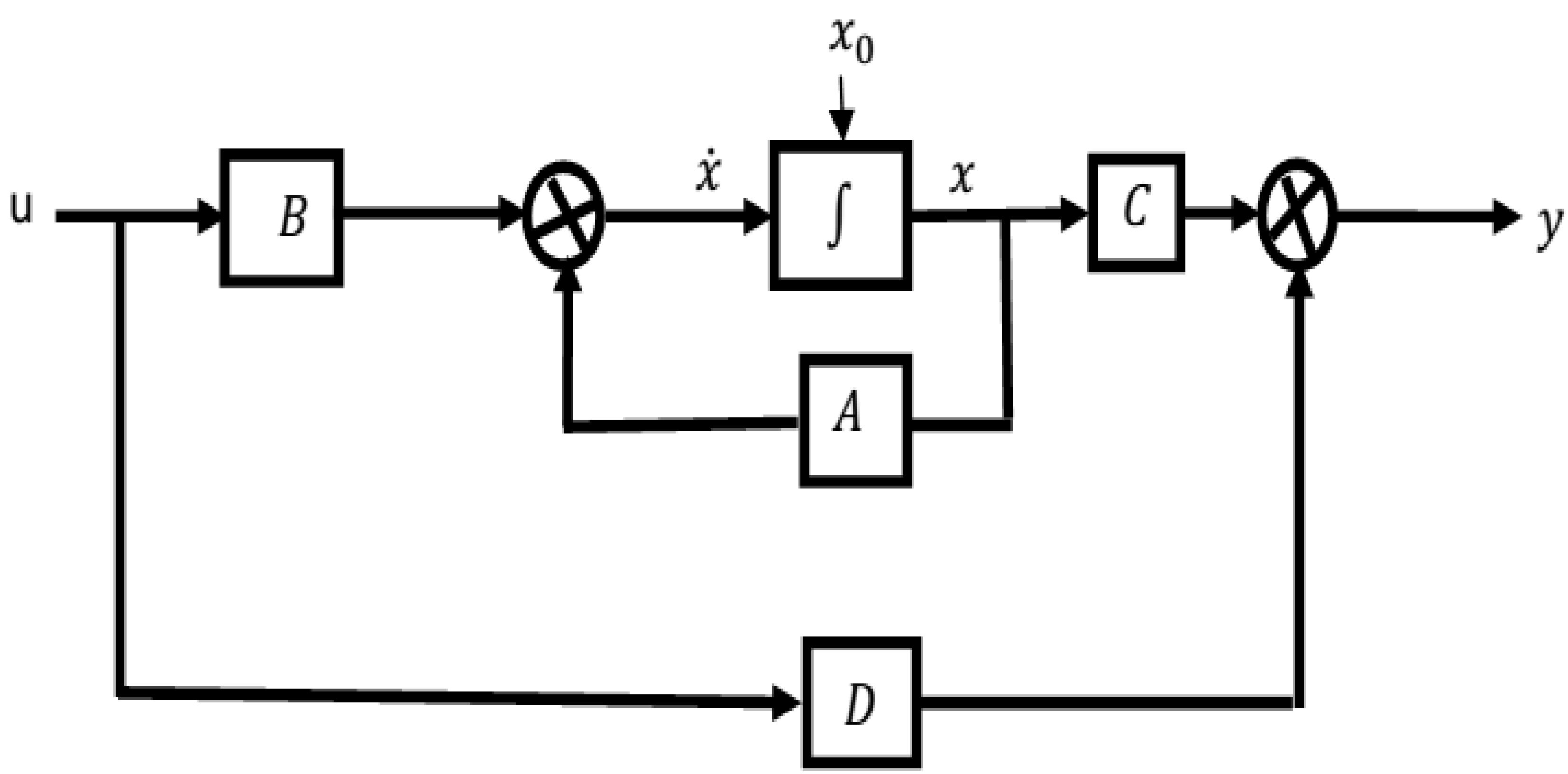
(Voir exercice 1 TD 01)

1.2.Equation d'état :

D'une manière générale, à tout système linéaire continu peut lui d'être associe les équations matricielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x_0 = x(t_0) \end{cases}$$

_ *A(nxn)* matrice d'état
_ *x(nx1)* vecteur d'état
_ *u(nx1)* vecteur d'entrée du système
_ *y(px1)* vecteur de sortie du système
_ *B(nxm)* matrice de commande du système
_ *C(pxn)* matrice d'observation du système
_ *D(pxm)* matrice de transmission directe du système



u
B
$\dot{x}$
x_0
$\int$
x
C
y
A
D

1.3.Passage de l'espace d'état vers la fonction de transfert

Soit un système représenté par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

En appliquant la TL aux deux côtés, on obtient

$$\begin{cases} SX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = Cx(s) + DU(s) \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} X(s) = (SI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = [C(SI - A)^{-1}B + D]U(s) \end{cases}$$

Ce qui nous donne directement

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(SI - A)^{-1}B + D}$$

(Voir exercice 2 TD 01)

Sous Matlab le calcul s'effectuer par la fonction ss2tf comme suite

```
A=[3  1 ; 0  -2] ; B=[0 ;1] ; C=[1  1] ; D=0 ;

[N  D]=ss2tf(A,B,C,D);

H=tf(N,D);
```

1.4.Passage de la FT vers l'espace d'état

Soit le système représenté par la FT suivante :

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{s^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i s^i}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{R(s)}\frac{R(s)}{U(s)} = H_1(s)H_2(s)$$

avec $H_1(s) = \frac{R(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n+\sum_{i=1}^{n-1} a_i s^i}$ et $H_2(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \sum_{i=1}^{m} b_i s^i$

En écrivant $H_1(s)$ et $H_2(s)$ sous forme différentielle :

$$r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \cdots + a_1 \dot{r} + a_0 = u$$

$$b_m r^m + b_{m-1} r^{m-1} + \cdots + b_1 \dot{r} + b_0 r = y$$

En appliquant le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = \dot{r} \\ x_3 = \ddot{r} \\ \quad \vdots \\ x_n = r^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{r} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{r} = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dddot{r} = x_4 \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_n = r^{(n)} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u \end{cases}$$

et l'équation de sortie: $y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + b_m x_m$

En fin, voilà la représentation matricielle lorsque n>m ;D= 0

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_0 b_1 \quad \ldots \quad b_m \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sous Matlable calcul s'effectuer par la fonction tf2ss comme suite

N=[] ; % numérateur de la fonction de transfert

D=[] ;% dénominateur de la fonction de transfert

[A,B,C,D]=tf2ss(N,D) ;

1.5.Résolution des équations d'état :

Come une équation différentielle de degré 1, la solution d'un système d'équations différentielle présenté par les équations d'état suivantes :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad tq \; x \in n \, , u \in m$$

est donnée par :

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)d\tau$$

On définie $Q(t) = e^{At}$matrice de transition du système

$$x(t) = Q(t)x(0) + \int_0^t Q(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

La question que se pose, comment calculer *Q(t)*, *Q(t)*=?

En appliquant la TL sur l'équation d'état, on obtient

$$SX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s)$$

Après simple manipulation, on obtient

$$X(s) = (SI - A)^{-1}X(0) + (SI - A)^{-1}BU(s)$$

Il apparaît clairement, en confrontant cette expression à la solution générale déterminée dans le ci-dessus, soit :

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\,Bu(\tau)d\tau$$

que la matrice de transition e^{At} possède pour transformée de Laplace la matrice $(s\boldsymbol{I} - [A])^{-1}$

$$\mathcal{L}\big(Q(t)\big) = \mathcal{L}(e^{At}) = (SI - A)^{-1}$$

donc

$$\boldsymbol{Q(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]}$$

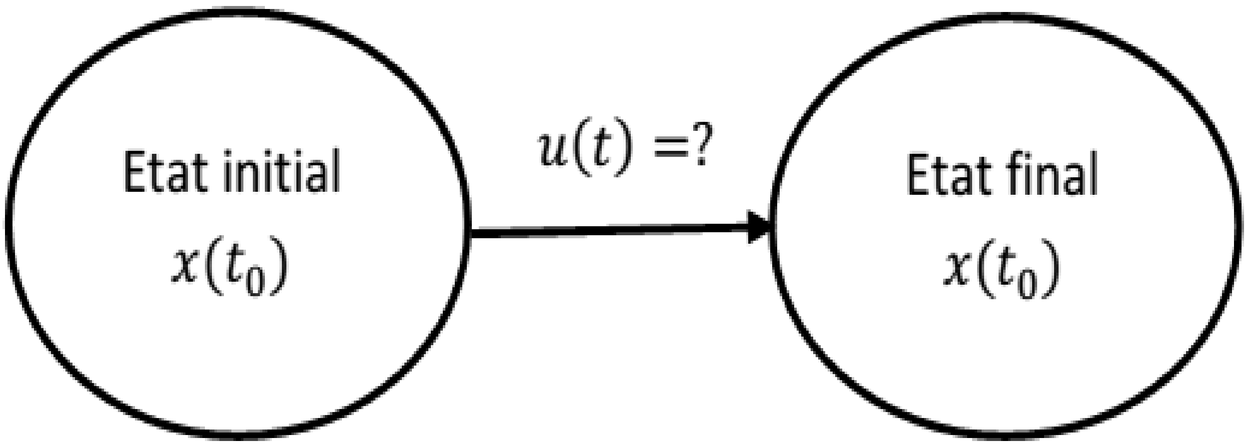
(Voir exercice 3 TD 01)

1.6. Stabilité dans l'espace d'état

On peut démontrer que la stabilité d'un système est assurée si les valeurs propres de la matrice d'état sont à partie réel négatives.

2. Commandabilité, et commande par placement de pôles

On dit qu'un système $\dot{x} = Ax + Bu\ \ et\ y = Cx + Du\ ou\ x(t_0) = x_0$ est commandable à l'instant $t_f > t_0$ si quels que soient les états $x_f\ et\ x_0$, il exixte un signal de commande $u(t)$ transférant le système de l'état x_0 à l'état x_f .



L'étude de la commandabilité, ne dépend que les matrices A et B. Pour cette raison, on dit parfois que c'est la paire (A,B) qui est commandable.

2.1. Critère de commandabilité

Le paire (A, B) est commandable si et seulement si :

$\boldsymbol{rong(M_c) = n}$ tel que $\boldsymbol{M_c = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; A^3B \ldots A^{n-1}B]}$

M_c : Matrice de commandabilité

Le paire (A, B) est complètement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est régulière, c'est à dire $\det(M_c) \neq 0$.

(Voir exercice 4 TD 01)

Sous Matlab le calcul du rang se fait par la fonction rank, le calcul de la matrice M_c par ctrb et le calcul du déterminant par la fonction det.

2.2. Commande par placement de pôles

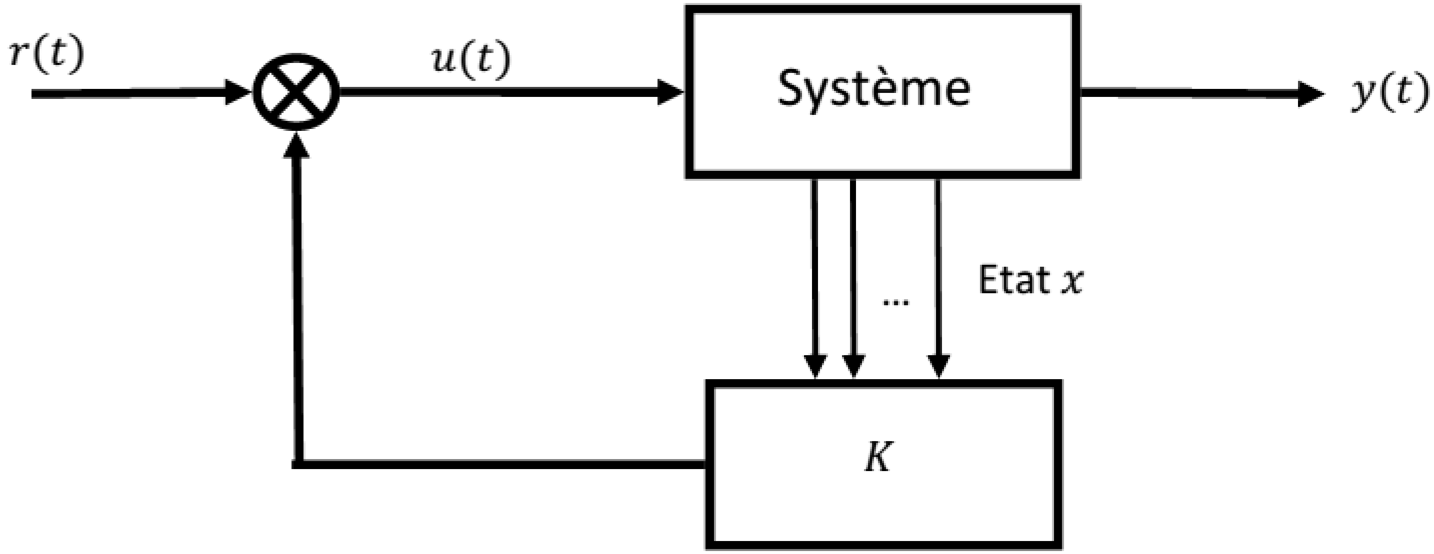
On considère un système S mono variable $(m = p = 1)$ commandable représenté par l'équation suivante :

$$S_{BO}\begin{cases} x = Ax + B\,u \\ y = Cx \end{cases}$$

La stabilité et la dynamique du système S est fixés par les valeurs propres de A, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_n\}$. On souhaite commander le système dans le but d'améliorer les performances par la commande suivante :

$$u(t) = r(t) - Kx(t) = r(t) - k_1x_1 - k_2x_2 - \cdots - k_nx_n$$

où $K = [k_1k_2 \dots k_n]$ est appelé le gain du retour d'état.



Avec cette commande les équations d'état en boucle fermée s'écrivant :

$$S_{BF}\begin{cases} x = (A - BK)x + Br \\ y = Cx \end{cases}$$

2.4. Mise en œuvre pratique

On donne ci-dessous les principales étapes à suivre pour mettre en œuvre la technique de la commande par placement de pôles :

Méthode direct

Calculer le gain K tel que

$$\det\big(\lambda I - (A - BK)\big) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

$$\sigma(A - BK) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_n\}$$

(Voir exercice 5 TD 01)

Pour ce faire :

- Poser $K = [k_1 k_2 \dots k_n]$
- Calculer en fonction de K, la matrice d'état en boucle fermée $A - BK$.
- Calculer la matrice $\lambda I - (A - BK)$ et en déduire son déterminant pour obtenir le polynôme caractéristique en boucle fermée en fonction de K, $P_{BF}(\lambda)$.
- Développer le polynôme caractéristique désiré $P_{désiré}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$.
- En identifiant terme à terme les deux polynômes caractéristiques, $P_{BF}(\lambda)$ et $P_{désiré}(\lambda)$, on obtient un système d'équations dont les inconnues sont les éléments $k_i, i = 1 \dots n$.

Calcul de K par Matlab

$M_c = ctrb(A, B);$

$R = rong(M_c);$

$K = place(A, B, \lambda);$ % λ vecteur colonne contiennent les valeurs propres désirés.