

تصحيح الفرض القصير 1

السؤال الأول (09): احسب التكامل

$$\iint_D (x + y) dx dy \text{ حيث } D \text{ الحيز المحصور بين المحورين و المستقيم ذي المعادلة } x + y = 3$$

الاجابة:

$$2.5 \dots \dots \dots D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3 - x\}$$

و بالتالي:

$$3 \dots \dots \dots \iint_D (x + y) dx dy = \int_0^3 \left[\int_0^{3-x} (x + y) dy \right] dx = \int_0^3 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{3-x} dx$$

$$1.5 \dots \dots \dots = \int_0^3 \left(x(3-x) + \frac{(3-x)^2}{2} \right) dx = \int_0^3 \left(3x - x^2 + \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2} \right) dx$$

$$2 \dots \dots \dots = \frac{1}{2} \int_0^3 (9 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9$$

السؤال الثاني (11): باستخدام الاحداثيات الكروية احسب التكامل الثلاثي التالي:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\} \text{ علما أن } \iiint_V x dx dy dz$$

الاجابة:

1..... الاحداثيات الكروية هي $x = r \cos \theta \sin \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \varphi$ 1.... $dx dy dz = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ حيث2..... $V' = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}$ ومنه

و بالتالي:

$$2 \dots \dots \dots \iiint_V x dx dy dz = \iiint_{V'} r \cos \theta \sin \varphi r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$$

$$3 \dots \dots \dots = \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^3 r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = [\sin \theta]_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi$$

$$2 \dots \dots \dots = \frac{3^4}{8} \times \left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3^4 \pi}{16}$$