Chapitre 3 :

Filtrage des signaux déterministes à temps continu

I . Introduction

En électronique, on a besoin de traiter des signaux provenant de différentes sources (capteurs de température, signaux audio…).

Un bruit indésirable provenant soit du canal de transmission, soit des composants qui constituent le circuit électronique, peut se superpose à ces signaux.

II. La fonction filtrage

Le filtrage d'un signal électrique est l'opération qui consiste à séparer les composantes spectrales de ce signal selon leurs fréquences.

Exemple :

L'antenne d'un récepteur radio simple capte plusieurs signaux provenant de différents émetteurs.

Le signal d'entrée est constitué de la somme de plusieurs signaux émis et seule l'utilisation d'un filtre passe-bande permet de récupérer le signal correspondant à la station choisie.

On peut conclure qu'un filtre est un circuit qui apporte une modification de l'amplitude et (ou) de la phase des composantes spectrales d'un signal, donc c'est un sélecteur de fréquence et de fréquence et la bande de fréquence transmise s'appelle la bande passante du filtre.

On classe les filtres en deux grandes familles :

- Les **filtres analogiques** réalisés à partir de composants passifs (résistance, inductance, condensateur) ou actifs.
- Les **filtres numériques** réalisés à partir de structure intégrée micro programmable.

III. Filtre analogique

III .1. Filtre idéal

Un filtre idéal transmet sans déformation tout signal dont la fréquence appartient à la bande passante.

On peut classer les filtres en quatre catégories selon les fréquences favorise et atténués.

III .1.1. Filtre passe-bas

Permet le passage de des fréquences inférieurs à une limite appelée fréquence de coupure f_c ,cette fréquence est définie comme la fréquence pour laquelle l'amplitude du signal est atténuée de -3 db.

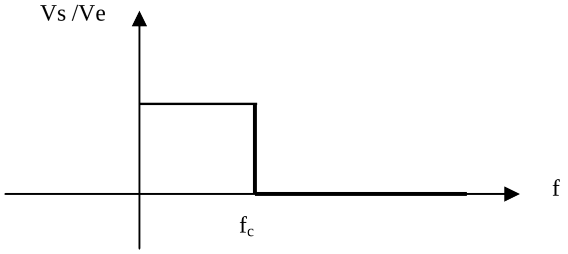

Figure (3. 1) : Gabarit du filtre passe-bas.

III .1.2. Filtre passe-haut

Permet le passage des fréquences supérieures à la fréquence de coupure f_c .

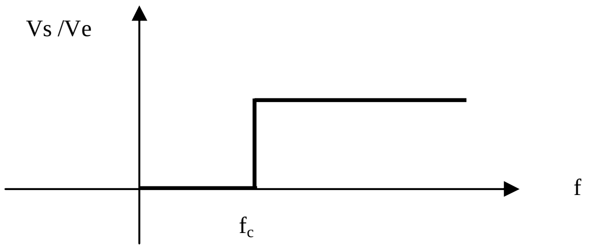

Figure (3. 2) : Gabarit du filtre passe-haut.

III .1.3. Filtre passe-bande

Permet le passage d'un signal de fréquence comprise entre une fréquence de coupure basse notée f_{cB} et une fréquence de coupure haute notée f_{CH} .

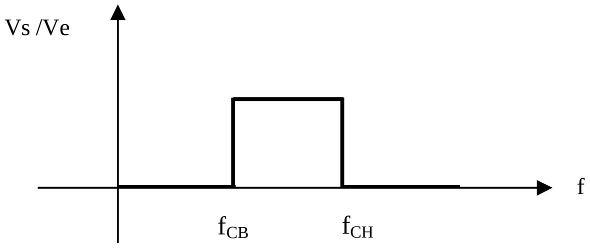

Figure (3.3) : Gabarit du filtre passe-bande.

III .1.4. Filtre coupe-bande

On dit aussi réjecteur de bande .c'est un filtre qui permet le passage de tous les fréquences sauf celle comprises à l'intérieur de l'intervalle [f_{CB} , f_{CH}]

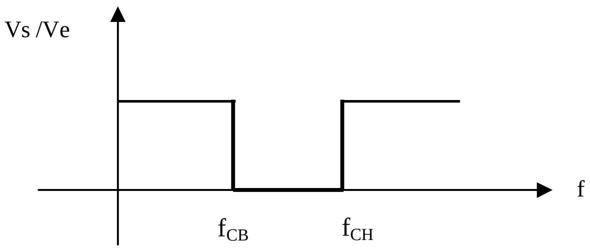

Figure (3. 4) : Gabarit du filtre coupe-bande.

IV. Fonction de transfert

Le comportement d'un filtre est défini par l'étude fréquentielle de la fonction de transfert entre la tension de sortie et la tension d'entrée du filtre. On le caractérise par l'amplification et le déphasage qu'il apporte sur les différents harmoniques du signal d'entrée.

Figure (3. 5) : Représentation de l' entrée et la sortie d'un filtre .

IV.1. Fonction de transfert d'un filtre passe-bas de premier ordre :

La fonction de transfert d'un filtre passe –bas de premier ordre :

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \quad = H(j\omega) = \frac{k}{1+Tp} = \frac{k}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}}$$

Module : $|H(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$

Phase : φ = arg (H(jω))= - arctg (ωT)

IV.2. Fonction de transfert d'un filtre passe-haut de premier ordre :

La fonction de transfert d'un filtre passe –bas de premier ordre :

$$\boxed{H(p) = H(j\omega) = \frac{k}{1-Tp} = \frac{k}{1-j\dfrac{\omega_0}{\omega}}}$$

IV. 3. Fonction de transfert d'un filtre passe-bande de second ordre :

La fonction de transfert d'un filtre passe-bande de second ordre est :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + 2.m\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

avec ω_0 **: la pulsation propre** ;

m **: Coefficient d'amortissement ;**

K : Gain statique.

IV.4. Exemple d'application :

Exemple 1 :

Soit le circuit RC de la figure ci-dessous :

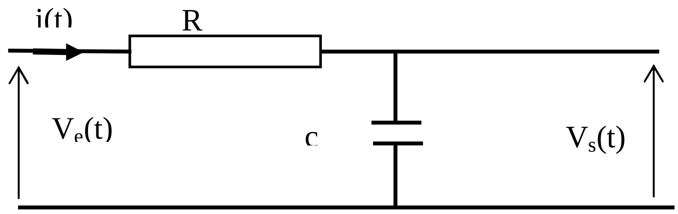

Figure (3.6) : Filtre RC.

a- Déterminer la fonction de transfert de ce montage.
b- Déduire la nature de ce filtre.
c- Déterminer $v_s(t)$ pour un signal d'entré $v_e(t) = 2 + \cos(2\pi f_1.t) + \cos(2\pi f_2.t)$.
d- On donne : $f_1 = 2khz$, $f_2 = 5khz$ et la fréquence de coupure de ce filtre $f_c = 3.14khz$.

Réponse :

a-

L'équation de maille donne : $v_e(t) = Ri(t) + v_s(t)$

De plus, pour le condensateur C, on a : $i = C\frac{dv_s}{dt}$.

On en tire : $RC\frac{dv_s}{dt} + v_s = v_e$.

La transformée de Laplace de cette expression en supposant que le condensateur est initialement déchargé à t = 0 :

$$RCpV_s(p) + V_s(p) = V_e(p)$$

La fonction de transfert de ce montage est : $F(p) = \frac{Vs(p)}{Ve(p)}$

$$F(p) = \frac{Vs(p)}{RCpV_s\ (p) + V_s\ (p)} = \frac{Vs(p)}{(RCp+1)Vs(p)} = \frac{1}{(RCp+1)}$$

D'où $$\boldsymbol{F(p) = \frac{1}{RCp+1}}$$

b-

$$\mathrm{F(p) = F(j\omega)} = \frac{1}{RCJ\omega + 1} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$\Rightarrow$ C'est l'équation d'un filtre passe- bas de premier ordre.

c-

On a $v_e(t) = 2 + \cos(2\pi f_1.t) + \cos(2\pi f_2.t)$

$2 = 2.\cos(2\pi(0).t)$; $f_1 = 2$ Khz $< f_c = 3.14$khz et $f_2 = 5$ Khz $> f_c = 3.14$khz .

D'où **$v_s(t) = 2 + \cos(2\pi f_1.t)$**

Exemple 2 :
Soit le circuit RC de la figure ci-dessous :

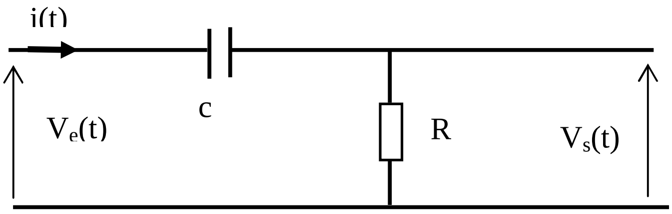

Figure (3.7) : Filtre RC.

a- Déterminer la fonction de transfert de ce montage.
b- Déduire la nature de ce filtre.

Réponse :

L'équation de maille donne :

$$v_e(t) - Ri(t) - v_C(t) = 0 \quad \xrightarrow{TL} \quad V_e(p) - RI(p) - V_c(p) = 0$$

De plus, pour le condensateur C, on a : $i(t) = C\ \frac{dv_C\ (t)}{dt}$

Or on sait que : $L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = p.L[f(t)] = p.F(p) \quad \xrightarrow{TL} \quad I = C.p\,V_C$

D'où $V_e - \frac{1}{Cp}I - RI = 0 \quad \Longrightarrow \quad V_e = (\frac{1}{Cp} + R)I$

Or $H(p) = \frac{V_S}{V_e} = \frac{R}{\frac{1}{cp}+R} = \frac{1}{1+\frac{1}{RCp}}$

Donc $H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{RCj\omega}} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

$\Longrightarrow$ C'est l'équation d'un filtre passe- haut de premier ordre.

V. *Notions de linéarité, stationnarité, causalité et stabilité des filtres*

Il existe plusieurs types de systèmes qui peuvent être classés selon leur représentation, leurs réponses, et leurs comportements. Chaque classe de système possède ses propres outils d'étude, d'analyse et de synthèse.

A titre d'exemple :

Les systèmes linéaires, les systèmes continus, les systèmes échantillonnés(ou discrets).

V. 1. Linéarité

Un système est **linéaire** s'il possède la propriété suivante :
Si $s_1(t)$ est la sortie obtenue en appliquant $e_1(t)$ et $s_2(t)$ est la sortie obtenue en appliquant l'entrée $e_2(t)$, alors pour tout α réel et pour tout β réel, en appliquant l'entrée : $\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)$, le système génère la sortie : $\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$.

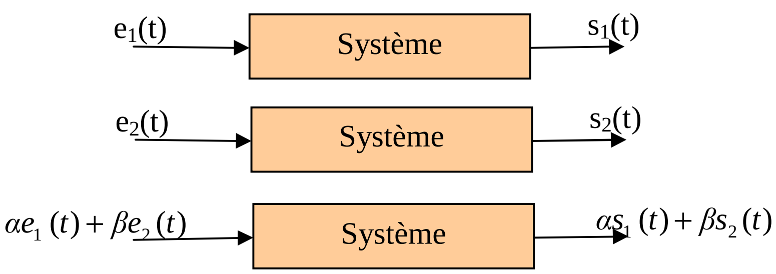

Figure (3. 8) : Système linéaire.

Cette propriété des systèmes linéaires est aussi appelée **principe de superposition**.

V. 2. Stationnarité

La stationnarité est l'invariance dans le temps.
On dit qu'un système est invariant lorsque les caractéristiques de comportement ne se modifient pas dans le temps.
La réponse du système à un signal $e(t)$ différé d'un temps T est la même que la réponse $s\ (t)$ du système mais différée de T.

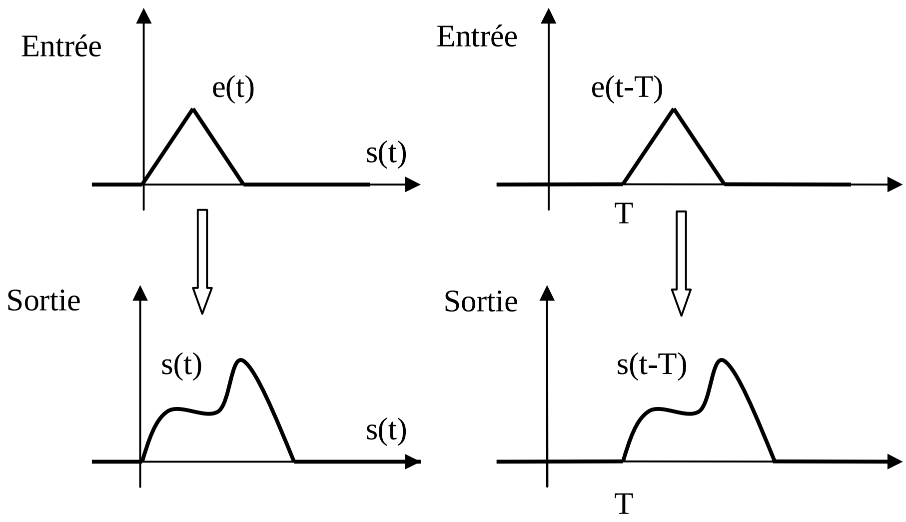

Figure (3.9) : Système invariant.

Si les coefficients de l'équation différentielle reliant l'entrée à la sortie sont constants alors le système est stationnaire.

V. 3. Causalité :

Pour tout système causal, la cause précède la conséquence, donc l'entrée précède toujours la sortie.
Si le système est causal alors la réponse impulsionnelle est égale à zéro si t<0

V.4. Stabilité :

Un système est stable si pour toutes les entrées bornées, les sorties sont bornées, excité par une impulsion de Dirac, le système partant de l'état de repos revient à sa position initiale après un certain temps.