وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمة لخضر الوادي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

مطبوعة موجهة لطلبة سنة أولى (LMD) جذع مشترك بعنوان:

محاضرات احصاء 2

من إعداد:

د. خلف منى

الموسم الجامعي:2022/2021

فهرس المحتــويات

مقدمة

يعتبرً علم الاحتمالات من أهم علوم الإحصاء وذلك لأن معظم النظريات والطرقً الإحصائية بنيت من الأساس عليه. فتعتبرً نظرية الاحتمالات الخلفية الرياضية للطرقً الإحصائية لأنها همزة وصل بين الإحصاء الوصفي الذي يعالج مباشرة السلاسل والبيانات والتحليل الإحصائي الذي يعتبرً المعالم الإحصائية كمؤشرات غيرً مباشرة لقيم حقيقية مقاسه بالمعاينة. وعليه، فنظرية الاحتمالات هي ذلك الفرع من الرياضيات الذي يهتم بدراسة ظواهرً العشوائية وحالات عدم التأكد وًالذي يلعب دورا أساسيا في مسائل المعاينة التقديرً والتنبؤ.

ولعلم الاحتمالات أثرً كبيرً على حياتنا اليومية وذلك لان كثيرً من القرارات التي تتخذ تبنى على توقعات مختلفة لحدوث بعض الأشياء أوً عدم حدوثها فهوً مقياس لحالة عدم اليقين لحدوث حدث معين حيث يرتبط حساب الاحتمالات بالتجارب العشوائية والحوادث والمتغيرات العشوائية وقد ثبت توافق الاحتمالات في مجابهة المواقف المتعددة في مجالات الفيزياء النووية وفي الاقتصاد التطبيقي وفي مجالات التخطيط ونظرية الألعاب والإدارة. كما ثبت أن احتمالات الأحداث المرتبط بتجربة مفروضة ذات وجود موضوعي مستقل عن الأفراد، وأن على الباحث اكتشاف احتمال حدث بالتجريب.

وقد تم تقسيم محتوى المطبوعة إلى ثلاث فصول، حيث خصص الفصل الأول لمفهوم الاحتمال وقوانينه وكيفية حسابه، فيما خصص الفصل الثاني لدراسة المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية، أين يشكل هذا الفصل نقطة الانطلاق لدراسة مختلف المتغيرات التي تمت صياغتها في صور رياضية من طرف بعض الإحصائيين.

أما في الفصل الثالث فقد تم التطرق إلى أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية، كما يحتوي كل فصل على سلسلة تمارين ليختبر الطالب مدى استيعابه لأهم المفاهيم الواردة في كل فصل .

لنختم هذه المطبوعة بمجموعة من مواضيع الامتحانات السابقة والتي أجريت بكلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير بمختلف الجامعات الجزائرية.

مدخل للاحتمالات

تعد نظرية الاحتمالات من النظريات المهمة والتي اتسع نطاق استخدامها في المجالات الادارية والاقتصادية والمالية بشكل خاص بعد ظهور دراسات ونظريات تعتمد بصورة أساسية على نظرية الاحتمالات، ومنها دراسات الاستثمار و نظريات التمويل ومواضيع المخاطرة والتي تهتم بترجيح حدوث حالة على حالة أخر، وفي ظل ظروف عدم التأكد يلعب الاحتمال دورا جوهريا في الاستنتاج والتنبؤ واتخاذ القرار. لذا علينا التطرق اولا إلى طرق العد والتي تشمل التحليل التوفيقي ،ومن ثم التعرف على أهم المفاهيم الأساسية للاحتمال.

1. طرق التحليل التوفيقي

يتضمن التحليل التوفيقي مجموعة من الطرق التي تسمح بتحديد عدد النتائج الممكنة لتجربة معينة .يمكن تعريفه بأنه" مجموعة من تقنيات العدّ التي يمكن أن تكون مفيدة ف حساب الاحتمالات عندما يكون من اللازم تحديد عدد النتائج الملائمة لحدث معين.

1.1. الترتيبات*(Les Arrangements)*

- نسُتعمل في الترتيبة بعض عناصر المجموعةn فقط زمز لها ب A_n^r
- ترتيب عناصرها مهم، أي أن الترتيبة $(1,2)$ليست الترتيبة ($(2,1)$

وعليه فهي نوعان حسب إمكانية تكرار العناصر:

1.1.1. **الترتيبات مع التكرار** :ترتيب n من العناصر مأخوذة r ف كل مرة- مع إمكانية تكرار العناصر-هو قائمة من rمن العناصر المختلفة أو المتكررة، مأخوذة منn عنصرا، أين يمكن لكل عنصر أن يتكرر حتىr مرة. و تحسب وفق القانون الآتي $A_{n=}^r n^r$:

<u>مثال:</u> بكم طريقة يمكن تكوين كلمة سر مكونة من أربعة أرقام مع امكانية تكرار الرقم؟

لدينا n=10, r=4 و بالتالي طريقة $A_{n=}^r n^r =10^4=100000$

1.1.2. **الترتيبات بدون التكرار**: ترتيب n من العناصر مأخوذة r في كل مرة -دون تكرار العناصر-هو قائمة من r من العناصر المختلفة، مأخوذة من n عنصرا، حيث لا يمكن لأي عنصر أن يظهر إلا مرة واحدة ويحسب وفق القانون التالي : $A_{n=}^r \frac{n!}{(n-r)!)}$

مثال: ماهي عدد الطرق الممكنة لاختيار ثلاثة مراكز وظيفية: رئيس فريق عمل، نائب مساعد اول، نائب مساعد ثان. وقد تقدم أربعة أشخاص لتولي هذه المناصب ولديهم نفس الكفاءة.

الحل: نستخدم ترتيبة بدون تكرا $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-3)!} =$ وبالتالي عدد الطرق الممكنة هي: 24 طريقة

1.2. التبد يلات(Les Permutations)

وفيها يتم اختيار الكل *n* من الكل *n* ، يرمز لها بالرمز P_n^n، وتتمتع بنفس خصائص الترتيبة، بحيث التبديلة هي مجموعة من الترتيبات بحيث جميع العناصر *n* ت سُتعمل ف التبديل بينها *.موضحة كالتالي:

1.2.1. **التبديلات الخطية** ل ***n*** من العناصر المختلفة فيما بينها: وتعرف بالتبديلة بدون تكرار وتحسب كالتالي: $P_n^n = n!$

مثال: ماهي عدد الامكانات المتاحة لجلوس أربعة أشخاص في الصف الاول للسنيما؟

الحل: نستخدم تبديلة بدون تكرار $P_4^4 = 4\,! = 24$

وعليه عدد الامكانات المتاحة للجلوس هي 24 امكانية

1.2.2. **التبديلات الخطية ل *n* من العناصر المتماثلة فيما بينها:** وتعرف بالتبديلة بالتكرار وتحسب كالتالي

$$P_n^n = n^n$$

1.2.3. **التبديلة الخطية ل *n* من العناصر، مع وجود مجموعات جزئية *n* من العناصر المتكررة:**

وهي ما تعرف التبديلة بالتكرار الخاص وبتطبيق العلاقة التالية: $= \frac{n\,!}{r1\,!r2\,!....rk\,!}$ $P_n^{r1\,r2.....rk}$

مثال: ماهي عدد الكلمات التي يمكن ترتيبها من كلمة STATISTICS لدينا n=10

و $r_1 = 3$ تمثل عدد مرات تكرار الحرف S

$r_2 = 3$ تمثل عدد مرات تكرار الحرفT

$r_1 = 2$ تمثل عدد مرات تكرار الحرفI

$$P_n^{r1\,r2\,r3} = \frac{10!}{3!\,3!\,2!} = 50400$$

1.2.4. التبديلات الدائرية ل ***n*** من العناصر المختلفة فيما بينها: وفق العلاقة

$$P_n^n = (n-1)!$$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب سبعة أشخاص حول طاولة مستديرة؟

الحل: نستخدم التبديلة الدائرية $P_7^7 = !\,(7-1)$ =720

وبالتالي يمكن الجلوس حول طاولة مستديرة 720 طريقة

1.3. التوفيقات *(Les Combinaisons)*

التوفيقة هي" سحب "ل *r*عنصرا مختارة من بين *n* عنصرا، حيث لا أهمية للترتيب بينها .أي أن اختيار *r* عنصرا من بين *n* عنصرا– دون مراعاة للترتيب فيما بينها-هو توفيقة ل *n* عنصرا مأخوذةً *r* ف كل مرة .يرمز للتوفيقة بالرمز C_n^r . تتميز التوفيقات بالخصائص الآتية:

- في اختيار التوفيقة تستعمل بعض العناصر *n* فقط.
- ترتيب عناصرها غير مهم، أي أن التوفيقة $(1,2)$ هي نفسها التوفيقة $(2,1)$

وعليه فالتوفيقات نوعان من حيث إمكانيةُ التكرار:

1.3.1. **التوفيقات بدون تكرا ر :** هي" سحب "ل *r* عنصرا مختارة من بين *n* عنصرا، حيث لا يمكن للعناصر أن تتكرر، ولا أهمية للترتيب بينها .وتحسب كما يلي:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

مثال: يتم اختيار بالقرعة 3 طلبة من بين طلبة فوج لحضور اجتماع مع رئيس القسم. ما هو عدد الحالات الممكنة إذا كان عدد الطلبة الفوج 20 طالبا؟

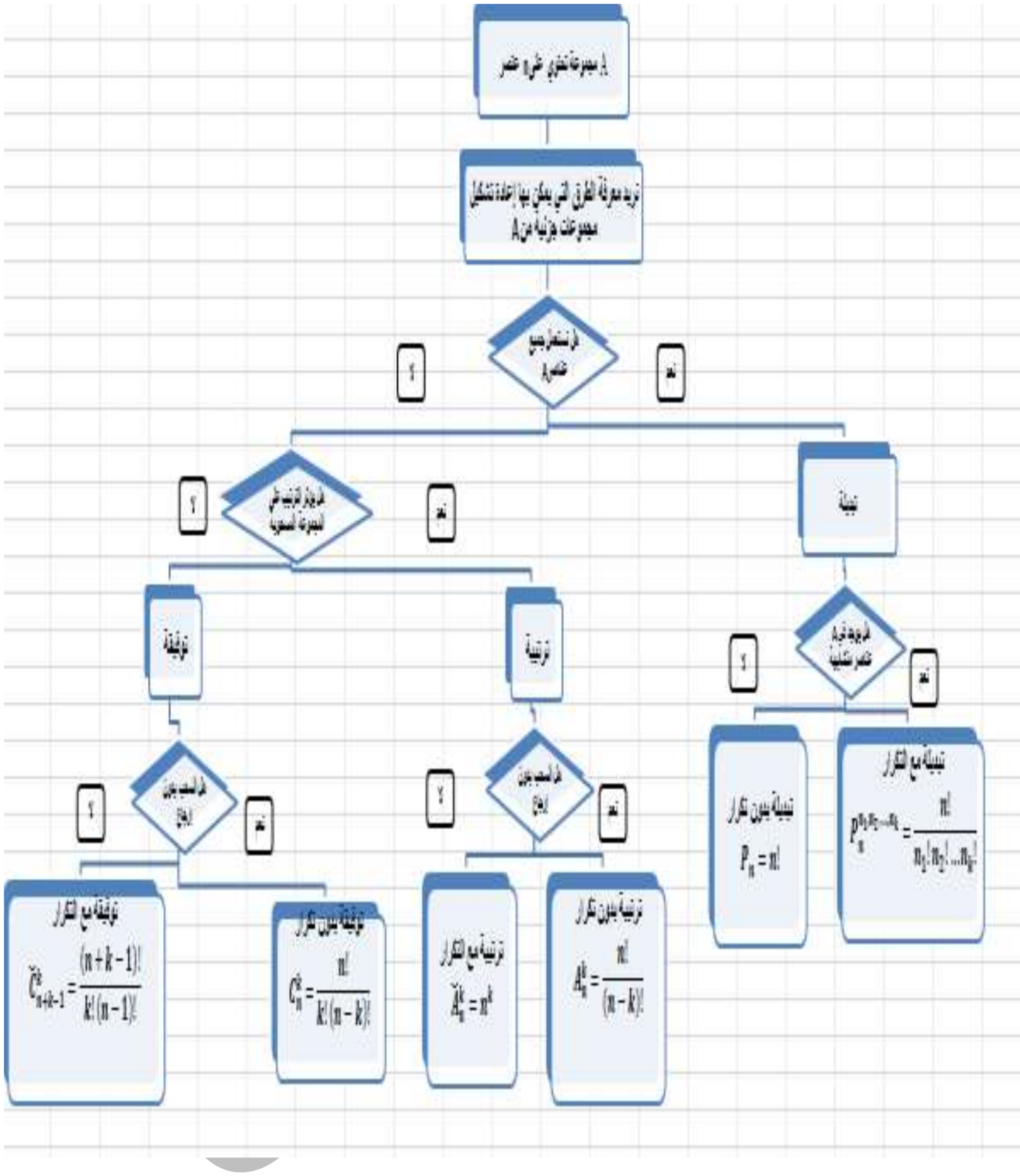
الترتيب غير مهم؛ جزء من الكل؛ وبدون تكرار، من خلال توفر الشروط الثلاثة سوف نستخدم التوفيقة بدون تكرار

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!\,(20-3)!} = 1140$$

1.3.2. **التوفيقات مع التكرار**: هي" سحب "ل *r* عنصرا، حيث يمك ن للعناصر أن تتكرر من بين ر *n* عنصرا مختارة(.أي أن السحب هنا يكون مع الإرجاع)، ولا أهمية للترتيب بينها .وتحسب كما يلي :

$$C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

والرسم التخطيطي التالي يوضح شروط استخدام كل طريقة من طرق التحليل التوفيقي



2. مفاهيم أساسية حول الاحتمال

اكتسبت النظرية الرياضية للاحتمالات أهمية تطبيقية واضحة ومدلولا مرتبطا بالتجارب العملية والممكنة، لذا يجب علينا أولا ايضاح أهم المهمة لمفردات مرافقة لدراسة مفهوم الاحتمال ومنها مبدا التجربة والحدث ونظرية المجموعات وغيرها سيتم توضيحها فيما يلي:.

2.1. مفهوم التجربة، الحدث والاحتمال

2.1.1. التجربة

لشرح مفهوم التجربة **Epreuve** و تمييزها عن الحدث يمكن القول أن التجربة هي أم الحدث أو أم النتيجة. لأن التجربة تتفرع بالضرورة إلى أحداث. أي انها العملية التي نحصل منها على النتائج أو البيانات أو المشاهدات. وكمثال على ذلك فالتجربة هي الحرب بينما الهزيمة هي نتيجة ممكنة للحرب، و التجربة قد تقبل نتيجتين أو أكثر.

2.1.2. فضاء العينة

فضاء العينة للتجربة العشوائية هي المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة للتجربة، ونرمز لفضاء العينة بالرمز .Ω. نسمي كل نتيجة من نتائج التجربة العشوائية عنصرelement في فضاء العينة أو نقطة العينة.

<u>أمثلة</u>:

- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة من النقود مرة واحدة وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي هي$\Omega =\{ T, H \}$ ، حيثH تمثل ظهور الكتابة وT تمثل ظهور الصورة
- فضاء العينة لتحربة رمي حجر نرد مرة واحدة $\Omega=\{ 1, 2,3,4,5,6 \}$

2.1.3. ا الحدث

الحدث العشوائي Evénement هو <u>واقعة</u> أو <u>نتيجة ما</u>، كما يعرف بالإمكانية فهي حدث أو نتيجة ما من بين أحداث أو نتائج أخرى. ويرمز للحدث عادة بحروف لاتينية كبيرة: A , B C....... أو A_1 , A_2....

- **<u>الحدث البسيط:</u>** يكون الحدث بسيط إذا كان مؤلفا من مشاهدة واحدة أو نتيجة واحدة فقط، وبعبارة اخرى لا يمكن تجزئة الحدث البسيط الى اكثر من حدث.
- **<u>الحدث المركب :</u>** يعتبر الحدث مركبا اذا كان مؤلفا من أكثر من مشاهدة او نتيجة، أي يمكن تجزئته إلى أكثر من حدث بسيط.

- **الحوادث المتنافية:** نقول عن حادثان أنهما متنافين إذا كاف ظهور أحدهما يمنع او يحجب من ظهور الحادث الآخر، وىو يعني استحالة تحققهما في آن واحد، فمثلا نجاح الطالب ورسوبه هما حادثان متنافين؛
- **الحوادث المستقلة:** نقول عن حادثان أنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر ولا يتأثر بقوع الحادث الثاني، فمثلا عند رمي حجر النرد مرتان فإن الرقم الذي يظهر عند الرمية ليس لو علاقة بالرمية الثانية، لكن مثلا عند سحب مصباحان كهربائيا عشوائيا من صندوق يحتوي على أربعة مصابيح صالحة ومصباح غير صالح حيث يكون السحب على التوالي دون إرجاع، حيث نسحب المصباح الاول **ولا نقوم بإرجاعه** ثم نسحب المصباح الثاني في هذه الحالة نجد أن المصباح الثاني يتأثر بالمصباح الاول ، فإذا ظهر في عملية السحب الأول أن المصباح غيرصالح، فالمصباح الثاني حتما سيكوف صالح، وفي هذه الحالة نسمي الحادث الأخير حادث شرطي لأنه مرتبط بتحقق الحادث الاول.

2.1.4. الاحتمال

عرف بليز باسكال (Blaise Pascal) الاحتمال probabilité بالشكل التالي:"احتمال حدث هو عدد الحالات الملائمة لوقوع الحدث مقسوما على عدد الحالات الممكنة، إذا اقترضنا أن كل الحالات لها نفس الاحتمال في الوقوع." فالاحتمال في مفهوم العلم هو عدد يقيس حظوظ وقوع شيء ما نسميه نتيجة أو حدث أو إمكانية وهو عدد بين 0 و1 يعبر عن حظوظ وقوع الحدث .حيث أننا نستخدم الكسور في سلم تصاعدي من 0 إلى1، بحيث يرمز 0 للاستحالة و1 للتأكد. ومثال على ذلك نستعمل 100% للحدث المؤكد أو 50% للحدث المحتمل و1‰% مثلا للحدث المستبعد

مثال: ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي عند رمي قطعة نرد ؟ بين كل من التجربة، الحدث والاحتمال في هذا المثال.

الجواب: هناك ثلاث حالات ملائمة للحصول على عدد زوجي (2، 4 و6). أما العدد الكلي للحالات الممكنة فهو 6: (1، 2، 3، 4، 5، 6). وبافتراض أن كل الحالات الممكنة لها نفس الاحتمال فإن احتمال الحصول على عدد زوجي هو $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

2.2. الترميز الرياضي للاحتمالات

2.2.1. استخدام نظرية المجموعات للتعبير عن الأحداث العشوائية

- نعبر عن النتائج الممكنة لتجربة ما ب Ω، وتسمى المجموعة الكلية أو فضاء العينة.
- نعبر عن الحدث بمجوعة جزئية A من فضاء العينة، حيث A هي مجموعة من النتائج الممكنة للتجربة.
- إذا انتهت التجربة بنتيجة تمثل عنصرا من A نقول أن الحدث A قد تحقق.
- الحدث الذي يحتوي على نقطة أو عنصر واحد من Ω يسمى عادة حدث بسيط.
- من بين الأحداث الممكنة في تجربة ما أيا كانت، الحدث Φ يمثل الحدث المستحيل لأنه لا يمكن أن يتحقق عنصر منها. $P(\Phi) = 0$.
- من بين الأحداث الممكنة في تجربة ما أيا كانت، حدث المجموعة الأساسية Ω نفسها، وهو الحدث الأكيد لأنه لابد أن يتحقق أحد عناصرها على الأقل. $P(\Omega) = 1$
- بتطبيق عمليات مثل الإتحاد والتقاطع، الطرح، الجمع.... على المجموعات نحصل على مجموعات جديدة جزئية من Ω ومن ثم أحداث جديدة في Ω. من ذلك :
  - $A \cup B$ هو الحدث: إما A أو B أو كلاهما.
  - $A \cap B$ هو الحدث: A و B في وقت معا.
  - C_A هو الحدث المعاكس ل A.
  - $A - B$ هو الحدث: A لكن ليس B.
- إذا كان $A \cap B = \Phi$ نقول أن A و B متنافيان (أو غير متلائمان) أي لا يمكن وقوعهما معا

ملاحظة : إن عدد عناصر Ω أو عناصر المجموعة A أو أي مجموعة أخرى يدعى ب "أصلي المجموعة :"، ونرمزله بالرمز $\text{card}(A)$ "

<u>مثال:</u> لتكن لدينا تجربة هي إلقاء حجر نرد. أكتب مجموعة فضاء العينة ثم عبر رياضيا عن الأحداث التالية:

الحصول على العدد 6،الحصول على عدد زوجي، الحصول على عدد غير زوجي فردي، الحصول على عدد أولي، الحصول على عدد أولي أو فردي، الحصول على عدد زوجي وأولي، الحصول على عدد زوجي وفردي، الحصول على عدد زوجي أو فردي

- فضاء العينة $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- الحدث A: الحصول على العدد 6 (حدث بسيط) $A= \{6\}$
- الحدث B: الحصول على عدد زوجي $B =\{2, 4, 6\}$
- الحدث C_B: الحصول على عدد غير زوجي فردي $\Omega - A = C_B=\{1, 3, 5\}$
- الحدث D: الحصول على عدد أولي $D =\{2, 3, 5\}$
- الحدث $B \cap D$: الحصول على عدد زوجي وأولي $B \cap D =\{2\}$
- الحدث $D \cup C_B$: الحصول على عدد أولي أو فردي $D \cup C_B=\{1 ,2, 3, 5\}$
- الحدث $B\cap C_B$: الحصول على عدد زوجي وفردي $B\cap C_B = \Phi$ نقول أن C_B و B متنافيان (أو غير متلائمان) أي لا يمكن وقوعهما معا
- الحدث $B \cup C_B$: الحصول على عدد زوجي أو فردي $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B \cup C_B$

2.3. القوانين الاساسية في حساب الاحتمالات

من أجل التوصل إلى تعبير دقيق و واضح لقواعد الحساب الاحتمالي نستخدم الترميز للقواعد الاساسية في حساب الاحتمالات حيث نعبر عن احتمال حدث ما بطريقة رياضية فنكتب $P(A)$

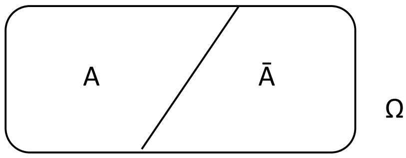
ونعبر عن احتمال وقوع الحدث : $X = x$ كما يلي: $P(X = x)$ أو $P(x)$.

<u>مثال:</u> احتمال الحدث: "الحصول على الوجه 5" عند إلقاء حجر نرد يكتب: $P(X = 5) = 1/6$ ، أو باختصار: $P(5) = 1/6$

و فيما يلي نذكر خمس قواعد أساسية في حساب الاحتمال كالتالي:

2.3.1. **<u>القاعدة رقم 1احتمال الحدث المعاكس</u>** : نعبر عن الحدث المعاكس ل A ب $\bar{A}$ أو 'A واحتماله هو احتمال عدم تحقق الحدث A،

ونكتب $\mathbf{P(\bar{A}) + P(A) = 1 \iff P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$



<u>مثال:</u>عند رمي حجر نرد، ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي، ماهو الحدث المعاكس وما هو احتماله؟

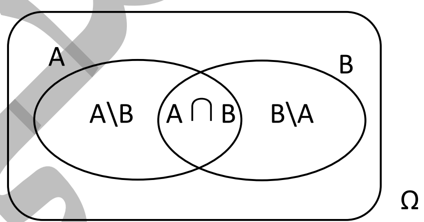
لنرمز للحدث A: الحصول على عدد زوجي $P(A) = P(2 \text{ ou } 4 \text{ ou } 6) = 3/6$

الحدث المعاكس هو الحصول على عدد غير زوجي، و احتماله: $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - (3/6) = 3/6$

2.3.2. **<u>قاعدة رقم 2احتمال وقوع الحدث "A" و"B"</u>** : يساوي احتمال وقوع الأول مضروبا في احتمال وقوع الثاني لما يكون الأول قد وقع فعلا $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) * P(B/A)}$

$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B/A) * P(C/(A \cap B))$

A,B, Cأحداث ما (مستقلة أو لا، متنافية أو لا)، P(A/B)يسمى الاحتمال الشرطي ل Bعلما أن A محقق. ومن المعادلة الأولى نحصل على $\mathbf{P(A) > 0}$ $\mathbf{P(B/A) = P(A \cap B) / P(A)}$



<u>مثال:</u> عند إلقاء حجر نرد أوجد احتمال الحصول على قيم فردية (حدثB)؟

- أوجد احتمال الحصول على نتيجة فردية إذا علمت أن الوجه المحصل لمكعب النرد عدد أولي (حدثA)؟

$P(B) = P(1 \text{ ou } 3 \text{ ou } 5) = P(1) + P(3) + P(5) = 3/6$

$P(B/A) = P(B \cap A)/P(A)$

$P(B \cap A) = P(3 \text{ ou } 5) = P(3) + P(5) = 1/6 + 1/6 = 2/6$

$P(B/A) = P(B\cap A)/P(A) = 2/6 \;/\; 3/6 = 2/3$

.2.3.3 <u>قاعدة رقم 3.احتمال وقوع الحدث "A" و"B" لما "A" و"B" مستقلان</u>

احتمال وقوع حدثان مستقلان يساوي جداء الاحتمالين أي احتمال الحدث الأول مضروبا في احتمال الحدث الثاني. $(P(B/A) = P(B))$ $\quad$ $P(A\cap B) = P(A) * P(B)$

وهو تعريف استقلال حدثين، أي أن وقوع B لا يتأثر بوقوع A أو عدم وقوعه نقول أن A وB مستقلان، $P(C/(A\cap B)) = P(C)$ $\quad$ $P(A\cap B\cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$

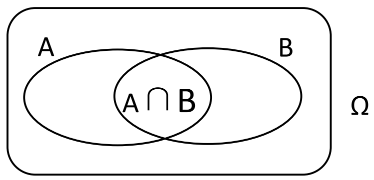
<u>**مثال:**</u> يفترض أن تصل طائرتان إلى مطار الوادي في وقت واحد من أجل إمكانية تبادل الركاب والبريد، إحدى الطائرتين تقلع من مطار الجزائر العاصمة و الأخرى من مطار سطيف، قدر احتمال تأخر الطائرة الأولى بـ 0,3، و احتمال تأخر الطائرة الثانية بـ 0,1، ولنفترض أن تأخر طائرة الجزائر العاصمة (A) مستقل عن تأخر طائرة سطيف (B). أحسب احتمال تأخر الطائرتين؟

<u>الحل:</u> احتمال تأخر الطائرتين **"A" و"B"** $\quad$ $P(A\cap B) = P(A) * P(B) = 0.3*0.1=0.03$

.2.3.4 <u>القاعدة رقم 4.احتمال وقوع حدث "A" أو"B"</u>

ـاحتمال وقوع حدث "A" أو "B"" يساوي جمع احتمالي الحدثين مطروحا منه احتمال تحققهما معا

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$



<u>**مثال:**</u> اذا كان احتمال اصابة الهدف من طرف اللاعب الاول هو 1/3،واحتمال ان يصيب اللاعب الثاني الهدف هو 1/4. والمطلوب ما هو احتمال اصابة الهدف من أحد اللاعبين؟

<u>**الحل:**</u> لحساب احتمال اصابة الهدف من أحد اللاعبين نطبق العلاقة التالية:

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

أولا: حساب احتمال اصابة الهدف من كلا اللاعبين **$P(A\cap B)$**

نرمز للحدث(A) اصابة الهدف من طرف اللاعب الاول $P(A)= 1/3$

نرمز للحدث(B) اصابة الهدف من طرف اللاعب الثاني $P(B)= 1/4$

$$P(A\cap B) = P(A) * P(B) \quad =(1/3) *(1/4)= 1/12$$

وعليه فان حساب احتمال اصابة الهدف من أحد اللاعبين نطبق العلاقة التالية:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)= (1/3)+(1/4) - (1/12)= (7/12)-(1/12)= 6/12= 1/2$$

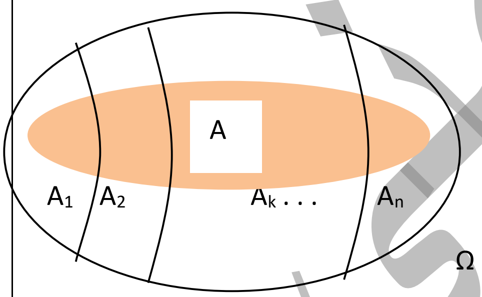
2.3.5. <u>لقاعدة رقم 5 احتمال احتمال وقوع الحدث (A) وعكسه($\bar{A}$) يساوي</u> <u>الصفر</u>، ونقول أن الحدثان متنافيان: $P(A\cap \bar{A}) = 0$

<u>مثال:</u> نرمي قطعة نقدية مرتين: إذ كان A هو الحدث "مرتين كتابة" و B "صورة على الأقل".

$A = \{PP\}$. $B = \{PF, FP, FF\}$ $A\cap B = \Phi$

3. الاحتمال الكلي ونظرية بايز

لتكن A_1،A_2،A_3... A_k، ...، A_n أحداث متنافية فيما بينها حيث اتحادها يشكل المجموعة الكلية (الأساسية) Ω، و A حدث ما يتحقق عن طريق واحد أو أكثر من الأحداث A_k، إذا علمنا أن A تحقق، نحسب احتمال تحققه عن طريق الحدث A_k كما يلي:



رسم 1 رسم يوضح نظرية بايز

$$P(A_k / A) = \frac{P(A_k)P(A/A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(A/A_k)} = \frac{P(A\cap A_k)}{P(A)}$$

تسمى هذه النظرية نظرية الاحتمال السببي لأنها تمكن من حساب احتمال أن يكون حدث ما (A_k) هو المسبب لوقوع حدث آخر (A).

تمرين:

في مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية توجد ثلاث آلات $M1$ ، $M2$ ، $M3$ ، تنتج في اليوم الواحد على التوالي 3000 مصباح،5000 مصباح، 2000 مصباح .من جهة أخرى فإن الآلة $M1$ لديها 5 %إنتاج معيب، الآلة $M2$لديها 2 %إنتاج معيب، الآلة $M3$لديها 5 %إنتاج معيب

- سحبنا مصباحا من الإنتاج اليومي للمصنع أوجد احتمال أن يكون هذا المصباح معيب؟ وفسر النتيجة؟
- بعد السحب واجراء عملية المراقبة على المصباح تأكدنا أنه فعلا معيب، ما هو احتمال أن يكون- :من انتاج الآلة $M1$ - ؟ من إنتاج الآلة $M2$ - ؟ من إنتاج الآلة$M3$ -

1- احتمال أن يكون هذا المصباح معيب

نسبة إنتاج الآلة $M1$ $P(M_1)=\frac{\mathrm{M1}}{\Omega}=\frac{3000}{10000}=0.3$

نسبة إنتاج الآلة $M2$ $P(M_2)=\frac{\mathrm{M1}}{\Omega}=\frac{5000}{10000}=0.5$

نسبة إنتاج الآلة $M3$ $(M_3)=\frac{\mathrm{M1}}{\Omega}=\frac{2000}{10000}=0.2$؟

نرمز للإنتاج المعيب ب $\bar{\mathrm{A}}$

$(\bar{\mathrm{A}})=[(M1\cap\bar{A})\cup(M2\cap\bar{A})]\,)\cup(M3\cap\bar{A})]$

$P(\bar{A})=P(M1)P(\bar{A}/M1)+P(M2)P(\bar{A}/M2)+P(M3)P(\bar{A}/M3)=0{,}035=35/1000$

$= (0{,}3)(0.05)+(0{,}5)(0{,}02)=0{,}025=25/1000$

تفسير النتيجة: من بين 1000 مصباح منتج بالمصنع نجد 35 مصباح معيب

2- **بعد السحب واجراء عملية المر اقبة على المصباح تأكدنا أنه فعلا معيب، إيجاد احتمال - - أن يكون من انتاج الآلة: $\mathrm{M_1}$ -**

$(M1/\bar{A})=P\frac{(\mathrm{M1}\cap\bar{\mathrm{A}})}{\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}})}=\frac{\mathrm{P(M1)P(\bar{A}/M1)}}{\mathrm{P(M1)P(\bar{A}/M1)+P(M2)P(\bar{A}/M2)+P(M3)P(\bar{A}/M3)}}=0{,}428$

تفسير النتيجة: من بين 1000 مصباح معيب بالمصنع نجد 428 مصباح معيب **من انتاج الآلة$\mathrm{M_1}$** -

- **أن يكون من انتاج الآلة$\mathrm{M_2}$**

$(M_2/\bar{A})=P\frac{(\mathrm{M2}\cap\bar{\mathrm{A}})}{\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}})}=\frac{\mathrm{P(M2)P(\bar{A}/M2)}}{\mathrm{P(M1)P(\bar{A}/M1)+P(M2)P(\bar{A}/M2)+P(M3)P(\bar{A}/M3)}}0.286$

تفسير النتيجة: من بين 1000 مصباح معيب بالمصنع نجد 286 مصباح معيب **من انتاج الآلة$\mathrm{M_2}$** .

- أن يكون من انتاج الآلة M_3

$$P(M3/\bar{A})=\frac{P(M1\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{P(M3)P(\bar{A}/M3)}{P(M1)P(\bar{A}/M1)+P(M2)P(\bar{A}/M2)+P(M3)P(\bar{A}/M3)}=0.286$$

تفسير النتيجة: من بين 1000 مصباح معيب بالمصنع نجد 286 مصباح معيب **من انتاج الآلة** M_3 .

سلسلة تمارين حول الاحتمالات

التمرين الأول:

1) يتكون فوج من 10 طلبة تم استدعاءهم إلى اجتماع،بكم طريقة يمكنهم الجلوس في صف به 10 مقاعد؟ و بكم طريقة يمكنهم الجلوس حول طاولة مستديرة؟.

2) بكم طريقة يمكن ترتيب الحروف الواردة في الكلمات: - FORMIDABLE MATHEMATIQUEMISSISSIPI

3) يتم اختيار بالقرعة 3 طلبة من بين طلبة فوج لحضور اجتماع مع رئيس القسم. ما هو عدد الحالات الممكنة إذا كان عدد الطلبة الفوج 20 طالبا؟

4) يتكون مجلس إداري من 20 فردا من بينهم 12 رجلا و08 نساء، نريد تشكيل لجنة من 05 أفراد على أن تكون هذه اللجنة مكونة من رجلين و امرأتين على الأقل. المطلوب حساب عدد الامكانيات أن:

- ✓ يكون كل عضو في المجلس الإداري يمكن أن يكون عضوا في اللجنة.
- ✓ رجلان رفضا الدخول ضمن اللجنة.
- ✓ السيد X والسيدةY رفضا أن يكونا ضمن اللجنة.

التمرين الثاني:

من أجل تلبية رغبات إحدى المستشفيات بكمية معينة من الدم، تم سحب وبطريقة عشوائية 5 أسماء من قائمة تحتوي على أسماء 20 شخص موزعين كما يلي: 12 لديهم الفصيلة Bو8 لديهم الفصائل الأخرى.

1) ما هو عدد القوائم المكونة من 5 أسماء التي يمكن تكوينها؟.
2) ما هو عدد القوائم المختلفة التي تحتوي على أشخاص كلهم من الفصيلةB؟.
3) ما هو احتمال الحصول على أشخاص كلهم من الفصيلة B ؟.
4) ما هو احتمال الحصول على شخص واحد من الفصيلة B ؟.

التمرين الثالث: نلقي قطعة نقدية متوازنة ثلاث مرات على التوالي، نسجل F عند ظهور الصورة و P عند ظهور كتابة.

1) أكتب المجموعة الأساسية لعدد الحالات الممكنة؟

2) عبر عن الأحداث التالية من خلال مجموعات جزئية من المجموعة الأساسية:

A: الحصول على صورتين فقط. B: الحصول على صورتين على الأقل.

3) عبر بمجموعات عن الأحداث التالية: $\bar{A}$,$\bar{B}$,$A \cap B$, $A \cup B$

4) أحسب الاحتمالات التالية:

$P(A \cup B), P(A \cap B), P(A)\ , P(\bar{A})\ , P(B), P(\bar{B})$

التمرين الرابع:

نلقي قطعة نقود وحجر نرد معا:

1) أكتب المجموعة الأساسية لعدد الحالات الممكنة (فضاء العينة Ω) ؟

2) عبر عن الأحداث التالية من خلال مجموعات جزئية من المجموعة الأساسية:

A: الحصول على صورة مع عدد زوجي.

B: الحصول على كتابة مع عدد فردي.

3) عبر عن الأحداث التالية: وقوع A أو B ، وقوع Aو B .

4) أحسب احتمال وقوع A أو B ، وقوع A و B.

التمرين الخامس:

فيما يلي التوزيع التكراري لعينة عشوائية حجمها 100 من خريجي كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير لجامعة الوادي، حسب التخصص ونوع المهنة:

المهنة التخصص	قطاع حكومي	قطاع خاص	عمل حر	$\sum$
ع التسيير	15	5	10	30
ع تجارية	8	17	10	35
ع اقتصادية	12	10	13	35
$\sum$	35	32	33	100

فإذا اختير أحد الخريجين بطريقة عشوائية، أحسب احتمال:

1) أن يكون من خريجي قسم العلوم الاقتصادية ويعمل بالقطاع الخاص.
2) أن يكون ممن يعملون بالقطاع الحكومي أو من خريجي قسم العلوم تجارية.
3) أن يكون من خريجي قسم العلوم تجارية أو من خريجي قسم العلوم الاقتصادية
4) إذا علم أن الفرد من خريجي قسم العلوم تجارية، فما احتمال أن يكون مما يعملون عملا حرا.

التمرين السادس:

في كلية العلوم الاقتصادية وجد أن نسبة النجاح في مادة الرياضيات هي 85% وفي مادة الإحصاء هي 75% كما وجد أن نسبة النجاح بالنسبة للمادتين 70%.

1) أحسب احتمال أن يكون طالب ما ناجحا في الإحصاء علما أنه ناجح في الرياضيات؟
2) أحسب احتمال أن يكون طالب ما ناجحا في الرياضيات علما أنه ناجح في الإحصاء؟
3) أحسب احتمال أن يكون طالب ما ناجحا في الإحصاء أو في الرياضيات أو في المادتين معا؟
4) أحسب احتمال أن يكون طالب راسب في كلا المادتين معا؟
5) أحسب احتمال أن يكون طالب ناجحا في إحدى المادتين و راسب في الأخرى؟

التمرين السابع:

يفترض أن تصل طائرتان إلى مطار الوادي في وقت واحد من أجل إمكانية تبادل الركاب والبريد، إحدى الطائرتين تقلع من مطار الجزائر العاصمة و الأخرى من مطار سطيف، قدر احتمال تأخر الطائرة الأولى بـ 0,3، و احتمال تأخر الطائرة الثانية بـ 0,1، ولنفترض أن تأخر طائرة الجزائر العاصمة (A) مستقل عن تأخر طائرة سطيف (B).

1) أحسب احتمال تأخر الطائرتين؟
2) أحسب احتمال أن تتأخر الطائرة الأولى وتصل الثانية في الوقت المحدد؟
3) أحسب احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في الوقت المحدد؟

التمرين الثامن:

ترغب شركة إعلامية في شراء حقوق البث التلفزيوني للألعاب الأولمبية، وترتبط حظوظها في الحصول على العقد بالمدينة التي ستحظى بتنظيم اللعاب. هناك ثلاث مدن متنافسة على احتضان الألعاب حظوظها كالتالي: المدينة (A): 0.4 المدينة(B): 0.3 ، المدينة(C) : 0.3.

- في حالة فوز المدينة (A) فاحتمال الحصول على الصفقة قدر بـ 0.2.
- في حالة فوز المدينة (B) فاحتمال الحصول على الصفقة قدر بـ 0.6.
- في حالة فوز المدينة (C) فاحتمال الحصول على الصفقة قدر بـ 0.5.

- أحسب احتمال حصول الشركة الإعلامية على حقوق البث التلفزيوني؟

التمرين التاسع:

في دراسة إحصائية لإحدى الدول تبين أنه في كل 1000 شركة صغيرة تعلن 10 منها الافلاس كل سنة، و في كل 1000 شركة كبيرة تعلن 02 الافلاس في كل سنة.

فإذا كان لدينا شركة أعلنت إفلاسها، أحسب احتمال ان تكون هذه الشركة صغيرة، علما ان احتمال ان تعلن شركة صغيرة بالإفلاس هو 0.7.

التمرين العاشر:

في إحدى المصانع المصابيح الكهربائية إذا كانت الآلات M_1 وM_2 و M_3 تصنع على الترتيب 0.30 و 0.30 و 0.40 من مجموع الإنتاج و إذا كان 1% و 3% و 2% من إنتاج الآلات إنتاج معيب، سحب مصباحا عشوائيا من إنتاج أحد الأيام:

1) أحسب احتمال أن يكون معيب؟
2) فإذا وجد أنه معيب فما هو:

- ✓ احتمال أن يكون من إنتاج الآلةM_1 ؟
- ✓ احتمال أن يكون من إنتاج الآلة M_2 ؟
- ✓ احتمال أن يكون من إنتاج الآلةM_3 ؟

المتغيرات العشوائية

تمهيد

من خلال التعرف على مفهوم الاحتمال سنتطرق في هذا الفصل إلى تحديد مفهوم المتغيرات العشوائية، نقول أن المتغير العشوائي هو النتيجة العددية لتجربة فهو بذلك التمثيل بمتغير عددي غير محدد مسبقا لمختلف الحوادث، و بالتالي يمكن أن ننسب لأي حادثة تصور لمتغير وتقرير وقوع الحدث أم لا بمقياس عددي ينسب لهذا المتغير. وتستخدم المتغيرات العشوائية لتمثيل الظواهرً المختلفة من أجل دراستها وتفسيرها والتوقع بشأنها.

1.مفهوم المتغيرة العشوائية المتقطعة

1.1. مفهوم المتغيرة العشوائية

هي قيمة متغيرة يلحق بقيمها احتمالات تحقق كل قيمة. يرمز للمتغيرة العشوائية بحرف لاتيني كبير X , Y , Z. ونميز بين المتغيرة العشوائية المتقطعة و المتغيرة العشوائية المتصلة أو المستمرة.

<u>مثال:</u> في تجربة إلقاء مكعب نرد يمكن أن نسمي الوجه الذي يستقر عليه المكعب متغيرة عشوائية X. القيم الممكنة لX هي: 1، 2، 3، 4، 5، 6. بكل قيمة يمكن أن نلحق احتمال تحققها، وهو هنا 1/6. ونكتب مثلا :

$P(X = 1) = f(1) = 1/6,\ P(X = 2) = f(2) = 1/6...,$

نلاحظ أن القيم الممكنة ل X (1، 2، 3، 4، 5، 6) هي متنافية، ولذلك فإن مجموع احتمالاتها يساوي 1.

$$\sum_{x=1}^{6} P(X = x) = 1$$

1.2. تعريف المتغيرة العشوائية المتقطعة

المتغيرة العشوائية المتقطعة أو المنفصلة، وهي التي تأخذ عددا منتهيا من القيم الممكنة في مجال مغلق و تكون هذه القيم منفصلة أو متقطعة، أي لا تقبل التجزئة أو الفاصلة وتكون منتمية إلى الأعداد الصحيحة، مثال: عدد أفراد الأسرة.

1.3. التوزيع الاحتمالي للمتغيرة المتقطعة

نرمز للمتغير عشوائي منقطع ب X وللقيم التي تأخذها المتغيرة بحرف $x_1\ x_2..........x_n$. يمكن أن يأخذ القيم التالية: هي مجموعة القيم الممكنة مع الاحتمالات المرتبطة بقيم المتغيرة. نعبر عن احتمال قيمة

معينة كما يلي $P(X = x)$ ونكتب أيضا : $f(x)$. وتسمى الدالة $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية. كما نمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير عشوائي منقطع X في الجدول التالي:

Σ	x_n	....	x_2	x_1	X
1	$P(X = x_n)$	....	$P(X = x_2)$	$P(X = x_1)$	$f(x)= P(X = x)$

مثال: التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية للمثال الأول (إلقاء مكعب نرد) يكتب كما يلي:

Σ	6	5	4	3	2	1	X
1	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	$P(X = x)$

مثال: التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية X حسب بيانات المثال 02

Σ	2	1	0	X
1	¼	½	1/4	f(x)

1.1.3. شروط دالة الكثافة للمتغيرة المتقطعة

نعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $P(X= x)$ ونكتب أيضا : $f(x)$ وتسمى الدالة $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية. لكي يمكن اعتبار دالة ما، أيا كانت دالة كثافة احتمالية يجب أن يتحقق شرطان اثنان:

$$1) \qquad f(x) \geq 0$$

$$2) \qquad \sum_x f(x) = 1$$

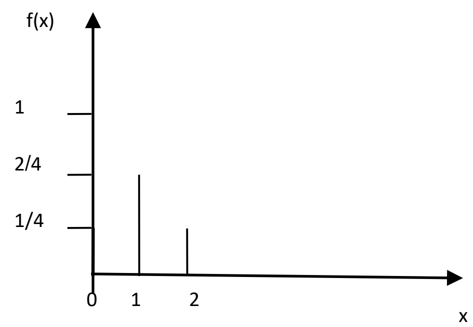
مثال: نأخذ دالة الكثافة ل X نتيجة لإلقاء حجر نرد: $0\leq 1/6 = f(6) ... = f(3) = f(2) = f(1)$

الشرط الأول محقق، والشرط الثاني أيضا لأن: $\Sigma f(x) = 1/6 + 1/6 + ... + 1/6 = 6(1/6) = 1$

2.1.3. التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المتقطعة

تمثل المتغيرة العشوائية المتقطعة ليس من خلال منحنى ولكن من خلال أعمدة متوازية على محور X.

مثال: نمثل بيانيا منحنيات دالة الكثافة ل X المعرفة على إلقاء قطعة نقدية مرتين.



الشكل رقم 01: يمثل لدالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المتقطعة

1.4. دالة التوزيع F(x) للمتغيرة العشوائية المتقطعة

تعرف دالة التوزيع - وتسمى أيضا "الدالة التجميعية" – كما يلي: **$F(x) = P(X \le x)$**

ويمكن استنتاج دالة التوزيع من دالة الكثافة الاحتمالية f(x) كما يلي:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{u \le x} f(u)$$

إذا كانت X تأخذ عددا منتهيا من القيم فإن F(x) يمكن تعريفها كما يلي:

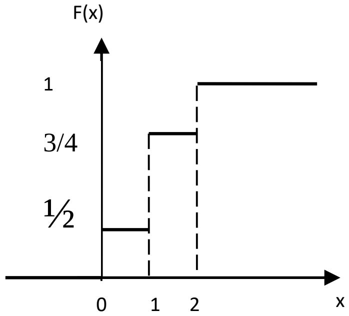
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & , \quad x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & , \quad x_2 \le x < x_3 \\ \cdots & \\ f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n), & \quad x_n \le x < +\infty \end{cases}$$

مثال: أوجد قيم F(x) للمثال السابق ومثله بيانيا

.

X	0	1	2
f(x)	¼	½	¼
F(x)=P(X≤x)	¼	¾	1

ملاحظة: تأخذ دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المتقطعة شكلا سلميا، وهي لا تكون متناقصة في أي مجال، وأكبر قيمة ممكنة لها هي 1.



الشكل رقم02 : يمثل لدالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المتقطعة

2. ـمفهوم المتغيرة العشوائية المستمرة

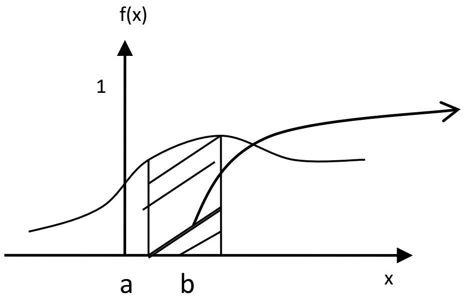
1.2. تعريف المتغيرة العشوائية المستمرة

هي متغيرة عشوائية تأخذ عددا لا متناهيا من القيم في مجال محدود، أو هي تأخذ أي قيمة داخل هذا المجال. من أجل هذا فأن وحدات قياس المتغيرة المستمرة تكون قابلة للتجزئة مثل الزمن، الوزن، المسافة، الحجم، ...

2.2. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر

هو مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي المستمر والاحتمالات الملحقة بها. نسمي توزيعا كهذا دالة الكثافة الاحتمالية أو دالة الاحتمال، وهي ممثلة بمنحنى متصل.

لاحظ أنه بما أن X تأخذ عددا لا متناهيا من القيم داخل أي مجال، فإن احتمال قيمة بعينها هو احتمال يؤول إلى الصفر. $P(X=x) \rightarrow 0$ لذلك فإن دالة الكثافة تستعمل لحساب احتمال مجال. ويكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى $f(x)$ بين حدود المجال.



$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

الشكل رقم 03 يمثل لدالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المستمرة

2.3. خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المستمرة

باستبدال إشارة التكامل بإشارة المجموع نجد أن شروط دالة:

$$1)\ f(x) \geq 0$$

$$2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المستمرة تكتب كما يلي :

من البديهي إذا أن منحنى دالة الكثافة لا يمكن أن ينزل أسفل محور المتغيرة العشوائية، كما أن المساحة الإجمالية بين المنحنى والمحور الأفقي تساوي الواحد. هذه الخصائص تفيدنا في حساب احتمالات بعض المجالات من خلال احتمالات مجالات أخرى.

<u>مثال :</u>إذا كانت المدة الزمنية التي يستغرقها الطالب في إتمام الامتحان(مدته القانونية ساعة واحدة)، عبارة عن، متغير عشوائي مستمرX ، دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + x; si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0; si\ non \end{cases}$$

المطلوب:

- تحقق من أنf (x) دالة كثافة احتمالية؟
- إذا اخترنا طالبا عشوائيا ما هو احتمال أن يكمل حل الامتحان في أقل من نصف ساعة؟

<u>الحل:</u>

1-التحقق من أن$f(x)$ دالة كثافة احتمالية:

وهو أن تكون دالة الكثافة موجبة، لأن مجال تعريف الدالة موجبة وهو[0 , 1] الشرط الأول محقق: أي أن:

$$f(x) \geq 0; si\ 0 \leq x \leq 1$$

سنتحقق الآن من الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0 + \int_{0}^{1} \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)dx + 0 = \frac{3}{2}\int_{0}^{1} x^2dx + \int_{0}^{1} x\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] + \left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ومنه $f(x)$ دالة كثافة احتمالية.

2- حساب احتمال ان يكمل الطالب حل التمرين في أقل من نصف ساعة:

$$P\left(X<\frac{1}{2}\right)=\int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}x^2+x\right)dx=\frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$P\left(X<\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\left[\frac{\frac{1}{8}}{3}-0\right]+\left[\frac{\frac{1}{4}}{2}-0\right]=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{24}\right]+\frac{1}{8}=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{1+2}{16}=\frac{3}{16}$$

$$P\left(X<\frac{1}{2}\right)=0.1875=18.75\%$$

أي أن احتمال ان تكون المدة الزمنية التي يستغرقها طالب تم اختياره عشوائيا في إكمال الامتحان أقل من نصف ساعة هي 0.1875 :، وهذا يشير إلى أن حوالي 19 طالب من بين 100 طالب يمكنهم أن يكملوا حل الامتحان في أقل من نصف ساعة.

2.4. دالة التوزيع F(x) للمتغيرة العشوائية المستمرة:

تعرف دالة التوزيع للمتغيرة المستمرة كما يلي:

$$\boxed{F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du}$$

<u>**مثال:**</u> ايجاد دالة التوزيع F (x) حيث دالة الكثافة الاحتمالية كانت كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{8} & 0\leq x\leq 4\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

- عندما يكون x <0 فإن:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,dx=0$$

- عندما يكون $0 \le x < 4$ فإن:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} (0)\, dx + \int_{0}^{x} \left(\frac{x}{8}\right) dx$$

$$= \left|\frac{x^2}{16}\right|_0^x = \frac{x^2}{16}$$

- عندما يكون $4 \le x < +\infty$ فإن:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{+\infty} f(x)\, dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} (0)dx + \int_{0}^{4} \left(\frac{x}{8}\right) dx + \int_{4}^{+\infty} (0)\, dx = \int_{0}^{4} \left(\frac{x}{8}\right) dx$$

$$= \left|\frac{x^2}{16}\right|_0^4 = \frac{1}{16}(4)^2 = 1$$

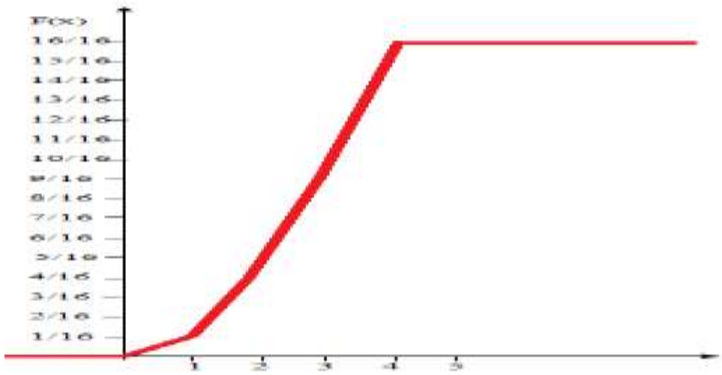
وعليه فإن $F(x)$ كالتالي

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{16} & 0 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

إن التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي مستمر يختلف عن التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي لمتغير متقطع ، و لتوضيح ذلك نعود إلى المثال السابق حيث:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{16} & 0 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

الشكل رقم 04: يمثل التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي



2.5. قاعدة لايبنيز Règle de LEIBNITZ

تفيد هذه القاعدة الرياضية العامة في استنتاج أن مشتقة دالة التوزيع هي دالة الكثافة:

$$\boxed{\frac{d\int_{-\infty}^{x} f(u)du}{dx} = f(x) \Rightarrow \frac{dF(x)}{dx} = f(x)}$$

__مثال__: أوجد دالة الكثافة للمتغيرة X إذا كانت دالة التوزيع كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

__الحل:__

$$* x < 0 : f(x) = F'(x) = (0)' = 0$$

$$* x \geq 0 : F(x) = 1 - e^{-2x} \Rightarrow f(x) = \left(1 - e^{-2x}\right)' = 2e^{-2x}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

في العديد من الحالات لا يكفي حساب احتمال تحقق حدث أو أحداث معينة بل نحتاج للخروج بتوقع معين يلخص الوضعية المطروحة أمامنا. من جهة أخرى قد يصعب المفاضلة بين خيارات متاحة مقيمة بمبالغ معينة بسبب ارتباط كل مبلغ بمخاطرة مختلفة؛ من المعروف أن الاستثمارات الأكثر

مردودية هي تلك التي تتضمن أكبر مخاطرة، فكيف يمكن أخذ في الحسبان المخاطرة والمبلغ المتوقع وبطريقة دقيقة وموضوعية؛ إن طريقة التوقع وبقية المفاهيم الأخرى التي سنردها يمكن أن تساعدنا في ذلك.

3. التوقع الرياضي أو الأمل الرياضي

3.1. تعريف التوقع

يعرف التوقع الرياضي لمتغيرة عشوائية متقطعة كما يلي:

$$\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i\,f(x_i)}$$

و كمايعرف التوقع الرياضي لمتغيرة عشوائية مستمرة كما يلي:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

نرمز للتوقع أحيانا ب μ أو μ_x.

<u>مثال:</u> نلقي قطعة نقدية مرتين . ليكن X : عدد مرات ظهور الرقم و$Y=X^2$. أحسب $E(X)$، $E(Y)$.

<u>الحل:</u>

X	0	1	2	Σ
P(X)	$(1/2)^2$	$2*(1/2)^2$	$(1/2)^2$	4/4=1
XP(X)	0*1/4	1*2/4	2*1/4	E(X) =1
X^2	0	1	4	/
X^2*P(X)	0	1/2	1	E(Y) = 3/2

العدد المتوقع هو مر ة واحدة من أصل رميتين.

3.2. توقع دالة:

يستخدم توقع دالة عند حساب عدد من المقاييس مثل التباين، العزوم المركزية والعزوم المرتبطة بالأصل. ولتكن X متغيرة العشوائية لها دالة كثافة $f(x)$، و$y=g(x)$ متغيرة العشوائية تابعة لها.

$$E(Y) = E(g(x)) = \sum_x g(x) f(x)$$

في حالة X متغيرة متصلة:

$$E(Y) = E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

3.3. خصائص التوقع الرياضي

$E(C) = C$

$E(CX) = C*E(X)$

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

إذا كانت المتغيرتان مستقلتان. $E(XY) = E(X)*E(Y)$

<u>مثال:</u> تتوقع مؤسسة أن تتلقى كل شهر 3 طلبيات من العميل A و4 من B .

- أحسب العدد المتوقع من الطلبيات المتلقاة من A في السنة.
- أحسب العدد الإجمالي المتوقع من الطلبيات المتلقاة في شهر.

يعين كل عميل من طرفه مندوبا عن كل طلبية لمتابعة إتمامها. كم تتوقع أن يلزم من مقابلة لتعريف مندوبي العميل A بمندوبي B.

$E(12A) = 12E(A) = 12(3) = 36$

$E(A*B) = E(A)*E(B) = 4*3 = 12.$

$E(A + B) = E(A) + E(B) = 3 + 4 = 7$

4. التباين والانحراف المعياري

1.4. تعريف التباين

يعرف التباين لمتغيرة عشوائية كما يلي:

$$\boxed{\sigma_X{}^2 = Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]}$$

و الانحراف المعياري هو جذر التباين. $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}$.

1.1.4. في حالة المتغيرة العشوائية المتقطعة :

$$V(X)=\sum(x-\mu)^2 f(x)$$

كما يحسب بالطريقة المختصرة كالتالي: **V(X) = E(X²) - E(X)²**

$$V(x) = \delta^2 = E([x-E(x)]^2) = E[(x-\mu)^2]$$

$$= E(x^2) - \mu^2$$

$$\text{Et}: \quad E(X^2) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \, . P(X = x_i)$$

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$$

2.1.4. في حالة المتغيرة العشوائية مستمرة :

ويحسب أيضا بالمعادلة المختصرة كمايلي:

$$V(x) = \delta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 \, f(x)dx$$

__مثال:__ نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على الرقم، أحسب V(X) باستخدام الصيغتين.

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	¼	1/2	1/4	1
X*P(X)	0	1/2	1/2	E(X) = μ =1
(X-μ)²	1	0	1	/
(X-μ)² * P(X)	¼	0	1/4	V(X) = ½

$(X)^2$	0	1	4	/
$(X)^2 * P(X)$	0	1/2	1	$E(X)^2 = 3/2$

حساب التوقع الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = (0)\frac{1}{4} + (1)\frac{2}{4} + (2)\frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

حساب التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (0^2)\frac{1}{4} + (1^2)\frac{2}{4} + (2^2)\frac{1}{4} - [1^2] = \frac{6}{4} - 1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7$$

<u>مثال:</u> لتكن X متغيرة العشوائية ذات دالة الكثافة التالية؛

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & 0 \le x \le 4 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

المطلوب:- أحسب تباينX.

- حساب التوقع الرياضي

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x(0)dx + \int_{0}^{4} x\left(\frac{x}{8}\right)dx + \int_{4}^{+\infty} x(0)dx$$

$$= \int_{0}^{4}\left(\frac{x^2}{8}\right)dx = \frac{1}{8}\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^4 = \frac{1}{8}\left(\frac{4^3}{3} - 0\right) = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}$$

- حساب التباين

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

أولا نحسب$E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2(0)dx + \int_{0}^{4} x^2\left(\frac{x}{8}\right)dx + \int_{4}^{+\infty} x^2(0)dx$$

$$= \int_{0}^{4}\left(\frac{x^3}{8}\right)dx = \frac{1}{8}\left|\frac{x^4}{4}\right|_0^4 = \frac{1}{8}\left(\frac{4^4}{4} - 0\right) = \frac{256}{32} = 8$$

وعليه فنجد التباين يساوي:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 8 - \left[\left(\frac{8}{3}\right)^2\right] = \frac{72 - 64}{9} = \frac{8}{9} = 0.89$$

حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,89} \approx 0,94$$

2.4. خصائص التباين:

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$V(CX)=C^2V(X)$, $V(C) = 0$

في حالة استقلال المتغيرتان عن بعضهما $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$

5. المتغيرة المعيارية

يمكن أن نلحق بأي متغيرة عشوائية X متغيرة معيارية (تسمى أيضا المتغيرة المركزية) ويرمز لها *X .
تلحق المتغيرة المعيارية بالمتغيرة الحقيقية من أجل المقارنة لأن المتغيرة المعيارية ليس لها وحدة كالمتر أو الساعة ... وإنما هي تعبر عن كل قيمة x ل X من خلال المسافة بين x والتوقع **μ** محسوبة ليس بالوحدة الأصلية وإنما بالانحرافات المعيارية.

$$\boxed{X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$

من خلال خصائص التوقع والتباين نستخرج التوقع والتباين للمتغيرة المعيارية.

$$E(X^*) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}\left[E(X)-E(\mu)\right] = 0$$

$$V(X^*) = E\left[(X^* - E(X^*))^2\right] = E\left[(X^* - 0)^2\right] = E(X^{*2}) = E\left(\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}E(X-\mu)^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

<u>**مثال**</u>: أحسب *X من أجل متوسط 70، انحراف معياري 5، وX يساوي: 55، 60، 50، 75، 80، 70.

<u>**الحل**</u>: القيم هي: -3، -2، -4، 1، 2، 0.

<u>**مثال**</u>: يتدرب عاملان أحمد وعلي من أجل المشاركة في ماراتون عيد العمال 1 ماي. يشترط يوم المسابقة أن يكون وزن المترشح لا يتجاوز المجال $\mu \pm 1.5\sigma$.

إذا كان الوزن المتوسط بالكغ هو $\mu = 70$ والانحراف المعياري هو 5 كغ. هل سيقبل العاملان أحمد وعلي إذا كان وزنهما: 77 كغ، و80 كغ؟

<u>**الحل**</u>: مجال القبول هو من 62.5 كغ إلى 77.5 كغ، لذلك فسيرفض علي ويقبل أحمد.

تمارين حول المتغيرات العشوائية

التمرين الأول:

في صندوق توجد سبع قارورات ماء معدني منها أربع زجاجات من نوع إفري(I) والباقي ماء سعيدة (S)، سحبنا قارورتين من الصندوق بطريقة عشوائية، لنفترض أن X متغير عشوائي يدل على عدد القارورات من نوع إفري المسحوبة.

1) أكتب التوزيع الاحتمالي لـX، ومثله بيانياً؟.
2) أوجد دالة التوزيع $F(X)$ ومثلها بيانياً؟
3) ما هو إحتمال أن نسحب قارورة إفري على الأقل؟.

التمرين الثاني:

نختار عشوائيا عائلة لديها 4 أطفال من مجتمع تتعادل فيه نسبة المواليد من الجنسين. نرمز بـ Xلعدد الأولاد و Y لعدد البنات.

1) أكتب التوزيع الإحتمالي لكل من X و Y.
2) أحسب دالة التوزيع لـ Xو Y. ثم أحسب عن طريق $F(X)$إحتمال ولدين على الأكثر.

التمرين الثالث:

نسحب 3 كريات بدون إرجاع من صندوق يحتوي 5 كريات بيضاء و 3 حمراء. نرمز بـ Xلعدد الكريات البيضاء و بـ Yلعدد الكريات الحمراء.

1) أكتب التوزيع الإحتمالي لكل من Xو Y ثم أحسب $E(X)$ و $E(Y)$.
2) أحسب $F(X)$ و$F(Y)$.
3) أحسب $P(X \leq 3)$, $P(1 < X \leq 3)$ و $F(Y = 3)$

التمرين الرابع:

قناصان يرمي كل واحد منهما طلقة على هدف، الأول يصيب الهدف بإحتمال قدره 0.45والثاني يصيبه بإحتمال قدره 0.7 ، وليكن لدينا المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد المرات التي يصيب فيها الهدف من طرف القناص الأول والمتغير Y يمثل نفس الشيء بالنسبة للقناص الثاني.

1) أوجد التوزيع الاحتمالي لكل من X و Y .

2) ليكن لدينا $Z = X - Y$ أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Z.

3) أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي Zومثله بيانياً.

4) أحسب التوقع الرياضي و الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي Z.

التمرين الخامس:

لتكن Xمتغيرة عشوائية دالة كثافتها معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ cx & 0 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

أحسب c, $F(X)$, $E(X)$, $V(X)$, $P\left({}^{1}/_{2} < X \leq {}^{3}/_{2}\right)$, $P(X > 1)$.

التمرين السادس:

لتكن دالة التوزيع المعرفة كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 1 & x \geq 3 \\ cx^3 & 0 \leq x < 3 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

أحسب$f(x)$, c, $P(X < 1)$, $P(1 < X \leq 2)$.

التمرين السابع:

لتكن دالة الكثافة الإحتمالية المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-3x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

أحسب c, $F(X)$, $E(X)$, $V(X)$, $P(X < 2)$, $P(1 < X \leq 3)$, $P(X > 1)$ و $P(X \leq -1)$.

التمرين الثامن:

لتكن دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية X المعرفة كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

أحسب $f(x)$, $E(X)$, $E(X^2)$, $V(X)$, $P(X > 2)$, $P(-3 < X \leq 4)$

التمرين التاسع:

تمثلت تقديرات قسم المبيعات بمؤسسة ما لسعر البيع الوحدوي لأحد أصناف المنتج كما يلي:

عر البيع	250	500	850
إحتمال	0.5	0.3	0.1

إذا كانت التكاليف المتغيرة للوحدة هي 4000 و.ن هل تقترح الإقدام على عملية إنتاج هذا الصنف من المنتج؟

التمرين العاشر:

ليكن X و Y متغيرتان عشوائيتان مستقلتان, حيث: $E(X) = 8/3$ و $E(Y) = 30/8$, و لتكن $Z = X * Y$ و $W = 3X + 2Y$

التوزيعات الاحتمالية الشهيرة

تمهيد

بعد التعرف على مفهوم المتغيرة العشوائية والتوزيع الاحتمالي، نتطرق في هذا الفصل إلى دراسة عدد من التوزيعات الاحتمالية الشهيرة ، حيث تستخدم هذه التوزيعات في حل العديد من المسائل في مجال التسيير الصناعي والتجاري وفي الإدارة. وذلك بحسب تصنيفها إلى توزيعات احتمالية متقطعة وتوزيعات احتمالية مستمرة.

1. التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الشهيرة

1-1- توزيع برنولي Distribution de Bernoulli

1.1.1. تجربة برنولي

تجربة برنولي هي تجربة عشوائية لها نتيجتين اثنتين فقط، نسمي النتيجة الأولى اصطلاحا بالنجاح ونرمز لها بالرمز A والنتيجة الثانية نسميها بالفشل ونرمز لها $\bar{A}$ ، لذلك فإن فراغ العينة لتجربة برنولي هو $\Omega=\{A, \bar{A}\}$. ونرمز لاحتمال النجاح بالرمز $p=P(\bar{A})$ ، ولاحتمال الفشل بالرمز $q=P(\bar{A})$ وينبغي ملاحظة أ ن: $q=1-p$ ومن أمثلة محاولات برنولي نذكر ما يلي:

- تجربة قذف قطعة نقود (صورة أو رقم)
- تجربة تسجيل جنس المولود (ذكر أو أنثى)
- تجربة رصد نتيجة طالب في الاختبار (ناجح أو راسب)
- تجربة رصد نتيجة تحليل إصابة بمرض معين (مصاب أو غير مصاب)
- تجربة فحص قطعة من إنتاج أحد المصانع (سليمة أو تالفة)

1.1.2. شروط استعمال القانون

لنفرض أن لدينا تجربة برنولي ولنعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد مرات النجاح عند إجراء تجربة برنولي، أي أن $X(A) = 1, X(\tilde{A}) = 0$:

إن مجموعة القيم الممكنة لهذا المتغير العشوائي هي واحتمالاته هي $X(S)=\{0,1\}$:

$P(X=1) = P(A) = p$

$P(X=0) = P(\bar{A}) = 1- p= q$

أي أن دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي هي:

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x}; & x = 0.1 \\ 0; & x \neq 0.1 \end{cases}$$

إن توزيع المتغير العشوائي Xيسمى بتوزيع برنولي ب المعلمة p . ويسمى المتغير العشوائي X بمتغير برنولي .
ومعلمة هذا التوزيع هي احتمال النجاح.

1.1.3. خصائص القيم العددية لتوزيع برنولي

- **التوقع الرياضي** $E(X) = \Sigma x_i p = 1.p + 0.q = p \Rightarrow E(X) = p$
- **التباين** $V(X) = p(1- p) \Rightarrow \mathbf{V(X)} = pq$

<u>مثال:</u> إذا كان احتمال اصابة أشخاص بأحد الامراض هو0.04= P .

المطلوب: اوجد كل من التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير العشوائي.

<u>الحل:</u> - التوقع الرياضي $E(X) = p = 0.4$

- التباين: $V(X) = pq = 0.4*0.6 = 0.24$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{pq} = \sqrt{0,24} = 0,49$$

- الانحراف المعياري

1-2- توزيع ذي الحدين أو التوزيع الثنائي Distribution binomial

1.2.1. صياغة قانون التوزيع الثنائي

إن توزيع ذي الحدين أو التوزيع الثنائي من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة المهمة شائعة الاستخدام في كثير من التطبيقات، بحيث يمثل p احتمال وقوع حدث ما في تجربة برنوَلي، وبالتالي $(q = 1 - p)$ يمثل احتمال عدم حدوث الحدث في أي تجربة وحدية. و يعرف التوزيع الثنائي تكرارًلعدد n محدد من المرات لتجربة برنولية مع استقلالية التجارب عن بعضها أي احتمال النجاح في التجربة ثابت. ويكتب كما يلي:

$$X \sim \beta(n; p)$$

وعليه يمكن استنتاج صيغة قانون التوزيع الثنائي إذا كررنا تجربة برنولي n مرة فإن X (عدد مرات النجاح)
تأخذ القيم: X = 0, 1, 2, 3, . . . n

مثال توضيحي: لنفترض التجربة البرنولية رمي قطعة نقدية مكررة عدد n من المرات، وX عدد مرات الحصول على صورة (F):

- حالة : $n = 2$ $X = 0, 1, 2.$

$P(X = 0) = q*q = q^2$, $P(X=1) = P(FP) + P(PF) = p*q + q*p =$ $\mathbf{2p^1q^1}$

- حالة : $n = 3$ $X = 0, 1, 2, 3.$

$P(X=3) = P(FFF) = p*p*p = p^3$, $P(X=2) = P(FFP \text{ ou } PFF \text{ ou } FPF) =$ $\mathbf{3p^2q^1}$

- حالة : $n = 4$ $X = 0, 1, 2, 3, 4.$

$P(X=3) = P(FFFP \text{ ou } PFFF \text{ ou } FPFF \text{ ou } FFPF) =$ $\mathbf{4\ p^3q^1}$

في النتيجة الأخيرة نلاحظ العدد 3 هو x، العدد 1 هو n-x، والعدد 4 هو عدد الطرق الملائمة للحصول على ثلاث نجاحات من بين (n=4) تجارب، ويمكن حسابه كما يلي:

$$C_n^x = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

وبالتالي فاحتمال عدد ما x من النجاحات من بين nتجربة برنولية و هو تعريف " قانون التوزيع الثنائي" يحسب كما يلي:

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{P(X = x)} = C_n^x p^x q^{n-x}$$

حيث: x عدد مرات النجاح،

p احتمال النجاح في التجربة الواحدة (يبقى ثابت عند تكرار التجربة)،

q = 1-p احتمال الفشل وn عدد التجارب.

2.2.1. شروط استخدام التوزيع الثنائي

- تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات
- احتمال النجاح في التجربة ثابت (التجارب مستقلة)

مثال: أحسب عند رمي قطعة نقدية متوازنة 4 مرات. والمطلوب: أحسب احتمال الحصول على ولا مرة صورة، مرة واحدة، مرتين.

الحل: نلاحظ أن: تجربة برنولية مكررة 4 المرات

احتمال النجاح في التجربة ثابت وهو 0.5

ومنه: X متغير عشوائي خاضع للتوزيع الثنائي، أي: $X \sim \beta(n;p)$ وذلك بتطبيق القانون التالي:

$P(X = x) = C^{x}_{n} p^{x} q^{n-x}$

- احتمال عدم الحصول على صورة: $P(X = 0) = C^{0}_{4}\ 0.5^{0}\ 0.5^{4} = 1/16$
- احتمال عدم الحصول على صورة واحدة $P(X = 1) = C^{1}_{4}\ 0.5^{1}\ 0.5^{3}$

احتمال عدم الحصول على صورتين $P(X = 2) = C^{2}_{4}\ 0.5^{2}\ 0.5^{2}$

3.2.1. خصائص القيم العددية لتوزيع الثنائي

يمكن اعتبار X مجموع متغيرات مستقلة برنولية $X = X_1 + X_2 + \dots X_i + \dots + X_n$ لها نفس المعلم p وبالتالي نفس التوقع $(E(Xi) = p)$ أيضا. إذا باستخدام خصائص التوقع والتباين نجد:

- **التوقع:** $E(X) = np$
- **التباين:** $V(X) = npq$

1-3- قانون بواسون Distribution de Poisson :

يربط هذا التوزيع بين أحداث معينة تتم في وحدات قياس معينة كمساحات هو أزمنة هو أحجام هو مسافات معينة. ومن أمثلة هذا التوزيع:

- ✓ عدد المرضى الذين يراجعون قسم الإسعاف خلال ساعة؛
- ✓ عدد السيارات التي تمر من عبر النفق خلال اليوم؛
- ✓ عدد الاشخاص الذين يتناولون الغداء في أحد المطاعم ؛
- ✓ عدد المصابيح المكسورة في صندوق المنتجات؛
- ✓ عدد الزبائن الذين يتم خدمتهم من قبل احد العاملين في البنك.

1.1.3. صياغة قانون بواسون

لتكن لدينا تجربة برنولية مكررة عدد كبير جدا أو لا نهائي من المرات، مبدئيا المتغيرة التي تمثل عدد النجاحات تتبع التوزيع الثنائي، لكن قد يصعب حساب الاحتمال باستعمال صيغة هذا التوزيع عندما تكون n كبيرة. مثلا احتمال 25 نجاح إذا كانت n=100

$$f(x) = P(X = 25) = C_{100}^{25} 0.001^{25} 0.999^{75}$$

عندما تتكرر التجربة باستمرار، يصبح عدد مرات التجربة مقاسا بالزمن، ويكون احتمال تحقق الحدث في لحظة زمن صغير جدا، نحتاج في هذه الحالة إلى إيجاد صيغة عامة تعادل صيغة التوزيع الثنائي عندما يؤول n إلى ما لا نهاية. ويكتب كما يلي: $X \rightsquigarrow P(\lambda)$

ان احتمال عدد ما من النجاحات في هذه الحالة يحسب وفق قانون التوزيع الاحتمالي التالي:

$$\boxed{p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0,1,2,\ldots}$$

حيث الثابت $\lambda>0$ يمثل معدل النجاح خلال فترة معينة بحيث يقابل $np = \lambda$ في توزيع ذي الحدين.

- حساب احتمال عدد من الأحداث في t وحدة زمن.

من أجل عدد أو مقدار t من وحدات الزمن نعوض λ ب λt فنجد:

<u>مثال:</u> بفرض أن عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتفي معين تتبع توزيع بواسون بمعدل $\lambda=5$ في الثانية. أحسب احتمال وصول 7 مكالمات في ثانية و نصف.

<u>الحل:</u>

$$t\lambda = 1.5(5) \qquad P(X = 7) = \frac{(1.5(5))^7 e^{-1.5(7)}}{7!}$$

- **حساب احتمال عدد من الأحداث من فئة معينة**

إذا كان X يتبع توزيع بواسون بمعدل λ، فإن Y= aX هو الآخر يتبع توزيع بواسون بمعدل $a\lambda$.

<u>مثال:</u> بفرض أن عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتفي معين تتبع توزيع بواسون بمعدل $\lambda=5$ في ثانية، وأن 6% من هذه المكالمات هي مكالمات دولية.

المطلوب: أحسب احتمال أن تصل 9 مكالمات دولية في ثانية.

الحل:

$$P(X=9)=\frac{(0.05(5))^{9}e^{-0.05(5)}}{9!}$$

2.1.3. خصائص القيم العددية لتوزيع بواسون

- التوقع الرياضي: $\mu = E(x) = \lambda$
- التباين: $\sigma^2 = V(x) = \lambda$

3.1.3. ا لاستخدام العملي لتوزيع بواسون

لفترة طويلة ظل توزيع بواسون مستعملا لتمثيل الأحداث النادرة فقط، لكنه ونظرا للأبحاث الحديثة أصبح اليوم يستعمل في شتى المجالات؛ منها مراقبة الجودة ، ظواهر الانتظار، الاتصالات)عدد المكالمات في وًحدة زمن(، في الفيزياء النووية لدراسة ودراسة الأَشعاع وفي البيولوجيا الدقيقة وًمراقبة تكاثر البكتيريا، كما يستخدم في وحتى في علم الأحوال الجوًية؛

كما يستخدم توزيع بواسون في مجال التسيير، وًبشكل خاص عند دراسة "ظواهر الانتظار" المنتسبة لنظرية صفوف الانتظار و"ظواهر الوصول" والتي نذكر أمثلة منها: عدد الحالات الاستعجالية التي تصل إلى مستشفى، عدد الزبائن الذين يصلون إلى متجر في وحدة زمن، عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتفي، عدد الشاحنات التي تصل إلى المرأب ما عدد السفن التي تصل إلى ميناء في وحدة زمن.

<u>مثال:</u> بينت دراسة أن عدد حوادث العمل في مصنع يتبع توزيع بواسون بمعدل حادثتين يوميا.

- أوجد احتمال أن لا يحدث أي حادث في يوم معين؟
- أوجد احتمال أن يسجل حادث على الأقل في يوم؟

الحل:

- عدد حوادث العمل في المصنع يتمثل في متغير عشوائي X يتبع توزيع بواسون ؛

ويكتب كما يلي: $X \sim P(2)$

$$P(X=x)=\frac{(\lambda)^{x}e^{-\lambda}}{x!}\quad,\qquad \lambda=2\quad\Rightarrow\quad P(X=x)=\frac{(2)^{x}e^{-2}}{x!}$$

- --

- احتمال أن لا يحدث أي حادث في يوم معين $f(0) = P(X = 0)$

$$P(X=0) = \frac{(2)^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2}$$

- احتمال أن يسجل حادث على الأقل في يوم $f((X \geq 1) = P(X \geq 1)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - e^{-2}$$

4.1.3. تقريب التوزيع الثنائي إلى توزيع بواسون.

عندما $n \to \infty$ والمتوسط ثابت يؤول التوزيع الثنائي إلى التوزيع بواسون. عمليا يعطي توزيع بواسون نتائج قريبة من التوزيع الثنائي لما: $\boxed{n \geq 30}$ و $\boxed{np < 5}$ أو $\boxed{nq < 5}$

ويستخدم بعض من الإحصائيين أيضا كشرط لاستعمال قانون بواسون بدلا من القانون الثنائي القاعدة التالية: **$n \geq 25$ و $p \leq 0,1$**

<u>مثال :</u> نأخذ عشوائيا 10 وحدات من انتاج آلة نسبة إنتاجها التالف 10 % .

- أحسب احتمال أن يكون هناك وحدتان تالفتان؟

<u>**الحل:**</u>

<u>باستعمال توزيع بواسون:</u> نحسب أولا قيمة المعلمة λ (معلمة قانون بواسون):

$$\lambda = \mu = np = 10 \times 0,1 = 1$$

$$P(X=x) = \frac{(\lambda)^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad \lambda = 1 \Rightarrow P(X=2) = \frac{(1)^2 e^{-1}}{2!} = \frac{1}{2e} = \mathbf{0,1839}$$

<u>باستعمال التوزيع الثنائي:</u> $P(X = 2) = C^2_{10}\,(0,1^2)\,(0.9^8) = \mathbf{0.1937}$

1-4- التوزيع الثنائي السالب (باسكال) Distribution binomialenégative

1.1.4.صياغة قانون التوزيع الثنائي السالب:

ليكن لدينا تجربة برنولية (نتيجتين نجاح وفشل) مكررة، لكن هذه المرة إلى غاية الحصول على عدد معين (r) من النجاحات. X في هذه الحالة هي عدد مرات تكرار التجربة إلى غاية الحصول على r نجاح.

كيف يحسب الاحتمال ؟ نعلم أن تحقق النجاح r مرة احتماله p^r واحتمال الفشل x-r مرة يساوي q^{x-r} . إذا الاحتمال المطلوب يتضمن جداء هذين الاحتمالين p^rq^{x-r} . لكن هناك عددا من الطرق الملائمة لتحقيق r نجاح من بين X تجربة مع العلم أن آخر تجربة هي نجاح. هذا العدد يساوي إذا عدد الطرق الملائمة لاختيار r-1 نجاح من بينx-1 تجربة C^{r-1}_{x-1} (التجربة الأخيرة معلومة النتيجة).

$$\boxed{P(X=x)=C_{x-1}^{r-1}p^r q^{x-r}, \qquad X=r,r+1,r+2,...+\infty, \qquad r=1,2,3,...,+\infty}$$

. يسمى هذا التوزيع توزيع أو الثنائي السالب ويكتب كالتالي: ***X~B (N, r, p)***

.2.1.4. خصائص القيم العددية لتوزيع باسكال

- التوقع الرياضي: $\mu = E(x) = = r/p$
- التباين: $\sigma^2 = V(x) = = rq/p^2$

<u>مثال:</u> نرمي قطعة نقود إلى غاية الحصول على 3 مرات كتابة (متتالية أو لا).

-أحسب احتمال أن نحصل على ذلك بعد 5 رميات، ثم توقع عدد الرميات اللازمة وأحسب التباين.

<u>**الحل:**</u> - احتمال أن نحصل على ذلك بعد 5 رميات:

$P(X=5) = C^{3-1}_{5-1}\ p^3\ q^{5-3} = C^2_4\ (½)^3\ (½)^2 = 6\ (1/8)\ (1/4) = \mathbf{6/32}$

– التوقع الرياضي: $\mu = r/p = 3/(1/2) = \mathbf{6}$

- **التباين:** $\sigma^2 = rq/p^2 = 3\ (1/2) / (1/2)^2 = 12/2 = \mathbf{6}$

1-5- التوزيع الهندسي Distribution géométrique

1.1.5. صياغة قانون التوزيع الهندسي

لتكن لدينا التجربة البرنولية وهذه المرة نكرر التجربة إلى غاية الحصول على النتيجة أو الحدث المطلوب (نجاح مرة واحدة). المتغيرة العشوائية X التي تمثل عدد مرات تكرار التجربة (بما فيها المرة التي حصل فيها النجاح) تتبع التوزيع الهندسي.

إذا رمزنا لاحتمال النجاح ب p ولاحتمال الفشل ب q وبصفة عامة فإن احتمال أي قيمة لX يعبر عنه كما يلي :

$$P(X = x) = q^{x-1} p \qquad , \qquad X = 1, 2, 3, \ldots$$

2.1.5. **خصائص القيم العددية للتوزيع الهندسي**

- التوقع الرياضي: $\mu = E(x) = = 1/p$
- التباين: $\sigma^2 = V(x) = = q/p^2$

ملاحظة: التوزيع الهندسي ما هو إلا حالة خاصة من توزيع باسكال حيث r = 1

1-6- **التوزيع المتعدد**Distribution multinomial

1.1.6. صياغة قانون التوزيع الثنائي المتعدد

التوزيع المتعدد هو تعميم للتوزيع الثنائي، فبينما الأول يستعمل في حالة تجربة تقبل نتيجتين فقط، يستعمل التوزيع المتعدد للحالة العامة حيث يكون للتجربة عدد k من النتائج الممكنة. مع استقلالية التجارب عن بعضها. نرمز لهذه النتائج ب $A_1, A_2, \ldots A_k$ ولاحتمالاتها ب $p(A_3) \ldots, p(A_k), p(A_1), p(A_2)$.

بما إن الأحداث (النتائج) Ai متنافية فإن: $p(A_3)+\ldots+p(A_k)+p(A_1)+p(A_2)=1$

إذا كررنا هذه التجربة **متعددة** النتائج عدد n من المرات فسيكون لدينا لكل حدث (نتيجة) متغيرة عشوائية تمثل عدد مرات وقوعه. نرمز لهذه المتغيرات ب$X_1, X_2, \ldots X_k$ حيث $X_1 + X_2 + \ldots + X_k = n$.

يحسب احتمال الحدث المركب: $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k$ كما يلي :

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

2.1.6. خصائص القيم العددية لتوزيع الثنائي المتعدد

- التوقع الرياضي $\mathbf{E(X_k) = np_k}$ $\quad E(X_1) = np_1, E(X_2) = np_2, \ldots,$
- التباين: $\mathbf{V(X_k) = np_kq_k}$ $\quad V(X_1) = np_1q_1, V(X_2) = np_2q_2, \ldots$

مثال: إذا رمينا قطعة نرد42 مرة، أحسب احتمال أن يظهر كل رقم عدد من المرات يتناسب مع الرقم ذاته (الرقم 1 يظهر مرتين، الرقم 2 يظهر 4 مرات، الرقم 3 يظهر 6 مرات وهكذا).

1-7- التوزيع الهندسي الزائد: Distribution hyper géométrique

1-1-7- صياغة قانون التوزيع الهندسي الزائد أو التوزيع فوق الهندسي:

نفترض أننا نسحب من صندوق كريات **بدون إرجاع** عددها n، إذا كان الصندوق يحتوي على N كرية منها b بيضاء وr حمراء (N = b + r) فإن احتمال الحصول على عدد معين $x \le b$ من الكريات البيضاء يمكن أن نحصل عليه من خلال القانون الكلاسيكي للاحتمالات (ع الحالات الملائمة /ع الحالات الممكنة) وذلك باستخدام التوفيقات:

$$\boxed{P(X=x)=\frac{C_b^x \cdot C_r^{n-x}}{C_N^n}}$$

تسمى هذه الصيغة: قانون التوزيع الهندسي الزائد ونكتب ***$X \sim H(N, b, p)$,*** حيث:

$p = b/N$ و $=1-pq = r/N$

<u>**مثال:**</u> صندوق به 6 كريات منها 4 بيضاء و2 حمراء. نسحب بدون إرجاع 3كريات. مطلوب:

أحسب احتمال الحصول على كرتين بيضاوين ، وعلى 3 كريات بيضاء؟

<u>**الحل:**</u> نلاحظ أن:

- النتائج المنتظرة ثنائية الإمكانية :كل كريةمسحوبة إما بيضاء وإما حمراء؛
- السحب دون إرجاع أي السحبات غير مستقلة واحتمال النجاح P غير ثابت؛
- الترتيب غير مهم.

ومنه: X متغير عشوائي خاضع للتوزيع الهندسي الزائد، أي:***$X \sim H(N, b, p)$;*** حيث***$X \sim H(6, 4, 4/6)$***

- احتمال الحصول على كرتين بيضاوين $P(X=2) = C_4^2 \cdot C_2^3 / C_6^1 = 12/20$

احتمال الحصول على3كريات بيضاء $P(x = 3) = C_4^3 . C_2^0 / C_6^3 = 1/5$

7-1-2- خصائص القيم العددية للتوزيع الهندسي الزائد

- التوقع الرياضي: $\mu = E(x) = = np$
- التباين: $\sigma^2 = V(x) = = npq(N-n/N-1)$

7-1-3- تقريب التوزيع الهندسي الزائد والتوزيع الثنائي

في حالة N كبير جدا (يؤول إلى ∞) فإن(N-1) / (N-n) تؤول إلى 1 (n محدود). ومن جهة أخرى يعطي التوزيع الثنائي نتائج قريبة من التوزيع الهندسي الزائد ويصبح السحب بدون إرجاع مطابقا تقريبا للسحب بالإرجاع.

8-1- **التوزيع الهندسي الزائد المتعدد:** Distribution Multi-hypergéométrique

8-1-1- صياغة قانون التوزيع الهندسي الزائد المتعدد

يمكن بسهولة تعميم قانون التوزيع الهندسي الزائد على حالة وجود أكثر من صنفين (k صنف)، حيث من كل صنف لدينا Ni كرية، $(\Sigma Ni = N)$ ، ولحساب احتمال نتيجة معينة؛ مثلا 2 كريات بيضاء $(X_1 = 2)$ ، 5حمراء، 1زرقاء، . . . يمكن حساب عدد الحالات الملائمة والممكنة من خلال التوفيقات كما يلي:

$$\boxed{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots X_k = x_k) = \frac{C_{N_1}^{x_1} C_{N_2}^{x_2} \ldots C_{N_k}^{x_k}}{C_N^n} \qquad \sum_1^k N_i = N, \sum_1^k x_i = n}$$

8-1-2- خصائص القيم العددية للتوزيع الهندسي الزائد المتعدد

- التوقع الرياضي: $\mu = E(x) = = n(N_i/N) = np_i$
- التباين: $\sigma^2 = V(x) = = npq(N-n/N-1)$

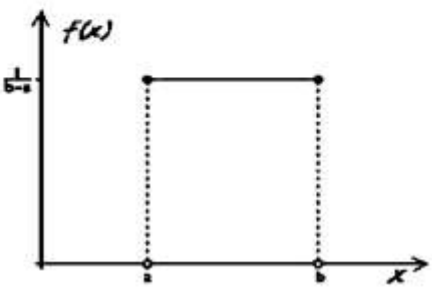
2. التوزيعات الاحتمالية المستمرة

1.2. التوزيع المنتظم

1.1.2. **صياغة قانون توزيع المنتظم**

يعرف **التوزيع المنتظم أو الموحد** على أنه توزيع احتمالي يقضي لكل متغير عشوائي تابع له بأن يستطيع الحصول على قيم محصورة في فترة مستمرّة واحدة ووحيدة على محور الأعداد الصحيحة، بحيث يكون الاحتمال بحصول المتغير على قيم في أي فترة جزئية محتوات في هذه الفترة يكون الاحتمال متساويا، بشرط أن تكون جميع الفترات الجزئية متساوية الطول. يعني أن دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع ثابتة في الفترة [a,b]، ومساوية لصفر خارج تلك الفترة.

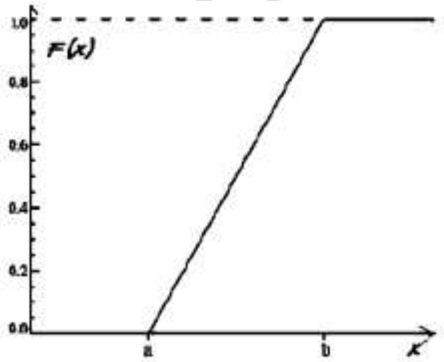
و ليكن X متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم$X \sim U(a, b)$ ، وعليه يتم تقديم الصيغة التالية:



$$X \sim U(a;b)$$

$$P(X=x)=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & ,x\in[a\,;\,b]\\ 0 & ,x\notin[a\,;\,b]\end{cases}$$

أما دالة التوزيع الاحتمالي التجميعي للتوزيع المنتظم تأخذ الشكل التالي:



$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & , \quad x>b\end{cases}$$

2.1.2. **خصائص القيم العددية للتوزيع المنتظم**

- التوقع الرياضي: $\mu = E(x) = (a+b)/2$
- التباين: $\sigma^2 = V(x) = (b-a)^2/12$

2.2. التوزيع الطبيعي

يعد التوزيع الطبيعي **أو توزيع لابلاس قوس**[1] D. Normaleou D. de Laplace -Gausse من أهم التوزيعات المستمرة نظرا لتطبيقاته الإحصائية على الظواهر الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية، حيث يستخدم في وصف كثير من المتغيرات العشوائية ذات الانتشار الواسع هو التواتر الكبير (الطول، درجات الطلاب، أعمار المواطنين.....)، و يعتبر تقريب جيد بكثير من التوزيعات الاحتمالية. فلو اخترنا بالصدفة 100 أو 1000 من المارين في شار ع ما وقمنا بقياس أطوالهم لوجدنا نسبة كبيرة منها قريبة من متوسط ما، بينما نسبة قليلة من طوال القامة ونسبة مقاربة لها من قصار القامة. ولو مثلنا هذه البيانات في معلم متعامد متجانس لكان المنحنى الذي يمثل النسبة أو ما يعرف بالاحتمال، ذا شكل جرسي متماثل حول المتوسط وهي صفات التوزيع الطبيعي (الشكل رقم 01) :

1.2.2. صياغة القانون الطبيعي

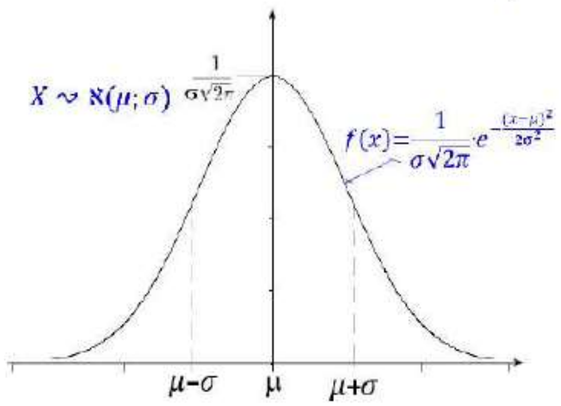
نرمز لكل متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بالكتابة التالية : $\mathbf{X \sim N(\mu, \sigma)}$

حيث: μ: يمثل التوقع وσ: يمثل الانحراف المعياري.

حيث دالة الكثافة لمنحنى للتوزيع الطبيعي موضحة في المعادلة التالية:

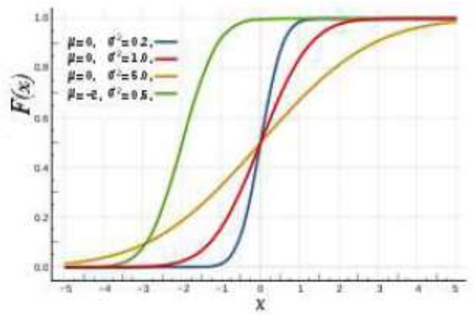
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty<x<\infty$$

والتي يمكن تمثيلها بيانيا في الشكل التالي:



الشكل رقم 01 الشكل العام للتوزيع الطبيعي

أما الدالة التجميعية للتوزيع الطبيعي موضحة كما يلي:



$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

الشكل رقم 02 دالة التوزيع الطبيعي

2.2.2. خصائص القيم العددية للتوزيع الطبيعي

- التوقع الرياضي: $E(x) = \mu$
- التباين: $V(x) = \sigma^2$

3.2.2. التوزيع الطبيعي المعياري أو القياسي

لإيجاد احتمالات المتغير العشوائي الطبيعي $X \sim N(\mu , \sigma^2)$ فإننا نحوله أولا إلى متغير عشوائي طبيعي معياري $Z \sim N(0,1)$ وذلك باستخدام المتغيرة المعيارية $Z = (X-\mu)/\sigma$، ومن ثم نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد الاحتمالات من النوع $P(0 \leq Z \leq z)$ أو $F(z) = P(Z \leq z)$

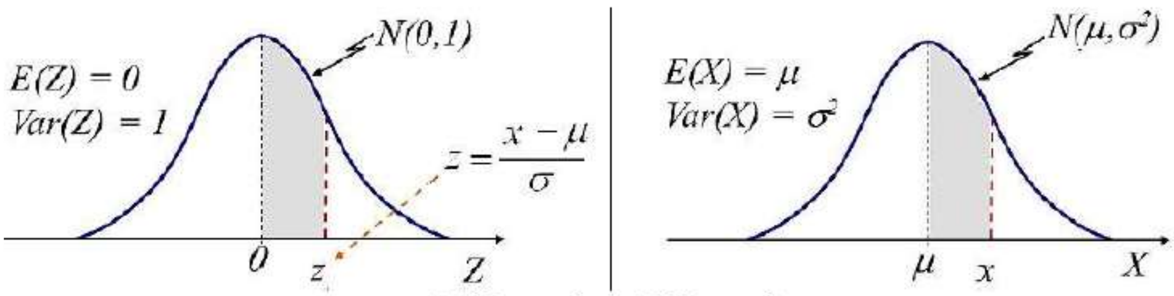
$$X \sim N(\mu . \sigma^2) \Leftrightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0. 1)$$

،حيث تسمح بكتابة الدالة f وF بدلالة مجهول واحد Z بدلا من 3 مجاهيل x وμ و σ وذلك كما يلي:

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \qquad -\infty<z<\infty$$

$$F(z)=P(Z\leq z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{\frac{-u^2}{2}}du$$

بالنظر إلى العلاقة الخطية بين المتغيرتين X و Z، فإنZ تتبع نفس توزيع X أي التوزيع الطبيعي كما هو موضح في الشكل أدناه.



$$P\ (X\leq x)=P(Z\leq z)$$

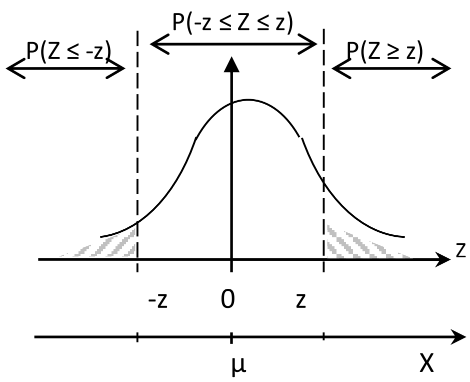
الشكل رقم 03 يوضح التحويل من التوزيع الطبيعي الى التوزيع الطبيعي المعياري

4.2.2. خصائص منحى التوزيع الطبيعي

- التوزيع الطبيعي يعتبر معتدلا لا مدببا ولا مفلطحا، حيث يعتبر معامل التفلطح $\alpha_4 = 3$ للتوزيع الطبيعي معيارا لاعتدال المنحنيات.
- من خصائص التوزيع الطبيعي أيضا أنه متماثل حول القيمة المتوقعة $\alpha_3=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=0$ كما يعني تماثل لمنحنى Z حول 0، مما يعني أنه من أجل أي قيمة للمتغيرة المعيارية$z>0$: (كما هو موضح في الشكل أسفله)

$$P(0\leq Z\leq z) = P(-z\leq Z\leq 0) = P(-z\leq Z\leq z)\ /\ 2$$

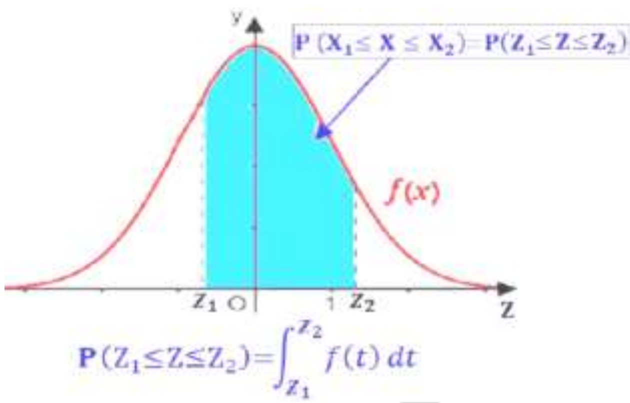
$$P(Z\leq -z) = 1- P(Z\leq z) = P(Z\geq z)$$



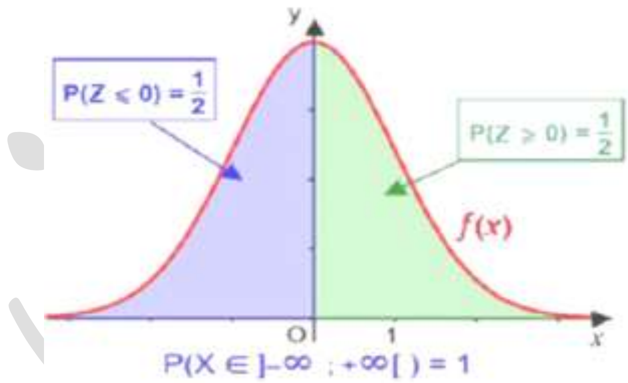
الشكل رقم04 استخدام تماثل التوزيع الطبيعي في حساب الاحتمالات

5.2.2. قواعد أساسية لحسابات الاحتمالات

للحصول على قيمة احتمال أن تقع X بين نقطتين X_1 و X_2 نقوم بحساب القيم المعيارية Z_1 و Z_2 للقيمتين، ثم نستعمل جدول التوزيع الطبيعيً المعياري.



- بما أن المتغير العشوائي مستمر:



$$\forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow (X = k) = 0$$

$$P\ (a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

$$P\ (X \in [\mu; +\infty[) = P(X \geq \mu) = P(Z \geq 0) = 1/2$$

$$P\ (X \in]-\infty; \mu]) = P(X \leq \mu) = P(Z \leq 0) = 1/2$$

$$P\ (X \in]-\infty; +\infty[) = P(-\infty \leq X \leq +\infty) = 1$$

$$P\ (X < \mu) = (X \geq \mu) = (Z < 0) = (Z \geq 0)$$

$= 0.5 = 50\%$

- كما يمكن تقديم بعض الاحتمالات التي تقع فيها بعض الفترات والقيم المتوفرة في الجداول الإحصائية نذكر أهمها:

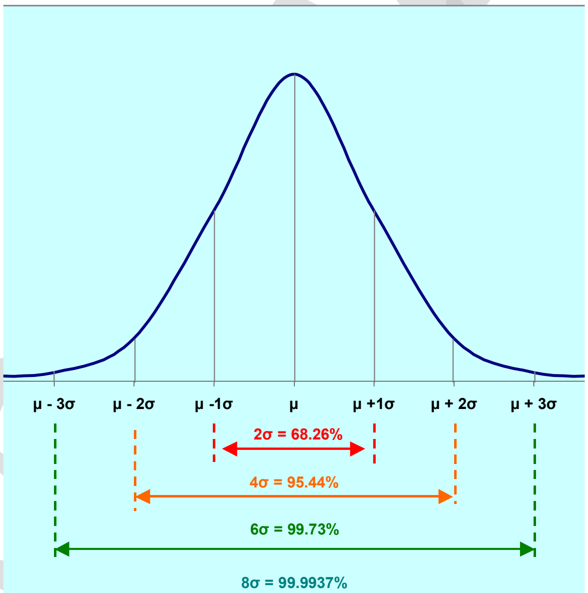
$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(-\sigma \leq Z \leq \sigma) = P(-1 \leq Z \leq +1) = 0.683 = 68.26\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(-2\sigma \leq X \leq 2\sigma) = P(-2 \leq Z \leq +2) = 0.955 = 95.44\%$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(-3\sigma \leq X \leq 3\sigma) = P(-3 \leq Z \leq +3) = 0.9973 = 99.73\%$$

هذه القيم وغيرها متوفرة في الجداول الإحصائية التي نجدها في الكثير من المراجع، كما يمكن حسابها باستخدام الحاسوب.

الشكل رقم 05 يمثل المساحات الأساسية تحت منحنى التوزيع الطبيعي



<u>**مثال:**</u> أجريت دراسة إحصائية حول الاستهلاك السنوي للحوم في الج ا زئر على عينة عشوائية من الأسر، وبينت الدراسة ما يلي:

الاستهلاك المتوسط السنوي للفرد من اللحوم يقدر ب 45 كلغ، الانحراف المعياري يقدر ب18كلغ.

والمطلوب إيجاد نسبة الأفراد الذين:

- يفوق استهلاكهم السنوي 55 كلغ؟-

- يقل استهلاكهم السنوي عن 30 كلغ ؟-
- استهلاكهم السنوي ما بين 40 كلغ و 60 كلغ ؟

<u>الحل</u>

Xالمتغير العشوائي يدل على الاستهلاك السنوي من اللحوم للفرد الواحد في الجزائر

$X \to (\mu,\sigma)$. حيث $\mu=45\ kg$, $\sigma=18kg$ أي $X \to N(45,18)$

- **نسبة الأفراد الذين يفوق استهلاكهم السنوي 55 كلغ- :**

$(X>55)=P(\frac{x-45}{18}>\frac{55-45}{18})=(Z>0,55)=1-P(Z<0,55)=1-P(Z<0,55)$

$(X>55)=1-0,7088=0,2992=29,92\%$

تقدر نسبة الأفراد استهلاكهم السنوي من اللحوم يفوق 44 كلغ ب29,92% .

- **نسبة الأفراد الذين يقل استهلاكهم السنوي عن 30 كلغ:**

$(X<30)=P(\frac{x-45}{18}<\frac{30-45}{18})=(Z<-0,83)=1-P(Z<0,83)$

$(X<30)=1-0,7967=0,2033=20,33\%$

تقدر نسبة الأفراد استهلاكهم السنوي من اللحوم يقل عن 30 كلغ ب20,33%

- نسبة **الأفراد الذين يتراوح استهلاكهم السنوي** ما بين 40 كلغ و 60 كلغ: -

$(40<X<60)=(\frac{40-45}{18}<\frac{x-45}{18}<\frac{60-45}{18})=P(-0,28<Z<0,83)$

$=P(Z<0,83)-P(Z<-0,28)$

$(Z<0,83)-(1-P(Z<0,28)$

$=0.7967-(1-0.6103)$

$=0,407$

تقدر نسبة الأفراد استهلاكهم السنوي من اللحوم ما بين 40 كلغ و 60 كلغ ب 40,7%

6.2.2. تقريب التوزيع الثنائي إلى التوزيع الطبيعي

في حالة n كبيرة وp غير قريب من 0 يمكن اعتبار التوزيع الثنائي كتقريب جيد للتوزيع الطبيعي. ويعطي التوزيعان نتائج أكثر تقاربا كلما كانت n كبيرة أكثر. ونكتب:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(a \leq z \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-z^2/2} dz, \qquad z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

ويسرع تقارب التوزيع الثنائي من التوزيع الطبيعي كون p قريب من 0.5.

<u>قاعدة التقريب:</u>

- ✓ **عموما نعتبر التقريب إلى التوزيع الثنائي ملائما عندما np و nq كلاهما أكبر من 5.**
- ✓ عدد من الاحصائيين يعتمد قاعدة أخرى هي أن يكون أحد الشرطين التاليين متوفرين:

$$npq \geq 9 \qquad ou \qquad n \geq 20, np \geq 10, nq \geq 10$$

7.2.2. تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي.

عندما $\lambda \longrightarrow \infty$ فإن التوزيعين الطبيعي وبواسون يعطيان نتائج متطابقة . ونكتب:

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{x - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

<u>قاعدة التقريب:</u>

- ✓ **عموما نعتبر أن التقريب ملائم من التوزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي عندما $\lambda \geq 10$**
- ✓ **فيما يعتمد عدد من الإحصائيين كشرط للتقريب $\lambda \geq 15$**

3.2. التوزيع الأسي Distribution exponentielle

يعدد التوزيع الاسي من التوزيعات المستمرة المهمة التي تستخدم على نطاق واسع في الحياة، وخاصة المسائل المتعلقة بقياس الزمن مثل :

- المدة الزمنية لبقاء المريض في المستشفى لتلقي العلاج
- مدة صلاحية الدواء
- مدة تقديم الخدمة في مركز خدمات شركة الهواتف
- مدة شفاء المريض من مرض معين.
- مدة تفريغ باخرة الشحن
- مدة حياة الذرات المشعة قبل أن تتفكك

كقاعدة عامة يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة ظاهرة ما إذا كان لها متوسط ثابت $1/\lambda$ وكانت هذه الظاهرة لا تخضع للتقادم، أي أن مدة حياة الظاهرة بعد لحظة ما T لا تتبع اللحظة T؛ أي لا تتأثر بالمدة التي دامتها الظاهرة من قبل. مثلا قد نستبعد استخدام التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة آلة عاملة قبل تعطلها لأن احتمال تعطلها في لحظة ليس مستقلا عن المدة التي عملتها الآلة من قبل، كذلك الأمر بالنسبة لمدة حياة الإنسان.

كما يرتبط التوزيع الأسي بتوزيع بواسون، فإذا كان وقوع أحداث ما يتبع هذا التوزيع، فإن المدة بين وقوع حدثين تتبع التوزيع الأسي؛ كمثال على ذلك، إذا كان وصول الزبائن إلى مركز خدمة ما يتبع التوزيع بواسون فإن المدة الزمنية بين وصول زبون «أ» والزبون الموالي تتبع التوزيع الأسي.

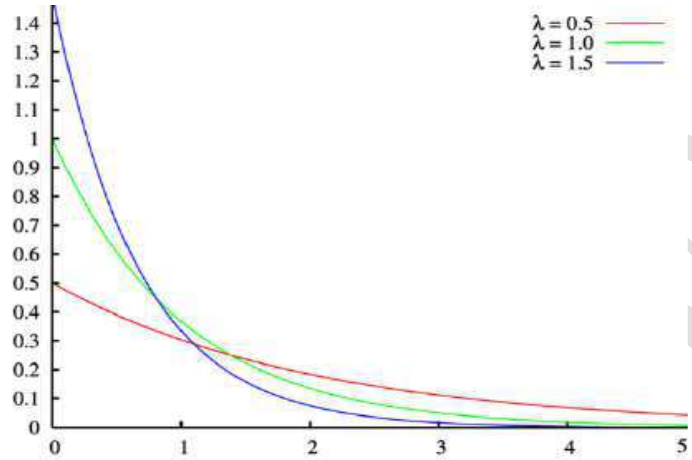
1.2.3. صياغة القانون الأسي

إذا كان حدث عشوائي ما يتكرر في الزمن وفق توزيع بواسون:

$$\boxed{p_{\tau}(x) = \frac{(\lambda\tau)^{x} e^{-\lambda\tau}}{x!}}$$

فإن الزمن T بين حادثين يتبع التوزيع الأسي$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ للمعلمة λ حيث $\lambda \geq 0$ إذا كان له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(\tau) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda \tau} & , \quad \tau > 0 \\ 0 & , \quad \tau \leq 0 \end{cases}$$



الشكل رقم 06 يمثل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسي

أما دالة التوزيع الاحتمالي التجميعي للتوزيع الأسي تأخذ الشكل التالي:

$$F(t) = P(X < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & ; t > 0 \\ 0 & ; t \leq 0 \end{cases}$$

2.2.3. خصائص القيم العددية للتوزيع الأسي

- التوقع الرياضي: $\mu = E(x) = 1/\lambda$
- التباين: $\sigma^2 = V(x) = 1/\lambda^2$

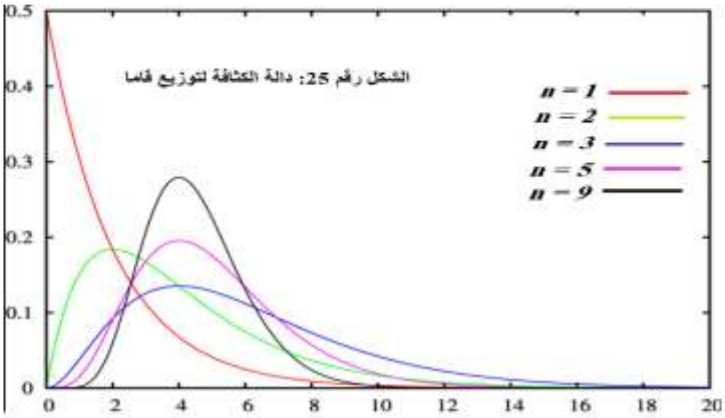
4.2. توزيع قاما Distribution gamma

توزيعي قاما و بيتا يمثلان مجموعة واسعة من التوزيعات ذات معلمتين تتميز بمرونة وقدرة على توليد توزيعات متعددة حسب قيم المعلمتين. بحيث ندرس هذين التوزيعين أيضا لعلاقتهما بالتوزيعات F، t، و ك2. يستخدم توزيع قاما لتمثيل بعض الظواهر مثل توزيع الدخل والادخار تحت شروط معينة.

1.4.2. صياغة قانون توزيع قاما

نقول عن متغيرة عشوائية أنها تتبع توزيع قاما إذا كانت دالة كثافتها كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, & x>0\\ 0\quad , & x\le 0\end{cases}\qquad ,\ \alpha>0,\beta>0$$



1يمثل دالة الكثافة للتوزيع عند قيم مختلفة المعالم

حيث$\Gamma(\alpha)$ هي الدالة قاما: $\quad \alpha>0 \qquad \Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$

ونكتب $X \sim \quad \boldsymbol{\Gamma(\alpha,\beta)}$

2.4.2. خصائص القيم العددية لتوزيع قاما

- التوقع الرياضي: $= E(x) = \alpha\beta$
- التباين: $\sigma^2 = V(x) = \alpha\beta^2$

<u>**مثال**</u>: أحسب المتوسط والتباين للمتغيرات العشوائية X و Y و Z المعرفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{4}e^{-x/2}}{2^{5}\Gamma(5)}, & x>0\\ 0\quad , & x\le 0\end{cases},\quad f(y)=\begin{cases}\dfrac{y^{3}e^{-y/4}}{4^{4}(6)}, & y>0\\ 0\quad , & y\le 0\end{cases},\quad f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^{2}e^{-z}}{6}, & z>0\\ 0\quad , & z\le 0\end{cases}$$

$$\mu_x=\alpha\beta=5(2)=10,\sigma^2{}_x=\alpha\beta^2=5(2^2)=20,\mu_y=4(4)=16,\sigma^2{}_y=4(4^2)=64,\mu_z=3(1)=3,\sigma^2{}_z=3$$

.5.2 توزيع بيتا Distribution bêta

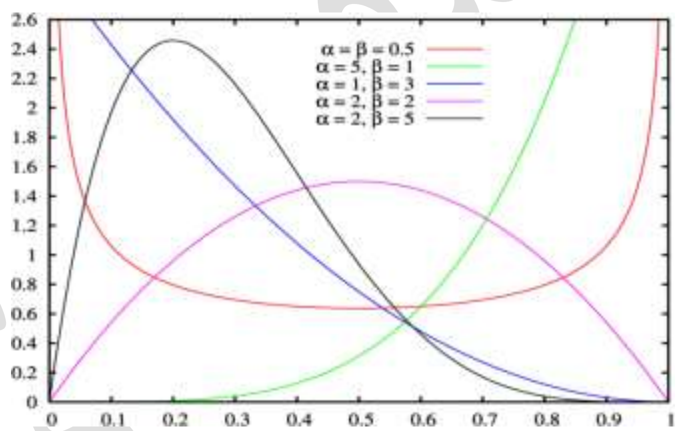
يتميز توزيع بيتا بمرونته الكبيرة تبعا لقيم معلمتيه ، ويتضح من خلال الشكل رقم 08 حيث يستخدم لحساب توزيع t^2، F، التوزيع الثنائي، الثنائي السالب وغيرها، وتستخدم لتمثيل بعض المتغيرات التي تتراوح بين 0 و 1، مثل نسبة ما كنسبة التالف أو المبيعات، إلخ

.1.5.2 صياغة قانون توزيع بيتا

نقول عن متغيرة عشوائية أنها تتبع توزيع بيتا إذا كانت دالة كثافتها كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)} & 0<x<1 \\ 0 & ailleurs\end{cases} \qquad (\alpha,\beta>0)$$

و نكتب $X \sim B(\alpha,\beta)$

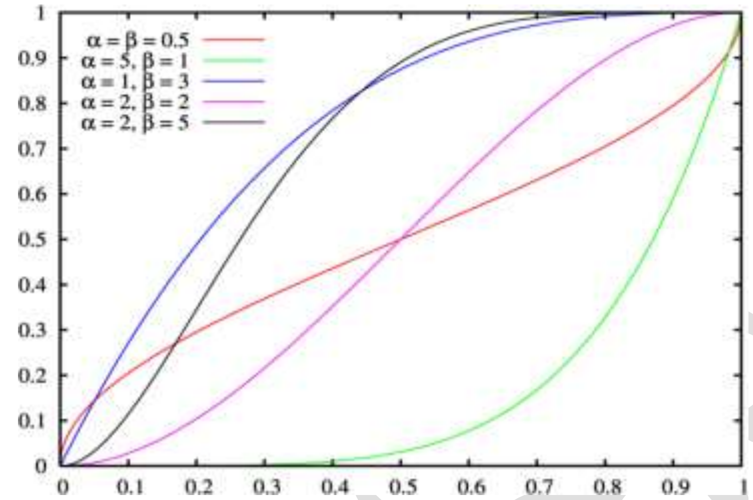


شكل رقم 08 يمثل دالة الكثافة للتوزيع بيتا عند قيم مختلفة المعالم

أما دالة التوزيع بيتا فنعبر عنها بالصيغة التالية: والممثلة في الشكل رقم 09

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du, \qquad \alpha,\beta>0$$

شكل رقم 09 يمثل دالة التوزيع بيتا عند قيم مختلفة المعالم



2.5.2. خصائص القيم العددية لتوزيع بيتا

- التوقع الرياضي: $\mu = E(x) = \alpha/\alpha + \beta$
- التباين: $\sigma^2 = V(x) = \alpha\beta/(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)$

3.5.2. العلاقة بين الدالتين قاما وبيتا:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

وباستعمال العلاقة $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ نجد أن دالة الكثافة للتوزيع بيتا تكتب أيضا:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0 \qquad , & ailleurs \end{cases}$$

ملاحظة : التوزيع الأسي هو حالة خاصة من توزيع قاما عندما $\alpha = 1, \beta = 1/\lambda$.

__مثال__: أحسب النسبة المتوقعة للإنتاج التالف والتباين، إذا كانت نسبة الإنتاج التالف تتبع التوزيع التالي:

$$f(x)=\begin{cases}6(1-x)^5, & 0<x<1\\ 0 \quad , & \text{sinon}\end{cases}$$

لدينا α و β يساويان 1 و 6 على التوالي، نجد أن $X \sim B(1,6)$

ومنه: $\mu=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}=1/2, \qquad \sigma^2=\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}=\dfrac{4}{16(5)}=1/20.$

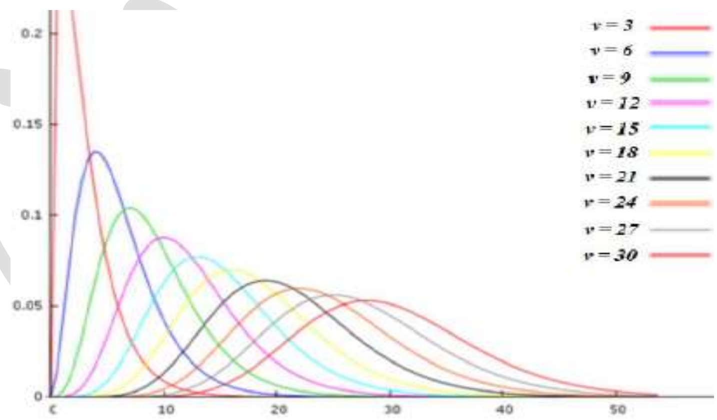
6.2. توزيع كاي تربيع

1.6.2. صياغة قانون توزيع كاي تربيع

توزيع ك 2 هو من أكثر التوزيعات استخداما في مجال اختبار الفروض بأنواعها، ويمكن تعريفه كما يلي: ، لتكن $X_1, X_2, \dots X_\nu$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها تتبع التوزيع الطبيعي المعياري ($\mu = 0, \sigma = 1$). المتغيرة $X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_\nu^2$ لها دالة الكثافة التالية:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{(\nu/2)-1}e^{-x/2}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

والممثلة في الشكل رقم 10 دالة الكثافة توزيع χ^2



الشكل رقم 10 دالة الكثافة توزيع χ^2

حيث $\Gamma(\alpha)$ هي الدالة قاما $\qquad \alpha>0 \qquad \Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$

و نقول أن X تتبع توزيع χ^2 بدرجة حرية ν ونكتب: $\mathbf{X \sim \chi^2(\nu)}$

الدالة التجميعية $F(\chi^2)$ تكتب كما يلي:

$$P(X^2 \le x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} \int_0^x u^{(\nu/2)-1} e^{-u/2} du & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

2.6.2. خصائص القيم العددية لتوزيع χ^2

- التوقع الرياضي: $\mu = E(x) = \nu$
- التباين: $\sigma^2 = V(x) = 2\nu$

3.6.2. تقريب توزيع χ^2 إلى توزيع قاما: إذا وضعنا $x=2y$ و $n=2$ ، ف إن توزيع $\chi 2$ يصبح توزيع. " Γ "

4.6.2. تقريب توزيع χ^2 إلى التوزيع الأسي إذا كان $\nu=2$ فإن توزيع $\chi 2$ يصبح التوزيع الأسي، أين $\alpha=1/2$

5.6.2. تقريب توزيع χ^2 إلى التوزيع الطبيعي المعياري : إذا كان $\nu>30$ فإن المتغير العشوائي "μالمعرف كما يلي: $\mu=\sqrt{2x^2}-\sqrt{2\nu-1}$خاضع تقريبا إلى التوزيع الطبيعي المعيار ي، حيث يمكن إيجاد قيمة μمن جدول التوزيع الطبيعي المعيار ي، وتعويضها بالقانون التالي لإيجاد قيمة $\chi 2$ عند احتمال معينp

$$\chi^2{}_p = \frac{1}{2}\left[u_p + \sqrt{2\nu - 1}\right]^2$$

6.6.2. طريقة استخدام جدول توزيع كاي تربيع: يتكون جدول توزيع كاي – مربع -مما يأتي :

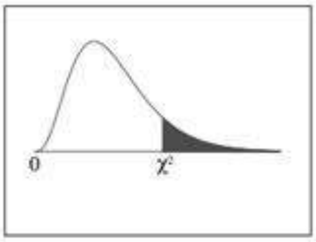
✓ العمود الأول :يضم قيم درجات الحرية dl أو df أو ν. (هذه هي الرموز المعتادة للتعبير عن درجة الحرية.)

✓ السطر الأول : يضم الاحتمال أو مقدار المساحة المضللة بالأسود ف الجهة اليمنى 2 من الشكل الموجود أعلى الجدول.

✓بقية الخانات : تضم قيم المتغير كاي تربيع، والموجودة على محور الفواصل .تنتج هذه الخلايا أو الخانات عن تقاطع الأعمدة والأسطر؛ مثلا عندما(v=5 أو df كما هو في الجدول أدناه)و= p 0.900فإننا نذهب للخانة الناتجة عن تقاطع السطر رقم 06(أين درجة الحرية= 5) والعمود رقم06(أين المساحة او الاحتمال=0.900) نجد قيمة كاي تربيع تساوي 1.610 ونكتب

$\chi^2{}_{0.9}\ (v=5)=1.610$

Chi-Square Distribution Table



The shaded area is equal to α for $\chi^2 = \chi^2_\alpha$.

df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267

7.2. توزيع ستودنت Distribution de Student

يرجع الفضل في إيجاد هذا القانون إلى ويليام سيلي قوسي (William Sealy Gosset) الذي نشر مقالاته كلها باسم ستيودنت، ونشر مقالته حول هذا القانون عام 1908 بعنوان « The probable error of a mean »، بحيث لا يمكن اختبار المعنوية على العينات الصغيرة باستخدام التوزيع الطبيعي , رغم خضوع المتغير العشوائي لهذا التوزيع لذلك وضع توزيعا آخر للعينات الصغيرة وأطلق عليه اسم " توزيع ستورنت" .

1.7.2. صياغة قانون توزيع ستودنت

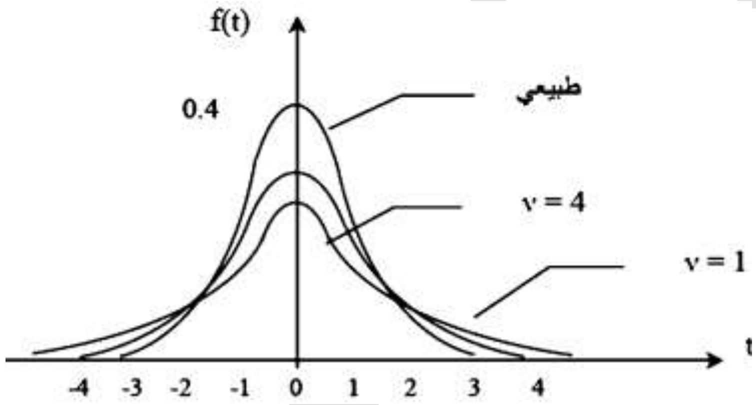
و لتكن المتغيرتان العشوائيتان المستقلتانY و Z حيث1 ,(0,1)Y~ N وχ^2_ν ~ Zالمتغيرة $T = \frac{Y}{\sqrt{Z/\nu}}$

تتبع توزيعT لها دالة الكثافة التالية:

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \qquad -\infty < t < \infty$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt \qquad \alpha > 0$$

والتي يمكن تمثيلها في الشكل التالي:



الشكل رقم 11 يمثل دالة الكثافة لتوزيع ستودنت

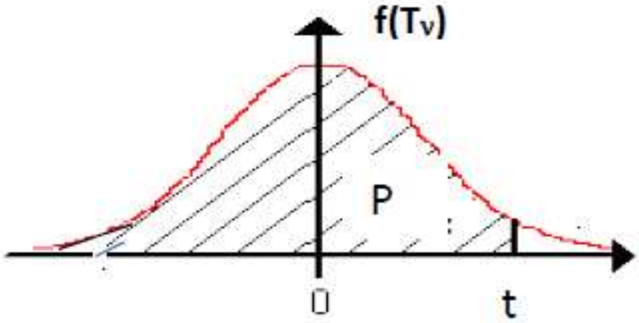
و نقول أن المتغيرX تتبع توزيع ستودنت ب ν درجة حرية و نكتب $\mathbf{T \sim t_\nu}$

$$f(t_k) = P(T \le t_k) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}\cdot\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_{-\infty}^{t_k}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{-(\nu+1)}{2}} dt$$

2.7.2.خصائص القيم العددية لتوزيع ستودنت

- التوقع الرياضي: $\mu = E(T) = \nu$
- التباين $\sigma^2 = V(T) = \nu/(\nu-2)$ si $\nu > 2$

3.7.2.قواعد أساسية لحساب الاحتمالات



- نلاحظ أن منحنى t متماثل حول المتوسط 0 مما يعني أن لكل نقطة موجبة t نقطة مناظرة لها سالبة حيث المساحة تحت المنحنى على يمين t تساوي المساحة تحت المنحنى علي يسار ($-t$) و نكتب $t_{1-p} = -t_p$.
- في الجداول الاحصائية تعين نقطة(قيمة المتغيرة) t من خلال ν والمساحة p على يسار t تحت المنحنى :($p = P(T \leq t_{p,\nu})$) وأحيانا تحدد النقطة t بدلالة المساحة على يمينها ($\alpha = 1 - p$) ونكتب ($t_{\alpha,\nu}$) أو ($t_{p;\nu}$)

4.7.2. تقريب توزيع ستودنت إلى التوزيع الطبيعي المعياري: يقترب منحنى f(t) من المنحنى الطبيعي المعياري كلما زادت قيمة ν وعموما يعتبر الإحصائيون أن المنحنيان يتطابقان تقريبا عند $30 \leq \nu$

5.7.2. طريقة استخدام جدول توزيع ستودنت: يتكون جدول توزيع ستودنت مما يأتي :

✓العمود الأول : يضم قيم درجات الحرية *dl* أو *df* أو (ν. هذه هي الرموز المعتادة للتعبير عن درجة الحرية.)

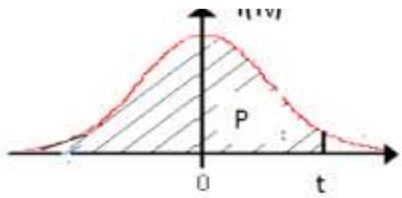
✓السطر الأول : يضم الاحتمال أو مقدار المساحة المضللة بالأسود ف الجهة اليمنى 2 من الشكل الموجود أعلى الجدول.

✓بقية الخانات : تضم قيم المتغير ستودنت، والموجودة على محور الفواصل .تنتج هذه الخلايا أو الخانات عن تقاطع الأعمدة والأسطر؛ مثلا عندما($\nu=5$ أو *dl* كما هو في الجدول أدناه)و $p = 0.9500$ فإننا نذهب للخانة الناتجة عن تقاطع السطر رقم 06(أين درجة الحرية= 5) والعمود رقم 07أين المساحة او الاحتمال=0.9500) نجد قيمة t تساوي 2.0150 ونكتب $t_{0.95}\ (\nu=5) = 2.0150$

Table de la Loi de Student

Fractiles de la loi de Student à ν degrés de liberté. Probabilité P de trouver une valeur inférieure ou égale à t

$P = F(t) = P(T_\nu \leq t)$



ν \ P	0,9250	0,9300	0,9350	0,9400	0,9450	0,9500	0,9550	0,9600	0,9650	0,9700	0,9750	0,9900	0,9950
1	4,1653	4,4737	4,8288	5,2422	5,7297	6,3138	7,0264	7,9158	9,0579	10,5789	12,7062	31,8205	63,6567
2	2,2819	2,3834	2,4954	2,6202	2,7604	2,9200	3,1040	3,3198	3,5782	3,8964	4,3027	6,9646	9,9248
3	1,9243	1,9950	2,0719	2,1562	2,2494	2,3534	2,4708	2,6054	2,7626	2,9505	3,1824	4,5407	5,8409
4	1,7782	1,8375	1,9016	1,9712	2,0475	2,1318	2,2261	2,3329	2,4559	2,6008	2,7764	3,7469	4,6041
5	1,6994	1,7529	1,8104	1,8727	1,9405	2,0150	2,0978	2,1910	2,2974	2,4216	2,5706	3,3649	4,0321
6	1,6502	1,7002	1,7538	1,8117	1,8744	1,9432	2,0192	2,1043	2,2011	2,3133	2,4469	3,1427	3,7074
7	1,6166	1,6643	1,7153	1,7702	1,8297	1,8946	1,9662	2,0460	2,1365	2,2409	2,3646	2,9980	3,4995

8.2. توزيع فيشر

1.8.2. صياغة قانون توزيع فيشر

لتكن لدينا المتغيرتان العشوائيتان المستقلتان X_1 وX_2 حيث : $X_1 \sim X^2_{\nu 1}$ و $X2 \sim X^2_{\nu 2}$ المتغيرة $X = \frac{X1/\nu 1}{X2/\nu 2}$ لها دالة الكثافة التالية

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \; \nu_1^{\frac{\nu_1}{2}} \; \nu_2^{\frac{\nu_2}{2}} \; x^{\left(\frac{\nu_1}{2}\right)-1} \; (\nu_2+\nu_1 x)^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

أما دالة التوزيع في الشكل التالي:

$$f(x_k) = P(F \leq x_k) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \int_0^{x_k} (\nu_1)^{\frac{\nu_1}{2}}.(\nu_2)^{\frac{\nu_2}{2}}.(x)^{\frac{\nu_1}{2}-1}(\nu_2+\nu_1 x)^2\,dx$$

ونقول أن المتغيرة X تتبع توزيع فيشر ب ν_1 و ν_2 درجات حرية ونكتب $X \sim_{\nu 1,\ \nu 2}$

2.8.2. خصائص القيم العددية لتوزيع فيشر

- التوقع الرياضي: $\mu = E(x) = \nu_2/(\nu_2-2)$
- التباين $\sigma^2 = V(x) = 2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)/\nu_1(\nu_2-4)(\nu_2-2)^2$ si $\nu_2 > 4$

3.8.2. قواعد مهمة في حساب الاحتمالات

ويظهر من المعادلة تبعية منحنى$f(x)$ بالإضافة إلى X وكل من ν_1وν_2 و لذلك تحدد أي نقطةF كل من خلال ثلاثة معالم ν , $p, \nu 1$ ا(المساحة تحت المنحنى على يسار النقطة F)

ونكتب$F_{p,\nu 1,\ \ \nu 2}$ ، و في الغالب تعطي الجداول الإحصائية قيم F عند $p = 0.95$ $p = 0.99$F

$$F_{p,\nu,\infty} = \frac{\chi^2_{p,\nu}}{\nu} \quad F_{1-p,\nu_1,\nu_2} = 1/F_{p,\nu_2,\nu_1} \quad F_{1-p,1,\nu} = t^2_{1-(p/2),\nu}$$

4.8.2. طريقة استخدام جدول فيشر: يتكون جدول توزيع فيشر مما يأتي :

- ✓ السطر الأول : يضم قيم درجات الحرية$\nu 1$
- ✓ العمود الأول: يضم قيم درجات الحرية$\nu 2$
- ✓ بقية الخانات : تضم قيم F والموجودة على محور الفواصل .تنتج هذه الخلايا أو الخانات عن تقاطع الأعمدة والأسطر؛ مثلا عندما(ν_1=5 أو ν_2=5 و $p = 0.95$) فإننا نذهب للخانة الناتجة عن تقاطع السطر رقم 06(أينν_1 = 5) والعمود رقم06(أين ν_2=05)نجد قيمة F تساوي 5.05 ونكتب$F_{0.95,5,\ \ 5} = 5.05$

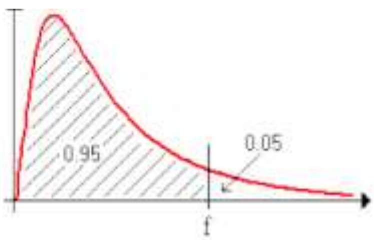
Table : Loi de Fisher-Snedecor

Valeur f de la variable de Fisher-Snedecor $F_{(\nu 1\ ;\ \nu 2)}$ ayant la probabilité 0.05 d'être dépassée.

ν_1 : degrés de liberté du numérateur

ν_2 : degrés de liberté du dénominateur

$F(f) = P\ (\ F_{(\nu 1\ ,\ \nu 2)} \le f\ ) = 95\%$



ν_2 ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	242.98	243.90	244.69	245.36	245.95	246.47
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40	19.41	19.42	19.42	19.43	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70	8.69
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.84
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.60
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94	3.92
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49

تمارين حول التوزيعات الاحتمالية

التمرين الأول:

نختار عشوائيا عائلة لديها 4 أطفال في مجتمع تكون نسبة المواليد فيه من الذكور 0.4 ، ونرمز بـ X للمتغير الذي يمثل عدد الأولاد.

1- ماهي قيم التي يأخذها المتغير X ، و أي توزيع يتبع.

2- أحسب إحتمال لدى العائلة ولدين على الأكثر.

3- أحسب إحتمال لدى العائلة أكثر من ولدين.

4- أحسب العدد المتوقع لذكور في هاته العائلة.

التمرين الثاني:

إذا كانت نسبة الوحدات المعيبة في انتاج نوع من المصابيح الكهربائية هي 0.02 و أن عدد الوحدات المعيبة يتبع توزيع بواسـون، نفرض أننا سحبنا عينة عشـوائية من عشرة مصابيح، المطلوب:

1. ايجاد قانون التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير.
2. احتمال الحصول على مصباح واحد معيب.
3. احتمال الحصول على مصباح معيب على الاكثر.
4. أوجد العدد المتوقع للمصابيح المعيبة في العينة.

التمرين الثالث:

إذا كان الدخل السنوي للأسر في أحد مناطق يتبع توزيع طبيعي متوسطه 20 ألف دينار، وتباينه 900دينار والمطلوب:

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

2- كتابة شكل دالة الكثافة الاحتمالية.

3- ماهي نسبة الأسر التي يقل دخلها عن 15ألفدينار.

4- ماهي قيمة دخل الأسرة ذات نسبة 0.975 ؟

التمرين الرابع:

لنفرض أن مستوى هيموجلوبين الدم في أحد المجتمعات البشرية يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 16 وانحراف معياري 0.9.

1. إذا اخترنا أحد الأشخاص بشكل عشوائي فما هو احتمال أن يكون مستوى هيموجلوبين الدم لديه أكبر من14.
2. ماهي نسبة الأشخاص الذين مستوى هيموجلوبين الدم لديهم أكبر من 14.
3. ما هي نسبة الأشخاص الذين يتراوح مستوى هيموجلوبين الدم لديهم من 14 إلى 18.

قائمة المراجع:

أولا: باللغة العربية:

1. ادريس عبدلي، **دروس مدعمة بأ مثلة وتمارين محلولة في مقياس احصاء 2**، لطلبة كلية العلوم الاقتصادية و التحارية وعلوم التسيير ، جامعة البليدة02، 2019.
2. بوعبد الله صالح، **محاضرات الإحصاء الرياضي،** لطلبة كلية العلوم الاقتصادية و التحارية وعلوم التسيير جامعة المسيلة، 2006.
3. ثائر فيصل شاهر، **"الإحصاء في العلوم الإدارية والمالية"**، دار حامد للنشر والتوزيع،الأردن،2014.
4. دلال القاضي، سهيلة عبد الله، محمود البياتي، **الإحصاء للإداريين والاقتصاديين**، دار حامد، عمان الأردن، 2005 .
5. دومنيك سالفاتور، **سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في الاحصاء والاقتصاد القياسي**، دار ماكجروهيل للنشر، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،1982.
6. ريمي عقبة، ريمي رياض **محاضرات الإحصاء2،** لطلبة كلية العلوم الاقتصادية و التحارية وعلوم التسيير بجامعة الوادي، 2017
7. ساعد بن فرحات، عبد الحميد قطوش، **ملخص الإحصاء2** ، لطلبة كلية العلوم الاقتصادية و التحارية وعلوم التسيير جامعة سطيف 01، 2015.
8. عبابسة الهاشمي، **محاضرات في مقياس الإحصاء الرياضي** لطلبة كلية العلوم الاقتصادية و التجارية وعلوم التسيير بجامعة بسكرة، 2021.
9. فتحي حمدان وكامل فليفل، **"مبادئ الإحصاء"**، دار المناهج، الأردن، 2009.
10. لرقام جميلة، **دروس في الاحتمالات**، دار الكتاب الحديث، الجزائر، **2011**.
11. نور الدين حامد،"**محاضرات وتمارين محلولة في مقياس الإحصاء الوصفي"**، دار اليازوردي، عمان الأردن،2016.
12. يزن إبراهيم، هاشم راتب، **"مبادئ الإحصاء"**، دار البركة ، عمات الأردن، الطبعة الأولى 2001.

ثانيا: باللغة الأجنبية:

1. G. Calot; **Cour de probabilités**; Dunod; 2éme édition.
2. Gérard Frugier; **Formules ordinaires de probabilités et statistique**; edition Marketing; Paris;1994.
3. Jean Luc Rocuet; **Element de probabites et de statistique**; ESTA édition de laroche haute; 2003; 2éme edition.

الملاحق

UNIVERSITÉ DE LYON - LUMIERE LYON 2

UFR de Sciences Économiques et de Gestion

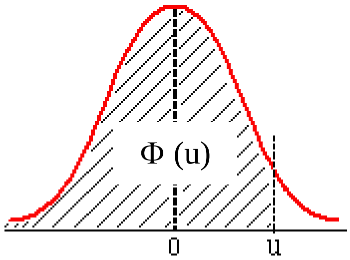
L3 - Statistique Inférentielle

Tables statistiques

Année Universitaire 2020-2021
R. Abdesselam
Courriel : rafik.abdesselam@univ-lyon2.fr
Web : http://perso.univ-lyon2.fr/~rabdesse/Documents/

Table de Loi Normale

Fonction de répartition Φ de la loi normale
centrée réduite : U $\rightarrow$ N(0 . 1).
Probabilité de trouver une valeur inférieure à u.
Φ (u) = P(U $\leq$ u) ; Φ (-u) = P(U $\leq$ - u) = 1 - Φ (u)



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	**0.89617**	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965

Exemple : Φ (1.26) = P(U $\leq$ 1.26) = 0.89617 = 89.62%

Fractiles de la Loi Normale : U → N(0 , 1)

Si la probabilité $P < 0.5$ lire la table de la colonne de gauche et ligne supérieure. Le fractile est négatif.

P	**0**	**0.001**	**0.002**	**0.003**	**0.004**	**0.005**	**0.006**	**0.007**	**0.008**	**0.009**	**0.01**	
0	infini	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656	2.3263	**0.99**
0.01	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0748	2.0537	**0.98**
0.02	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957	1.8808	**0.97**
0.03	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624	1.7507	**0.96**
0.04	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546	1.6449	**0.95**
0.05	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632	1.5548	**0.94**
0.06	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833	1.4758	**0.93**
0.07	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118	1.4051	**0.92**
0.08	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469	1.3408	**0.91**
0.09	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873	1.2816	**0.90**
0.10	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319	1.2265	**0.89**
0.11	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800	1.1750	**0.88**
0.12	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311	1.1264	**0.87**
0.13	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848	1.0803	**0.86**
0.14	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0451	1.0407	1.0364	**0.85**
0.15	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986	0.9945	**0.84**
0.16	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581	0.9542	**0.83**
0.17	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192	0.9154	**0.82**
0.18	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816	0.8779	**0.81**
0.19	0.8779	0.8742	0.8706	0.8669	0.8632	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452	0.8416	**0.80**
0.20	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099	0.8064	**0.79**
0.21	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756	0.7722	**0.78**
0.22	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421	0.7388	**0.77**
0.23	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095	0.7063	**0.76**
0.24	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776	0.6745	**0.75**
0.25	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464	0.6433	**0.74**
0.26	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158	0.6128	**0.73**
0.27	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858	0.5828	**0.72**
0.28	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563	0.5534	**0.71**
0.29	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273	0.5244	**0.70**
0.30	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987	0.4958	**0.69**
0.31	0.4958	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705	0.4677	**0.68**
0.32	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427	0.4399	**0.67**
0.33	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152	0.4125	**0.66**
0.34	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880	0.3853	**0.65**
0.35	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611	0.3585	**0.64**
0.36	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	**0.3425**	0.3398	0.3372	0.3345	0.3319	**0.63**
0.37	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081	0.3055	**0.62**
0.38	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819	0.2793	**0.61**
0.39	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559	0.2533	**0.60**
0.40	0.2533	0.2508	**0.2482**	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301	0.2275	**0.59**
0.41	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045	0.2019	**0.58**
0.42	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789	0.1764	**0.57**
0.43	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535	0.1510	**0.56**
0.44	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282	0.1257	**0.55**
0.45	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030	0.1004	**0.54**
0.46	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778	0.0753	**0.53**
0.47	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527	0.0502	**0.52**
0.48	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276	0.0251	**0.51**
0.49	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025	0.0000	**0.50**
	0.01	**0.009**	**0.008**	**0.007**	**0.006**	**0.005**	**0.004**	**0.003**	**0.002**	**0.001**	**0**	**P**

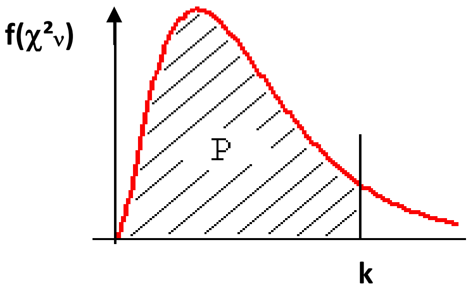
Si la probabilité P > 0.5, lire la table de la colonne de droite et ligne inférieure. Le fractile est positif.

Exemples : Φ (u) = P(U ≤ u) = P = 0.6340 ⇒ u = 0.3425 ; Φ (u) = P(U ≤ u) = P = 0.4020 ⇒ u = - 0.2482

Table de la loi du χ^2_ν

Fractiles F_P de la loi de khi-deux à ν degrés de liberté

$P = F(k) = P(\chi^2_\nu \leq k)$



ν \ P	0.010	0.020	0.025	0.050	0.100	0.150	0.200	0.800	0.900	0.950	0.975	0.980	0.990
1	0.000	0.001	0.001	0.004	0.016	0.036	0.064	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.64
2	0.020	0.040	0.051	0.103	0.211	0.325	0.446	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.21
3	0.115	0.185	0.216	0.352	0.584	0.798	1.005	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.35
4	0.297	0.429	0.484	0.711	1.064	1.366	1.649	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.28
5	0.554	0.752	0.831	1.145	1.610	1.994	2.343	7.289	9.236	11.070	12.833	13.388	15.09
6	0.872	1.134	1.237	1.635	2.204	2.661	3.070	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.81
7	1.239	1.564	1.690	2.167	2.833	3.358	3.822	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.48
8	1.646	2.032	2.180	2.733	3.490	4.078	4.594	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.09
9	2.088	2.532	2.700	3.325	4.168	4.817	5.380	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.67
10	2.558	3.059	3.247	3.940	4.865	5.570	6.179	13.442	15.987	**18.307**	20.483	21.161	23.21
11	3.053	3.609	3.816	4.575	5.578	6.336	6.989	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.73
12	3.571	4.178	4.404	5.226	6.304	7.114	7.807	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.22
13	4.107	4.765	5.009	5.892	7.042	7.901	8.634	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.69
14	4.660	5.368	5.629	6.571	7.790	8.696	9.467	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.14
15	5.229	5.985	6.262	7.261	8.547	9.499	10.307	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.58
16	5.812	6.614	6.908	7.962	9.312	10.309	11.152	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.00
17	6.408	7.255	7.564	8.672	10.085	11.125	12.002	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.41
18	7.015	7.906	8.231	9.390	10.865	11.946	12.857	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.81
19	7.633	8.567	8.907	10.117	11.651	12.773	13.716	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.19
20	8.260	9.237	9.591	10.851	12.443	13.604	14.578	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.57
21	8.897	9.915	10.283	11.591	13.240	14.439	15.445	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.93
22	9.542	10.600	10.982	12.338	14.041	15.279	16.314	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.29
23	10.196	11.293	11.689	13.091	14.848	16.122	17.187	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.64
24	10.856	11.992	12.401	13.848	15.659	16.969	18.062	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.98
25	11.524	12.697	13.120	14.611	16.473	17.818	18.940	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.31
26	12.198	13.409	13.844	15.379	17.292	18.671	19.820	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.64
27	12.879	14.125	14.573	16.151	18.114	19.527	20.703	32.912	36.741	40.113	43.195	44.140	46.96
28	13.565	14.847	15.308	16.928	18.939	20.386	21.588	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.28
29	14.256	15.574	16.047	17.708	19.768	21.247	22.475	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.59
30	14.953	16.306	16.791	18.493	20.599	22.110	23.364	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.89
40	22.164	23.838	24.433	26.509	29.051	30.856	32.345	47.269	51.805	55.758	59.342	60.436	63.69
50	29.707	31.664	32.357	34.764	37.689	39.754	41.449	58.164	63.167	67.505	71.420	72.613	76.15
60	37.485	39.699	40.482	43.188	46.459	48.759	50.641	68.972	74.397	79.082	83.298	84.580	88.38
70	45.442	47.893	48.758	51.739	55.329	57.844	59.898	79.715	85.527	90.531	95.023	96.388	100.42
80	53.540	56.213	57.153	60.391	64.278	66.994	69.207	90.405	96.578	101.88	106.63	108.07	112.33

Exemple : ν = 10 d.d.l. $P = P(\chi^2_{10} \leq F_P) = 0.95 \Rightarrow F_P = 18.307$

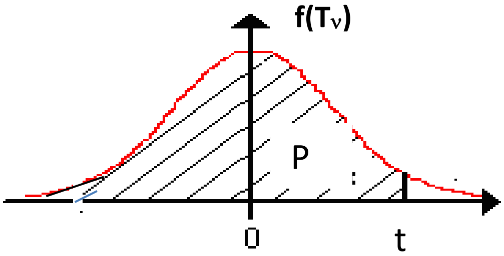
Approximation : Pour $\nu >$ 100 d.d.l. $\chi^2(\nu) \cong N(\nu ; \sqrt{2\nu})$ ou $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1} \cong N(0,1)$

UFR de sciences économiques et de gestion

Table de la Loi de Student

Fractiles de la loi de Student à ν degrés de liberté. Probabilité P de trouver une valeur inférieure ou égale à t

$P = F(t) = P(T_\nu \leq t)$



ν \ P	0,9250	0,9300	0,9350	0,9400	0,9450	0,9500	0,9550	0,9600	0,9650	0,9700	0,9750	0,9900	0,9950
1	4,1653	4,4737	4,8288	5,2422	5,7297	6,3138	7,0264	7,9158	9,0579	10,5789	12,7062	31,8205	63,6567
2	2,2819	2,3834	2,4954	2,6202	2,7604	2,9200	3,1040	3,3198	3,5782	3,8964	4,3027	6,9646	9,9248
3	1,9243	1,9950	2,0719	2,1562	2,2494	2,3534	2,4708	2,6054	2,7626	2,9505	3,1824	4,5407	5,8409
4	1,7782	1,8375	1,9016	1,9712	2,0475	2,1318	2,2261	2,3329	2,4559	2,6008	2,7764	3,7469	4,6041
5	1,6994	1,7529	1,8104	1,8727	1,9405	2,0150	2,0978	2,1910	2,2974	2,4216	2,5706	3,3649	4,0321
6	1,6502	1,7002	1,7538	1,8117	1,8744	1,9432	2,0192	2,1043	2,2011	2,3133	2,4469	3,1427	3,7074
7	1,6166	1,6643	1,7153	1,7702	1,8297	1,8946	1,9662	2,0460	2,1365	2,2409	2,3646	2,9980	3,4995
8	1,5922	1,6383	1,6874	1,7402	1,7973	1,8595	1,9280	2,0042	2,0902	2,1892	2,3060	2,8965	3,3554
9	1,5737	1,6185	1,6663	1,7176	1,7729	1,8331	1,8992	1,9727	2,0554	2,1504	2,2622	2,8214	3,2498
10	1,5592	1,6031	1,6498	1,6998	1,7538	1,8125	1,8768	1,9481	2,0283	2,1202	**2,2281**	2,7638	3,1693
11	1,5476	1,5906	1,6365	1,6856	1,7385	1,7959	1,8588	1,9284	2,0067	2,0961	2,2010	2,7181	3,1058
12	1,5380	1,5804	1,6256	1,6739	1,7259	1,7823	1,8440	1,9123	1,9889	2,0764	2,1788	2,6810	3,0545
13	1,5299	1,5718	1,6164	1,6641	1,7154	1,7709	1,8317	1,8989	1,9742	2,0600	2,1604	2,6503	3,0123
14	1,5231	1,5646	1,6087	1,6558	1,7064	1,7613	1,8213	1,8875	1,9617	2,0462	2,1448	2,6245	2,9768
15	1,5172	1,5583	1,6020	1,6487	1,6988	1,7531	1,8123	1,8777	1,9509	2,0343	2,1314	2,6025	2,9467
16	1,5121	1,5529	1,5962	1,6425	1,6921	1,7459	1,8046	1,8693	1,9417	2,0240	2,1199	2,5835	2,9208
17	1,5077	1,5482	1,5911	1,6370	1,6863	1,7396	1,7978	1,8619	1,9335	2,0150	2,1098	2,5669	2,8982
18	1,5037	1,5439	1,5867	1,6322	1,6812	1,7341	1,7918	1,8553	1,9264	2,0071	2,1009	2,5524	2,8784
19	1,5002	1,5402	1,5827	1,6280	1,6766	1,7291	1,7864	1,8495	1,9200	2,0000	2,0930	2,5395	2,8609
20	1,4970	1,5369	1,5791	1,6242	1,6725	1,7247	1,7816	1,8443	1,9143	1,9937	2,0860	2,5280	2,8453
21	1,4942	1,5338	1,5759	1,6207	1,6688	1,7207	1,7773	1,8397	1,9092	1,9880	2,0796	2,5176	2,8314
22	1,4916	1,5311	1,5730	1,6176	1,6655	1,7171	1,7734	1,8354	1,9045	1,9829	2,0739	2,5083	2,8188
23	1,4893	1,5286	1,5703	1,6148	1,6624	1,7139	1,7699	1,8316	1,9003	1,9782	2,0687	2,4999	2,8073
24	1,4871	1,5263	1,5679	1,6122	1,6596	1,7109	1,7667	1,8281	1,8965	1,9740	2,0639	2,4922	2,7969
25	1,4852	1,5242	1,5657	1,6098	1,6571	1,7081	1,7637	1,8248	1,8929	1,9701	2,0595	2,4851	2,7874
26	1,4834	1,5223	1,5636	1,6076	1,6547	1,7056	1,7610	1,8219	1,8897	1,9665	2,0555	2,4786	2,7787
27	1,4817	1,5205	1,5617	1,6056	1,6526	1,7033	1,7585	1,8191	1,8867	1,9632	2,0518	2,4727	2,7707
28	1,4801	1,5189	1,5600	1,6037	1,6506	1,7011	1,7561	1,8166	1,8839	1,9601	2,0484	2,4671	2,7633
29	1,4787	1,5174	1,5583	1,6020	1,6487	1,6991	1,7540	1,8142	1,8813	1,9573	2,0452	2,4620	2,7564
30	1,4774	1,5159	1,5568	1,6004	1,6470	1,6973	1,7520	1,8120	1,8789	1,9546	2,0423	2,4573	2,7500
50	1,4620	1,4996	1,5394	1,5818	1,6271	1,6759	1,7289	1,7870	1,8516	1,9244	2,0086	2,4033	2,6778
60	1,4582	1,4956	1,5352	1,5772	1,6222	1,6706	1,7232	1,7808	1,8448	1,9170	2,0003	2,3901	2,6603
70	1,4555	1,4927	1,5321	1,5740	1,6187	1,6669	1,7192	1,7765	1,8401	1,9118	1,9944	2,3808	2,6479
100	1,4507	1,4876	1,5267	1,5682	1,6125	1,6602	1,7120	1,7687	1,8315	1,9024	1,9840	2,3642	2,6259
5000	1,4398	1,4760	1,5144	1,5550	1,5985	1,6452	1,6957	1,7510	1,8123	1,8812	**1,9604**	2,3271	2,5768

Exemples : ν = 10 d.d.l. $P(T_{10} \leq t) = 0.975 \Rightarrow t = +2.2281$ et $P(T_{10} \leq -t) = 0.025 \Rightarrow t = -2.2281$

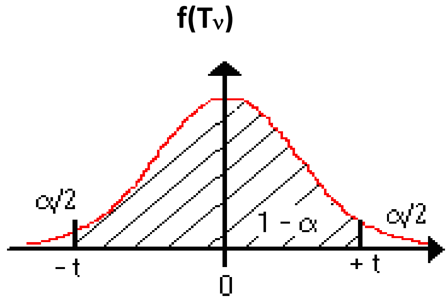
Approximation par une loi normale : pour $n = \nu \approx 5000$ d.d.l. on a $P(T_{5000} \leq t) = 0.975 \Rightarrow t = +1.9604$

Table de la Loi de Student Symétrique

Fractiles de la loi de Student à ν degrés de liberté : valeur du fractile t ayant la probabilité α d'être dépassée en valeur absolue :

$$P(|T_\nu| > t) = 1 - P(|T_\nu| \le t) = \alpha$$

$$P(|T_\nu| \le t) = P(-t \le T_\nu \le t) = 1 - \alpha.$$



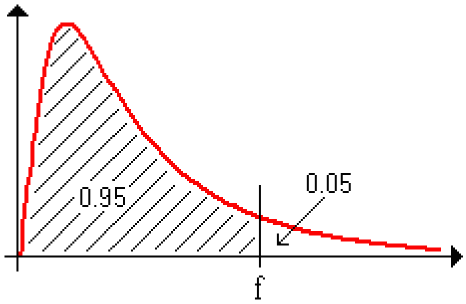
ν \ α	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
1	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.706	31.821	63.656	127.32	636.58
2	0.1421	0.2887	0.4447	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.92	4.3027	6.9645	9.925	14.089	31.6
3	0.1366	0.2767	0.4242	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408	7.4532	12.924
4	0.1338	0.2707	0.4142	0.5686	0.7407	0.941	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041	5.5975	8.6101
5	0.1322	0.2672	0.4082	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.015	2.5706	3.3649	4.0321	4.7733	6.8685
6	0.1311	0.2648	0.4043	0.5534	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	4.3168	5.9587
7	0.1303	0.2632	0.4015	0.5491	0.7111	0.896	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995	4.0294	5.4081
8	0.1297	0.2619	0.3995	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.306	2.8965	3.3554	3.8325	5.0414
9	0.1293	0.261	0.3979	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.383	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	3.6896	4.7809
10	0.1289	0.2602	0.3966	0.5415	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	**1.8125**	**2.2281**	2.7638	3.1693	3.5814	4.5868
11	0.1286	0.2596	0.3956	0.5399	0.6974	0.8755	1.0877	1.3634	1.7959	2.201	2.7181	3.1058	3.4966	4.4369
12	0.1283	0.259	0.3947	0.5386	0.6955	0.8726	1.0832	1.3562	1.7823	2.1788	2.681	3.0545	3.4284	4.3178
13	0.1281	0.2586	0.394	0.5375	0.6938	0.8702	1.0795	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.3725	4.2209
14	0.128	0.2582	0.3933	0.5366	0.6924	0.8681	1.0763	1.345	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.3257	4.1403
15	0.1278	0.2579	0.3928	0.5357	0.6912	0.8662	1.0735	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467	3.286	4.0728
16	0.1277	0.2576	0.3923	0.535	0.6901	0.8647	1.0711	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.252	4.0149
17	0.1276	0.2573	0.3919	0.5344	0.6892	0.8633	1.069	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.2224	3.9651
18	0.1274	0.2571	0.3915	0.5338	0.6884	0.862	1.0672	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.1966	3.9217
19	0.1274	0.2569	0.3912	0.5333	0.6876	0.861	1.0655	1.3277	1.7291	2.093	2.5395	2.8609	3.1737	3.8833
20	0.1273	0.2567	0.3909	0.5329	0.687	0.86	1.064	1.3253	1.7247	2.086	2.528	2.8453	3.1534	3.8496
21	0.1272	0.2566	0.3906	0.5325	0.6864	0.8591	1.0627	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.1352	3.8193
22	0.1271	0.2564	0.3904	0.5321	0.6858	0.8583	1.0614	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.1188	3.7922
23	0.1271	0.2563	0.3902	0.5317	0.6853	0.8575	1.0603	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.104	3.7676
24	0.127	0.2562	0.39	0.5314	0.6848	0.8569	1.0593	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.797	3.0905	3.7454
25	0.1269	0.2561	0.3898	0.5312	0.6844	0.8562	1.0584	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.0782	3.7251
26	0.1269	0.256	0.3896	0.5309	0.684	0.8557	1.0575	1.315	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.0669	3.7067
27	0.1268	0.2559	0.3894	0.5306	0.6837	0.8551	1.0567	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.0565	3.6895
28	0.1268	0.2558	0.3893	0.5304	0.6834	0.8546	1.056	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.047	3.6739
29	0.1268	0.2557	0.3892	0.5302	0.683	0.8542	1.0553	1.3114	1.6991	2.0452	2.462	2.7564	3.038	3.6595
30	0.1267	0.2556	0.389	0.53	0.6828	0.8538	1.0547	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.75	3.0298	3.646
50	0.1263	0.2547	0.3875	0.5278	0.6794	0.8489	1.0473	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	2.937	3.496
60	0.1262	0.2545	0.3872	0.5272	0.6786	0.8477	1.0455	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	2.9146	3.4602
70	0.1261	0.2543	0.3869	0.5268	0.678	0.8468	1.0442	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479	2.8987	3.435
80	0.1261	0.2542	0.3867	0.5265	0.6776	0.8461	1.0432	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387	2.887	3.4164
infini (loi normale)	0.1257	0.2533	0.3853	0.5244	0.6744	0.8416	1.0364	1.2816	1.6449	**1.96**	2.3264	2.5759	2.8072	3.2908

Exemples : $\nu = 10$ d.d.l. $P(|T_{10}| \le t) = P(-t \le T_{10} \le t) = 0.95 \Rightarrow t = \pm 2.2281$

$P(T_{10} \le t) = 0.95 \Rightarrow t = +1.8125$

Table : Loi de Fisher-Snedecor

$f(F_{(\nu_1\,;\,\nu_2)})$



Valeur f de la variable de Fisher-Snedecor $F_{(\nu_1\,;\,\nu_2)}$ ayant la probabilité 0.05 d'être dépassée.

ν_1 : degrés de liberté du numérateur

ν_2 : degrés de liberté du dénominateur

$F(f) = P\,(\,F_{(\nu_1\,.\,\nu_2)} \le f\,) = 95\%$

ν_2 ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	242.98	243.90	244.69	245.36	245.95	246.47
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40	19.41	19.42	19.42	19.43	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70	8.69
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.84
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	**4.74**	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.60
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94	3.92
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.20
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01	2.99
10	4.96	4.10	3.71	3.48	**3.33**	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.83
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.70
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62	2.60
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58	2.55	2.53	2.51
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40	2.38
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.33
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31	2.29
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.16
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.20	2.17	2.15	2.13
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.24	2.20	2.18	2.15	2.13	2.11
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18	2.15	2.13	2.11	2.09
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.14	2.11	2.09	2.07
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.12	2.09	2.07	2.05
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.17	2.13	2.10	2.08	2.06	2.04
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10	2.08	2.05	2.03	2.01
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04	2.01	1.99
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14	2.10	2.07	2.04	2.01	1.99	1.97
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05	2.02	1.99	1.97	1.95
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.95	1.93
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.02	1.99	1.96	1.94	1.92
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.95	1.92	1.90

Exemple : $\nu_1 = 5$ d.d.l. et $\nu_2 = 10$ d.d.l. $P\,(\,F_{5\,.\,10} \le f\,) = 0.95 \Rightarrow f = 3.33$

Table : Loi de Fisher-Snedecor

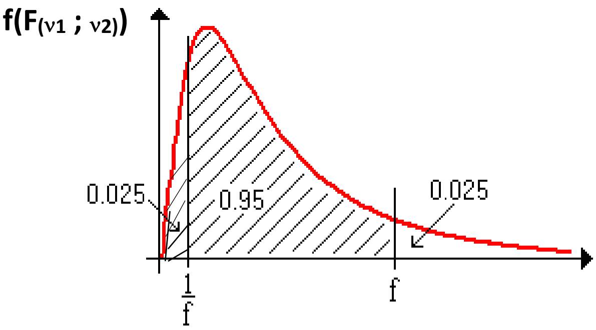
Valeur f de la variable de Fisher-Snedecor

$F_{(\nu_1\,;\,\nu_2)}$ ayant la probabilité 0.025 d'être dépassée.

ν_1 : degrés de liberté du numérateur

ν_2 : degrés de liberté du dénominateur

$F(f) = P\,(F_{(\nu_1\,.\,\nu_2)} \leq f\,) = 97.50\%$



ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.6	963.3	968.6	973.0	976.7	979.8	982.5	984.9	986.9
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.41	39.42	39.43	39.43	39.44
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.37	14.34	14.30	14.28	14.25	14.23
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.79	8.75	8.72	8.68	8.66	8.63
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	**6.62**	6.57	6.52	6.49	6.46	6.43	6.40
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.41	5.37	5.33	5.30	5.27	5.24
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.71	4.67	4.63	4.60	4.57	4.54
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.24	4.20	4.16	4.13	4.10	4.08
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.91	3.87	3.83	3.80	3.77	3.74
10	6.94	5.46	4.83	4.47	**4.24**	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62	3.58	3.55	3.52	3.50
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43	3.39	3.36	3.33	3.30
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.32	3.28	3.24	3.21	3.18	3.15
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.09	3.05	3.01	2.98	2.95	2.92
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96	2.92	2.89	2.86	2.84
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.93	2.89	2.85	2.82	2.79	2.76
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.87	2.82	2.79	2.75	2.72	2.70
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.81	2.77	2.73	2.70	2.67	2.64
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.76	2.72	2.68	2.65	2.62	2.59
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68	2.64	2.60	2.57	2.55
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.68	2.64	2.60	2.56	2.53	2.51
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.65	2.60	2.56	2.53	2.50	2.47
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.62	2.57	2.53	2.50	2.47	2.44
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	2.50	2.47	2.44	2.41
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.56	2.51	2.48	2.44	2.41	2.38
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.54	2.49	2.45	2.42	2.39	2.36
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.51	2.47	2.43	2.39	2.36	2.34
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.37	2.34	2.32
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.48	2.43	2.39	2.36	2.32	2.30
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.28

Exemples : $\nu_1 =$ 5 d.d.l. et $\nu_2 =$ 10 d.d.l. $P\,(F_{97.5\%\,;\,5\,.\,10} \leq f\,) = 0.975 \Rightarrow f = 4.24$

$P\,(F_{2.5\%\,;\,5\,.\,10} \leq f'\,) = 0.025$

$P\,(F_{97.5\%\,;\,10\,.\,5} \leq f\,) = 0.975 \Rightarrow f = 6.62 \qquad \Rightarrow f' = 1/f = 1/6.62 = 0.151$

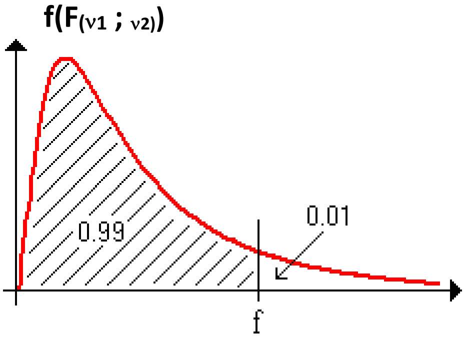
Table : Loi de Fisher-Snedecor

Valeur f de la variable de Fisher-Snedecor $F_{(\nu_1\,;\,\nu_2)}$
ayant la probabilité 0.01 d'être dépassée.

ν_1 : degrés de liberté du numérateur

ν_2 : degrés de liberté du dénominateur

$F(f) = P\,(\,F_{(\nu_1\,.\,\nu_2)} \le f\,) = 99\%$



ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	4052	4999	5403	5624	5763	5858	5928	5980	6022	6055	6083	6106	6125	6143	6156
2	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.41	99.42	99.42	99.43	99.43
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05	26.98	26.92	26.87
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.45	14.37	14.31	14.25	14.20
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.96	9.89	9.82	9.77	9.72
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	7.66	7.60	7.56
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	6.41	6.36	6.31
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	5.61	5.56	5.52
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	5.05	5.01	4.96
10	10.04	7.56	6.55	5.99	**5.64**	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	4.65	4.60	4.56
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	4.34	4.29	4.25
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	4.10	4.05	4.01
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96	3.91	3.86	3.82
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.75	3.70	3.66
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	3.61	3.56	3.52
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55	3.50	3.45	3.41
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46	3.40	3.35	3.31
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37	3.32	3.27	3.23
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.24	3.19	3.15
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.09
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17	3.12	3.07	3.03
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	3.07	3.02	2.98
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07	3.02	2.97	2.93
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	2.98	2.93	2.89
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	3.06	2.99	2.94	2.89	2.85
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96	2.90	2.86	2.81
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.99	2.93	2.87	2.82	2.78
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90	2.84	2.79	2.75
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.93	2.87	2.81	2.77	2.73
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84	2.79	2.74	2.70
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66	2.61	2.56	2.52

Exemple : $\nu_1 =$ 5 d.d.l. et $\nu_2 =$ 10 d.d.l. $P\,(\,F_{5\,.\,10} \le f\,) = 0.99 \Rightarrow f = 5.64$

Table Valeurs critiques du T de Wicoxon - Echantillons appariés

α	5%	2.5%	1%	0.5%
α^*	10%	5%	2%	1%
n				
6	2	0		
7	2	2		
8	5	3		0
9	8	5	2	1
10	10	8	4	3
11	13	10	7	5
12	17	**13**	9	9
13	21	17	12	9
14	25	21	15	12
15	30	25	19	15
16	35	29	23	19
17	41	34	27	23
18	47	40	32	27
19	53	46	37	32
20	60	52	43	37
21	68	59	48	43
22	75	66	53	49
23	83	73	61	55
24	92	81	68	61
25	101	89	76	68

n : nombre de différences non nulles
α : Niveau de signification, test unilatéral
α^* : Niveau de signification, test bilatéral

Hypothèses statistiques : Test bilatéral symétrique

H_0 : les échantillons ont des distributions identiques
H_1 :les échantillons ont des distributions différentes.

Exemple : n = 12, $\alpha^* = 5\%$: Rejet de H_0 si $T = \min(T^+;T^-) \leq T\alpha^* = 13$ (Test bilatéral)

نماذج اختبارات مع الحلول

جامعة الوادي

كلية العلوم الإقتصادية و التجارية و علوم التسيير

السنة أولى ل.م.د

الأثنين **2021/05/31**

المدة ساعة

امتحان السداسي الثاني: لمقياس إحصاء 2

الجزء الأول: 10 نقاط

بغرض معرفة تأثير وسيلة النقل التي يستخدمها العامل للالتحاق بعمله على ظاهرة التأخر عن العمل أجريت دراسة خاصة على مصنع يضم 100 عامل مقسمين إلى فئات:

الفئة الأولى: تضم 60 عامل يلتحقون بعملهم بواسطة الحافلات.

الفئة الثانية: تضم 15 عامل يلتحقون بعملهم بواسطة وسائلهم الخاصة.

الفئة الثالثة: تضم 25 يلتحقون مشيا على الاقدام.

قمنا باختيار أحد العمال عشوائيا:

1- فما احتمال أن يكون من الفئة الأولى؟

نرمز للفئة الأولى بـ A_1 (0,5) . وبالتالي احتمال أن يكون من الفئة الأولى هو:

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{60}{100} = 0,6$$

(1) (1)

2- فما احتمال أن يكون من الفئة الثانية؟

نرمز للفئة الثانية بـ A_2 (0,5) وبالتالي احتمال أن يكون العامل من الفئة الثانية هو:

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{15}{100} = 0,15$$

(1) (1)

3- فما احتمال أن يكون من الفئة الثالثة؟

نرمز للفئة الثالثة بـ A_3 (0,5) وبالتالي احتمال أن يكون العامل من الفئة الثالثة هو:

$$P(A_3) = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = \frac{25}{100} = 0,25$$

(1) (1)

4- فما احتمال أن يكون من الفئة الأولى و الثانية والثالثة ؟

احتمال أن يكون من الفئة الأولى و الثانية و الثالثة: $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ (0,5)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap_3) = \frac{|A_1 \cap A_2 \cap A_3|}{|\Omega|} = \frac{0}{100} = 0$$

(1) (1)

الجزء الثاني: 10 نقاط

كما أن بيانات الإدارة المصنع بينت أن:

10% من عمال الفئة الأولى يصلوا متأخرين عدة مرات في الشهر. $P(R/A_1) = 0,1$ (0,5)

و 2 % من عمال الفئة الثانية يصلون متأخرين عدة مرات في الشهر. $P(R/A_2) = 0,02$ (0,5)

وأن 5% من عمال الفئة الثالثة يصلون متأخرين عدة مرات في الشهر. $P(R/A_3) = 0,05$ (0,5)

نرمز لظاهرة التأخر بالرمز R، نختار عامل عشوائيا .

1. ما هو احتمال أن يكون قد وصل متأخرا .

حساب احتمال أن يكون قد وصل متأخرا:

$$P(R) = P(R \cap A_1) + P(R \cap A_2) + P(R \cap A_3)$$

(1)

$$P(R) = P(R/A_1) \cdot P(A_1) + P(R/A_2) \cdot P(A_2) + P(R/A_3) \cdot P(A_3)$$

(0,5)

$$P(R) = (0,6 \times 0,1) + (0,15 \times 0,02) + (0,25 \times 0,05)$$

$$\boxed{P(R) = 0,075}$$

(1)

2. إذا تبين أنه وصل متأخرا فما هو احتمال أن يكون من الفئة الأولى.

إذا وصل متأخرا، فاحتمال أن يكون من الفئة الأولى:

$$P(A_1/R) = \frac{P(A_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{0,6 \times 0,1}{0,075} = 0,8$$

(1) (1)

3. إذا تبين أنه وصل متأخرا فما هو احتمال أن يكون من الفئة الثانية.

إذا وصل متأخرا، فاحتمال أن يكون من الفئة الثانية:

$$P(A_2/R) = \frac{P(A_2 \cap R)}{P(R)} = \frac{0,15 \times 0,02}{0,075} = 0,04$$

(1) (1)

4. إذا تبين أنه وصل متأخرا فما هو احتمال أن يكون من الفئة الثالثة .

إذا وصل متأخرا، فاحتمال أن يكون من الفئة الثالثة:

$$P(A_3/R) = \frac{P(A_3 \cap R)}{P(R)} = \frac{0,25 \times 0,05}{0,075}$$

(1)

$$= 0,16$$

(1)

بالتوفيق للجميع

جامعة الوادي

كلية العلوم الإقتصادية و التجارية و علوم التسيير

السنة أولى ل.م.د

الأربعاء 2020/10/28

المدة ساعة

امتحان السداسي الثاني: لمقياس إحصاء 2

التمرين الأول: (10 نقاط)

أعلنت جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي عن فتح مسابقة توظيف على أساس الشهادة، حيث سيتم اختيار 2 موظفين برتبة مهندس دولة و 3 موظفين برتبة تقني سامي، فتقدم للمسابقة على التوالي:

المترشحين برتبة مهندس دولة: A B C D

المترشحين برتبة تقني سامي: E R T F G H J K L M

المطلوب:

1. ما هو احتمال اختيار المترشح A للوظيفة برتبة مهندس دولة ؟.
2. ما هو احتمال عدم اختيار المترشح A للوظيفة برتبة مهندس دولة ؟.
3. ما هو احتمال اختيار المترشح M للوظيفة برتبة تقني سامي ؟.
4. ما هو احتمال عدم اختيار المترشح M للوظيفة برتبة تقني سامي ؟.

حل التمرين الأول:

① إحتمال إختيار المترشح A للوظيفة برتبة مهندس دولة :

نعرف الحدث A هو اختيار المترشح A للوظيفة.

حيث أن مجموعة الحالات الممكنة والكلية :

$\Omega = \{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$ 1

أما المجموعة A :

$A = \{AB, AC, AD\}$ 1

ومنه $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = 0{,}5$ 1 1

كما يمكن حسابه باستخدام التوفيقة

$P(A) = \frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_4^2} = \frac{1 \times 3}{6} = \frac{3}{6} = 0{,}5$ 1 1

② إحتمال عدم إختيار المترشح A للوظيفة برتبة مهندس دولة :

نقوم بحسابه باستخدام قاعدة حساب احتمال الحدث المعاكس :

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ 1

$= 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ 1

③ احتمال اختيار المترشح M للوظيفة برتبة تقني سامي :

نرمز للحدث اختيار المترشح M للوظيفة برتبة تقني سامي ب M

بحيث : $P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|}$ 1

ولحساب عدد الحالات الملائمة $|M|$ ، وعدد الحالات الممكنة $|\Omega|$ نستخدم التوفيقة

ومنه : $P(M) = \frac{C_1^1 \times C_9^2}{C_{10}^3} = \frac{1 \times 36}{120} = 0{,}3$ 1 1

$P(M) = 0{,}3$

④ إحتمال عدم اختيار المترشح M للوظيفة برتبة تقني سامي :

$P(\bar{M}) = 1 - P(M)$ 1

قاعدة حساب احتمال الحدث المعاكس

ومنه $P(\bar{M}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ 1

حيث أن $\bar{M}$ الحدث المعاكس لـ M .

التمرين الثاني: (10 نقاط)

تم اختيار عينة عشوائية حجمها 100 من خريجي جامعة الوادي، حسب التخصص ونوع المهنة:

المهنة / التخصص	قطاع حكومي B1	قطاع خاص B2	عمل حر B3	$\sum$
علوم تكنولوجيا A1	15	10	05	30
علوم اجتماعية A2	10	17	08	35
علوم اقتصادية A3	12	13	10	35
$\sum$	37	40	23	100

فإذا اختير أحد الخريجين بطريقة عشوائية،

المطلوب: أحسب كل من:

1. احتمال أن يكون من تخصص العلوم الاقتصادية؟.
2. احتمال أن يكون من تخصص العلوم الاقتصادية ويعمل بالقطاع الخاص ؟.
3. احتمال أن يكون من خريجي علوم تكنولوجيا أو من خريجي العلوم الاجتماعية؟.
4. إذا علم أن الفرد من خريجي العلوم الاقتصادية. فما احتمال أن يكون مما يعملون عملا حرا؟.
5. إذا علم أن الفرد أنه يعمل بالقطاع الحكومي، فما احتمال أن يكون من تخصص العلوم الاجتماعية؟.

حل التمرين الثاني:

① احتمال أن يكون من تخصص العلوم الاقتصادية :

$$P(A_3) = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = \frac{35}{100} = 0,35 \quad (١) \quad (١)$$

② احتمال أن يكون من تخصص العلوم الاقتصادية ويعمل بالقطاع الخاص :

$$P(A_3 \cap B_2) = \frac{|A_3 \cap B_2|}{|\Omega|} = \frac{13}{100} = 0,13 \quad (١) \quad (١)$$

③ احتمال أن يكون علوم تكنولوجيا أو من خريجي العلوم الاجتماعية :

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - \underbrace{P(A_1 \cap A_2)}_{0}$$

$$= \frac{|A_1|}{|\Omega|} + \frac{|A_2|}{|\Omega|} \quad (١)$$

$$= \frac{30}{100} + \frac{35}{100} = 0,65 \quad (١)$$

④ احتمال أن يكون ممن يعملون عملا حرا ، وهو من خريجي العلوم الاقتصادية :

$$P(B_3/A_3) = \frac{P(B_3 \cap A_3)}{P(A_3)} \quad (١)$$

$$= \frac{\frac{10}{100}}{\frac{35}{100}} = \frac{10}{35}$$

$$P(B_3/A_3) = 0,286 \quad (١)$$

⑤ احتمال أن يكون من تخصص العلوم الاجتماعية ، وهو يعمل بالقطاع الحكومي

$$P(A_2/B_1) = \frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(B_1)} \quad (١)$$

$$= \frac{10/100}{37/100} = \frac{10}{37}$$

$$P(A_2/B_1) = 0,270 \quad (١)$$

بالتوفيق للجميع

جامعة الوادي
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير
السنة أولى ل.م.د

يوم: 02 مـــاي 2016
المدة: ساعة و نصف

التصحيح النموذجي لإمتحان مقياس: إحصاء (2)

التمرين الأول: (06 نقاط)

نضع الحدث A_1 يمثل من تحمل شهادة جامعية
" " A_2 من لا تحمل شهادة جامعية
" " B_1 يمثل من لديها خبرة
" " B_2 يمثل من ليس لديها خبرة.

1) حساب احتمال أن تكون ممن لا يحملن شهادة جامعية

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{70}{100} = 0{,}7$$

(1) (1)

2) حساب احتمال أن تكون لديها خبرة أو تحمل شهادة جامعية:

(1) $$P(B_1 \text{ ou } A_1) = P(B_1) + P(A_1) - P(B_1 \cap A_1)$$

$$= \frac{|B_1|}{|\Omega|} + \frac{|A_1|}{|\Omega|} - \frac{|B_1 \cap A_1|}{|\Omega|} = \frac{60}{100} + \frac{30}{100} - \frac{20}{100} = 0{,}7$$

(1)

3) إذا علم أن لديها خبرة، فما احتمال أن تكون ممن لا يحملن شهادة جامعية:

$$P(A_2/B_1) = \frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(B_1)}$$

(1)

$$= \frac{40/100}{60/100} = \frac{40}{60} = 0{,}67$$

(1)

التمرين الثاني: (08 نقاط)

1) طبيعة ونوع المتغير X :

X : يمثل الانتاج السنوي من التمور وهو متغير كمي متصل يأخذ قيم حقيقية ($X \in \mathbb{R}$) . 0,25 0,25

2) • مجال تعريف X : $X \in [0 , 120]$ الوحدة بالطن 0,5

• ايجاد قيمة α حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \quad 0,5 \quad \Rightarrow \underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx}}_{0} + \int_{0}^{120} f(x)\,dx + \underbrace{\cancel{\int_{120}^{+\infty} f(x)\,dx}}_{0} = 1$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{120} \frac{1}{\alpha} x \, dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{120} = 1$$

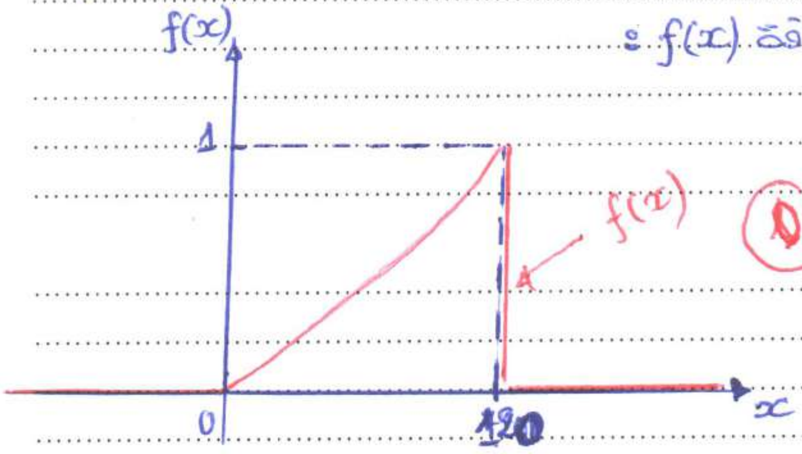
$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{2}(120)^2 - \frac{1}{2}(0)^2\right] = 1 \quad 0,5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\left[7200\right] = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 7200}$$

ومنه دالة الكثافة $f(x)$ هي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7200}x & x \in [0 - 120] \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

• التمثيل البياني لدالة الكثافة $f(x)$:



3) دالة التوزيع الاحتمالية :

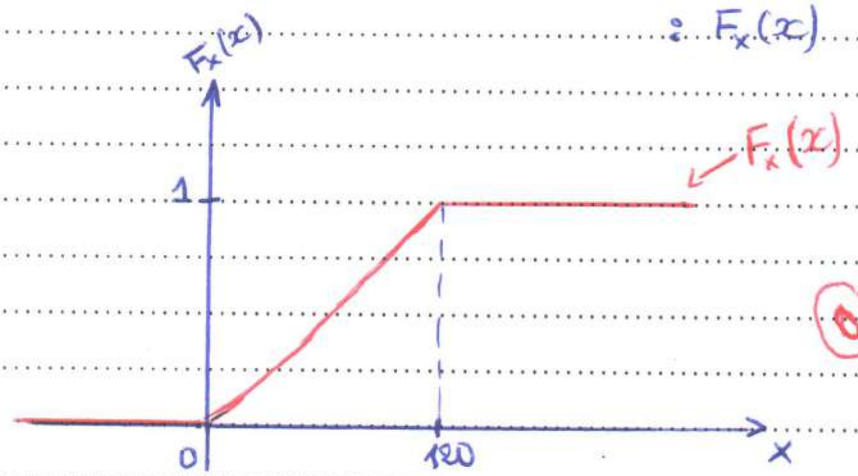
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{1}{14400}x^2 & 0 \leq X < 120 \\ 1 & X \geq 120 \end{cases} \quad 0,5$$

تابع لتمرين الثاني: (08 نقاط)

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{120} \frac{1}{7200}\, x \, dx = \frac{1}{7200}\int_{-\infty} x \, dx = \frac{1}{7200} \cdot \frac{1}{2} x^2$$

$$= \frac{1}{14400} x^2$$

• التمثيل البياني لـ $F_x(x)$:



4) • حساب متوسط الانتاج من التمور:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \;(0,5) = \int_0^{120} x \cdot \frac{1}{7200}\, x \, dx = \frac{1}{7200}\int_0^{120} x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{7200}\left[\frac{1}{3}(x^3)\right]_0^{120}$$

$$= \frac{1}{7200}\left[\frac{1}{3}(120)^3 - \frac{1}{3}(0)^3\right]$$

$= 80$ طن (0,5)

ومنه المتوسط السنوي لانتاج هاته المؤسسة 80 طن.

• حساب الانحراف المعياري:

(0,5)

$$S(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{800} \simeq 28,28 \;(0,5)$$

التباين

$$(0,5)\; V(X) = E(X)^2 - (E(X))^2 = 7200 - (80)^2 = 800 \;(0,5)$$

$$E(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^{120} x^2 \cdot \frac{1}{7200} \cdot x \, dx = \frac{1}{7200}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{120}$$

$$= \frac{1}{7200}\left[\frac{(120)^4}{4} - \frac{(0)^4}{4}\right] = 7200$$

(0,5)

• احتمال أن يبلغ إنتاج هذه المؤسسة مابين 70 و 60 طن:

$$P(60 \leq X \leq 70) = \int_{60}^{70} f(x)\, dx = \frac{1}{7200}\int_{60}^{70} x \, dx = \frac{1}{7200}\left[x^2\right]_{60}^{70} = \frac{1}{7200}\left[(70)^2 - (60)^2\right]$$

$$= \frac{1}{7200}\left[1300\right] = 0,18 \;(0,5)$$

(0,5)

أي أن نسبة انتاج هاته المؤسسة مابين 60 و70 طن هي 18%

التمرين الثالث: (06 نقاط)

1) قيم المتغير X :

X : يمثل عدد السيارات المستعملة $X \in \{0, 1, 2, 3\}$ 0,5

• قانون التوزيع الاحتمالي لـ X هو توزيع ثنائي الحدين 0,5

• دالة الكثافة الاحتمالية لـ X هي :

$f(x) = P(X=x) = C_n^x \cdot (P)^x \cdot (1-P)^{n-x}$ 0,5

حيث : $n = 18$ ، $P = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

2) حساب احتمال أن تحتوي العينة على 3 سيارات مستعملة على الأكثر :

$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$ 0,5

$= 0,00067 + 0,006 + 0,026 + 0,069 = 0,1017$ 0,5

$P(X=0) = C_{18}^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right)^{18-0} = 0,00067$

$P(X=1) = C_{18}^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right)^{18-1} = 0,006$ 0,5

$P(X=2) = C_{18}^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1-\frac{1}{3}\right)^{18-2} = 0,026$

$P(X=3) = C_{18}^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(1-\frac{1}{3}\right)^{18-3} = 0,069$

3) حساب احتمال أن تحتوي العينة على 4 سيارات مستعملة على الأقل :

$P(X \geq 4) = P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,1017 = 0,8983$ 0,5 0,5

4) التوقع الرياضي لـ X هو :

$E(X) = n \cdot p = 18 \times \frac{1}{3} = 6$ 0,5

الانحراف المعياري لـ X هو : $\delta(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{4} = 2$ 0,5 0,5

$V(X) = n \cdot p \cdot q = 18 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 4$ 0,5

بالتوفيق للجميع