جامعة الشهيد حمه لخضر الوادي	**كلية العلوم الدقيقة**	**قسم الرياضيات**
السنة الثانية رياضيات	**تصحيح الفرض الثاني في مقياس التحليل المركب**	2023/05/16

التمرين الأول(10):

a) اعط نشر لوران للدالة f حيث $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^4}$ في جوار النقطة الشاذة المعزولة و ما نوعها؟

الاجابة: النقطة الشاذة المعزولة للدالة f هي $z=0$ .....1 و لدينا نشر $\cos z$ في جوار $z=0$ هو

$$\cos z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \text{......1} \quad \text{و بالتالي} \quad \frac{\cos z}{z^4}=\frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \text{....... 1} \quad \text{أي}$$

$$\frac{\cos z}{z^4}=\frac{1}{z^4}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+....+\frac{(-1)^n z^{2n-4}}{(2n)!}+... \text{ ....1}$$

وهو نشر لوران للدالة f في جوار $z=0$ و جزؤه الاساسي يشتمل على عدد منته من الحدود و بالتالي نوع النقطة الشاذة المعزولة $z=0$ للدالة f هي قطب من الرتبة الرابعة 1

b) نفس السؤال من أجل الدالة g حيث $g(z)=\dfrac{\sin z-1}{2z-\pi}$

الاجابة: النقطة الشاذة المعزولة للدالة g هي $z=\pi/2$ 1

و للنشر في جوار $z=\pi/2$ نضع $z'=z-\pi/2 \Rightarrow z=z'+\pi/2$ 1

وبالتالي

$$\frac{\sin z-1}{2z-\pi}=\frac{\sin(z'+\pi/2)-1}{2z'}=\frac{\cos z'-1}{2z'} \text{ ....1}$$

$$=\frac{-1+\cos z'}{2z'}=\frac{1}{2z'}\left(-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z'^{2n}}{(2n)!}\right)=\frac{1}{2z'}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n z'^{2n}}{(2n)!}\right) \text{ ....1}$$

$$=-\frac{z'}{4}+\frac{z'^3}{2\times 4!}+....+\frac{(-1)^n z'^{2n-1}}{2(2n)!}+...$$

$$=-\frac{z-\pi/2}{4}+\frac{(z-\pi/2)^3}{2\times 4!}+....+\frac{(-1)^n (z-\pi/2)^{2n-1}}{2(2n)!}+... \text{ ....1}$$

وهو نشر لوران للدالة g في جوار $z=\pi/2$ و جزؤه الاساسي لا يشتمل أي حد و بالتالي نوع النقطة الشاذة المعزولة $z=\pi/2$ للدالة g هي نقطة الشاذة قابلة للرفع. 1

التمرين الثاني(10):

ا) احسب التكامل $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{Re}(z)}{z^2+1} dz$ حيث γ يمثل النصف العلوي للدائرة $c = \{z \in C : |z| = 2\}$.

الاجابة: نضع $z = 2e^{it}$ ، حيث $0 \le t \le \pi$ ....1 و $dz = 2ie^{it} dt$ ، كذلك $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ...2

و بالتالي:

$$\int_{\gamma} \frac{2\operatorname{Re}(z)}{z^2+4} dz = \int_{\gamma} \frac{z+\bar{z}}{z^2+4} dz = \int_0^{\pi} \frac{2e^{it}+2e^{-it}}{4e^{2it}+4} 2ie^{it} dt \quad \text{........................2}$$

$$= i\int_0^{\pi} \frac{4e^{2it}+4}{4e^{2it}+4} dt = \int_0^{\pi} idt = i\pi \quad \text{........................1}$$

ب) احسب التكامل $\oint_c \frac{\sin^6 z}{(z-\pi/6)^2}$ حيث $c = \{z \in C : |z| = \sqrt{2}\}$

النقطة $z = \pi/6$ داخل الدائرة c.................1 و بالتالي وبتطبيق صيغة كوشي 1

$$\oint_c \frac{\sin^6 z}{(z-\pi/6)^2} = \frac{2i\pi}{1!} \left(\sin^6 z\right)' \Big|_{z=\pi/6} = 12i\pi \sin^5 z \cos z \Big|_{z=\pi/6} = \frac{3i\pi\sqrt{3}}{16} \quad \text{........2}$$