جـامـعة الــوادي		**كـلــية العـــلوم الدقيقة**
قسم الرياضات	**السنة الثانية رياضيات**	**2023/2022**
تصحيح سلسلة الأعمال الموجهة في مقياس التحليل المركب - السلسلة -V-		

التمرين الاول:

انشر إلى سلسلة صحيحة كل من الدوال التالية و ذلك حسب النقطة المرفقة بها:

$e^{-z}, z=0$ أي $e^{-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-z)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!}$

$\cos z, z=\pi/2$ نضع $z'=z-\pi/2 \Leftarrow z=z'+\pi/2$ يصبح النشر في جوار z' نشر ماكلوران أي النشر في جوار الصفر

$$\cos z=\cos(z'+\pi/2)=-\sin z'=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z'^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1} z'^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\ln(1+1/z), z=+\infty$ بوضع $1/z=w$ يصبح النشر في جوار w نشر ماكلوران

$$\ln(1+1/z)=\ln(1+w)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}w^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{nz^n}$$

$\frac{z+3}{(z+1)(z-4)}, z=2$ بوضع $z'=z-2$ يصبح النشر في جوار z' نشر ماكلوران

$$\frac{z+3}{(z+1)(z-4)}=\frac{z'+5}{(z'+3)(z'-2)}=\frac{(z'+5)}{5}\left(\frac{1}{z'-2}-\frac{1}{z'+3}\right)$$

$$=\frac{z'+5}{5}\left(\frac{-1}{2}\times\frac{1}{1-z'/2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{1+z'/3}\right)=\frac{z'+5}{5}\left(\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z'}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z'}{3}\right)^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}}+\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right)z'^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}}+\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right)\frac{z'^{n+1}}{5}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}}+\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right)(z-2)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}}+\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right)\frac{(z-2)^{n+1}}{5}$$

ب. بن علي

التمرين الثالث:

تعين النقاط الشاذة للتوابع التالية:

$f(z)=\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ ، النقطة الشاذة للتابع $f(z)$ النقطة $z=0$ و

$\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{\sqrt{z}\to 0}\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=1$ و التالي النقطة الشاذة قابلة للرفع

، $g(z)=\frac{3z+2}{z^2+2z+5}$ لتحديد النقاط الشاذة نحل المعادلة

$z^2+2z+5=0 \Rightarrow z'=-1-2i, z''=-1+2i$ أي للدالة $g(z)$ نقطتين شاذتين و

$$\lim_{z\to -1-2i}(z+1+2i)\frac{3z+2}{z^2+2z+5}=\lim_{z\to -1-2i}\frac{3z+2}{z+1-2i}=\frac{-1-4i}{-4i}=\frac{4-i}{4}\neq 0$$

و منه نستنتج أن النقطة الشاذة $z=-1-2i$ قطب بسيط ، كذلك

$$\lim_{z\to -1+2i}(z+1-2i)\frac{3z+2}{z^2+2z+5}=\lim_{z\to -1-2i}\frac{3z+2}{z+1+2i}=\frac{-1+4i}{4i}=-\frac{4+i}{4}\neq 0$$

و منه نستنتج أن النقطة الشاذة $z=-1+2i$ قطب بسيط

، $h(z)=e^{1/(z-1)^2}$ ، النقطة الشاذة للتابع $h(z)$ النقطة $z=1$ و

$\lim\limits_{z\xrightarrow{><}1} h(z)=\lim\limits_{z\xrightarrow{><}1} e^{1/(z-1)^2}=+\infty$ و التالي النقطة الشاذة قابلة للرفع

$k(z)=\frac{\ln(z-2)}{(z^2+2z+2)^4}$ النقطة الشاذة $z=2$ نقطة تفرع للتابع $k(z)$ ، كذلك النقطتين الشاذتين

$z^2+2z+2=0 \Leftrightarrow z=-1, z=-2$ كل منهما قطب من الرتبة الرابعة لأن

$$\lim_{z\to -1}(z+1)^4 k(z)=\lim_{z\to -1}\frac{\ln(z-2)}{(z+2)^4}=\frac{\ln(3e^{i\pi})}{1}=\ln 3+i\pi$$ و

$$\lim_{z\to -2}(z+2)^4 k(z)=\lim_{z\to -2}\frac{\ln(z-2)}{(z+1)^4}=\frac{\ln(4e^{i\pi})}{1}=\ln 4+i\pi$$

التمرين الخامس:

النشر إلى $1>|z|$ سلسلة لوران التابع التالي $f(z)=\frac{z}{(z-2)(z+1)}$

يمكن كتابة $f(z)$ على الشكل: $f(z)=\frac{z}{3}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+1}\right)$

1) حالة $|z|<1$: لدينا

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-z/2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n} \quad \text{و} \quad \frac{1}{z+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}z^{n}$$

و منه $f(z)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^{n}-\frac{1}{2^{n+1}}\right]z^{n+1}$ و هو نشر لوران لا يحتوي على الجزء الاساس و يحتوي على الجزء الصحيح فقط

2) حالة $1<|z|<2$: لدينا $1<|z|\Rightarrow\frac{1}{|z|}<1$ و منه

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\times\frac{1}{1+1/z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{z^{n}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{z^{n+1}}$$

و أما $|z|<2\Rightarrow|z|/2<1$ و بالتالي

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-z/2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}$$

و منه $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-z^{n}}{2^{n+1}}$

و هو نشر لوران يحتوي على الجزء الاساس و الجزء الصحيح

3) حالة: $2<|z|\Rightarrow 2/|z|<1$ أي:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\times\frac{1}{1-2/z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n}}{z^{n+1}}$$

و منه $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n}}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[2^{n}+(-1)^{n}\right]\frac{1}{z^{n+1}}$ ، و هو نشر لوران مقتصر على الجزء الاساس أي من غير الجزء الصحيح

<u>التمرين السادس:</u>

ايجاد حلقة التقارب للسلاسل التالية:

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-n}(z+1)^{n}$ ، نستخدم مقياس كوشي $R=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{e^{-n}}}=e$

كذلك $\rho=\frac{1}{R}=\frac{1}{e}$ و منه نستنتج حلقة التقارب كذلك $\rho=\frac{1}{e}<|z|<e=R$

، $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}2^{-n^{2}}z^{n^{2}}$ ، نستخدم مقياس كوشي $R=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2^{-n^{2}}}}=\lim_{n\to+\infty}2^{n}=+\infty$

كذلك $\rho=\frac{1}{R}=0$ و منه نستنتج حلقة التقارب كذلك $\rho=0<|z|<+\infty=R$

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{3^{n}(z-1)^{2n}}{n^{2}+1}$ ، نستخدم مقياس دالبير $R=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n}}{n^{2}+1}\times\frac{(n+1)^{2}+1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}$

كذلك $3=\frac{1}{R}=\rho$ و كذلك $\rho=3>|z|>\frac{1}{3}=R$ و منه نستنتج لا توجد حلقة التقارب

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2+1}$ ، نستخدم مقياس دالبير $R=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2+1}\times\frac{(n+1)^2+1}{1}=1$

كذلك $1=\frac{1}{R}=\rho$ و كذلك $\rho=1<|z|<1=R$ وهذا خطاء و منه نستنتج لا توجد حلقة التقارب .

التمرين الثامن:

انشر إلى سلسلة لوران حسب $z-a$ في النطاقات المناسبة للدوال التالية:

$\frac{ze^{2z}}{z-1}, a=1$ ، بوضع $z'=z-1\Rightarrow z=z'+1$

$$\frac{ze^{2z}}{z-1}=\frac{(z'+1)e^{2(z'+1)}}{z'}=\frac{(z'+1)e^2}{z'}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2z')^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n e^2}{n!}z'^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n e^2}{n!}z'^{n-1}$$

$=\frac{e^2}{z'}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n e^2}{n!}z'^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n e^2}{n!}z'^n$ السلسلة الاولى نستبدل $n-1$ بـ n نجد

$$=\frac{e^2}{z'}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}e^2}{(n+1)!}z'^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n e^2}{n!}z'^n=\frac{e^2}{z'}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)\frac{2^n e^2}{n!}z'^n$$

وفي الاخير هذا هو النشر في جوار الـ 1 $\frac{ze^{2z}}{z-1}=\frac{e^2}{z-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)\frac{2^n e^2}{n!}(z-1)^n$

$\cos\frac{1}{z}+\frac{z}{z-1}, a=0$ ، لدينا نشر $\frac{z}{z-1}$ في جوار الصفر هو $-z\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}-z^{n+1}$

كذلك نشر $\cos\frac{1}{z}$ في جوار الصفر هو $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}}$ و بالتالي نشر لوران للعبارة

المعطاة في جوار الصفر هو $\cos\frac{1}{z}+\frac{z}{z-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}}+1-\sum_{n=0}^{+\infty}z^{n+1}$

$\frac{z}{z^2+2z+1}, a=0$ و اضح أن $z^2+2z+1=(z+1)^2$ و بالتالي:

$$\frac{z}{z^2+2z+1}=\frac{z}{(z+1)^2}=-z\left(\frac{1}{z+1}\right)'=-z\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n\right)'$$

$$=-z\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n nz^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}nz^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+2}(n+1)z^{n+1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)z^{n+1}$$

و هو نشر لوران لا يشتمل على الجزء الاساس

التمرين العاشر:

أوجد سلسلة لوران في جوار النقطة الشاذة المبينة لكل من الدوال التالية ثم عين نوعها في كل حالة ومنطقة تقارب كل سلسلة:

$\dfrac{e^z}{(z-1)^2}, z=1$ ، بوضع $z'=z-1\Rightarrow z=z'+1$ و بالتالي:

$$\frac{e^z}{(z-1)^2}=\frac{e^{z'+1}}{z'^2}=\frac{ee^{z'}}{z'^2}=\frac{e}{z'^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z'^n}{n!}=\frac{e}{z'^2}+\frac{e}{z'}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{ez'^{n-2}}{n!}$$

$$=\frac{e}{z'^2}+\frac{e}{z'}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{ez'^n}{(n+2)!}=\frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{z-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e(z-1)^n}{(n+2)!}$$

و هو نشر لوران و جزؤه الاساس يشتمل على عدد منته من الحدود و بالتالي النقطة الشاذة قطب من الرتبة الثانية و منطقة تقاربها الحلقة

$R=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e}{(n+2)!}\times\dfrac{(n+3)!}{e}=\lim\limits_{n\to+\infty}(n+3)=+\infty$ كذلك $\rho=\dfrac{1}{R}=0$

أي الحلقة $A=\{z\in C:0<|z|<+\infty\}$.

$\sin\dfrac{1}{z+2}, z=-2$ ، ، بوضع $z'=z+2\Rightarrow z=z'-2$ و بالتالي:

$$\sin\frac{1}{z+2}=\sin\frac{1}{z'}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,z'^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-2)^{2n+1}}$$

و هو نشر لوران و جزؤه الاساس يشتمل على عدد غير منه من الحدود و بالتالي النقطة الشاذة اساسية و منطقة التقارب الحلقة $A=\{z\in C:0<|z|<+\infty\}$.

$\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}, z=-1$ ، بوضع $z'=z+1\Rightarrow z=z'-1$ و بالتالي:

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{z'-1}{z'(z'+1)}=\frac{z'-1}{z'}\times\frac{1}{z'+1}=\frac{z'-1}{z'}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z'^n$$

$$=\frac{-1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}z'^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z'^n=-\frac{1}{z'}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+2}z'^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z'^n$$

$$=-\frac{1}{z'}+\sum_{n=0}^{+\infty}2(-1)^n z'^n=\frac{-1}{z+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}2(-1)^n(z+1)^n$$

و هو نشر لوران و جزؤه الاساس يشتمل على عدد منته من الحدود و بالتالي النقطة الشاذة قطب بسيط و منطقة تقاربها الحلقة

$R=\lim\limits_{n\to+\infty}2\times\frac{!}{2}=1$ كذلك $\rho=\frac{1}{R}=1$ ، أي الحلقة

$\frac{1-\cos z}{z}, z=0$ ، لدينا $\cos z=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ و بالتالي:

$$\frac{1-\cos z}{z}=\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-1}}{(2n)!}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}+\frac{z^2}{2z}-\frac{z^4}{4!z}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n)!}$$

أي $\frac{1-\cos z}{z}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n)!}$ و هو نشر لوران و جزؤه الاساس لا يشتمل على أي حد من الحدود و بالتالي النقطة الشاذة قابلة للرفع و منطقة تقاربها الحلقة أي الحلقة $A=\{z\in C:0<|z|<+\infty\}$.

$z^{-1}\cosh z^{-1}, z=0$ ، لدينا $\cosh z^{-1}=\frac{e^{z^{-1}}+e^{-z^{-1}}}{2}$ و

$$e^{z^{-1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{-n}}{n!}, e^{-z^{-1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-z)^{-n}}{n!}=e^{-z^{-1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{-n}}{n!}$$ و بالتالي

$$\cosh z^{-1}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{-n}}{n!}+e^{z^{-1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{-n}}{n!}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{2z^{-2}}{2!}+\frac{2z^{-4}}{4!}+\ldots+\frac{2z^{-2n}}{(2n)!}+\ldots\right)$$

أي $$chz^{-1}=\cosh z^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{-2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(z^{-1}\right)^{2n}}{(2n)!}=e^{z^{-1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!z^{2n}}$$ و منه

$$z^{-1}\cosh z^{-1}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!z^{2n}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!z^{2n+1}}=\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^3}+\frac{1}{4!z^5}+\ldots+\frac{1}{(2n)!z^{2n+1}}+\ldots$$

و هو نشر لوران و جزؤه الاساسي يشتمل على عدد غير منه من الحدود و بالتالي النقطة الشاذة اساسية و منطقة التقارب الحلقة $A=\{z\in C:0<|z|<+\infty\}$.

$z^2e^{-z^4}, z=0$ لدينا و $e^{-z^4}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{4n}}{n!}$

ب. بن علي

و بالتالي: $z^2e^{-z^4} == \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{4n+2}}{n!} = z^2 - \frac{z^6}{2!} + \frac{z^{10}}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n z^{4n+2}}{n!} + \ldots$

و هو نشر لوران و جزؤه الاساس لا يشتمل على أي حد من الحدود و بالتالي النقطة الشاذة قابلة للرفع و منطقة تقاربها الحلقة

أي الحلقة $A = \{z \in C : 0 < |z| < +\infty\}$.

ب. بن علي