جـامـعة الــوادي		كـلـية العـــلوم الدقيـــــقة
قسم الرياضيات	السنة الثانية رياضيات	2023/2022
تصحيح سلسلة الأعمال التطبيقية في مقياس دوال المتغير المركب - السلسلة -IV-		

التمرين الأول: 1) احسب التكاملات التالية:

$$\int_0^{\pi/4} e^{is}ds=\int_0^{\pi/4}(\cos s+i\sin s)ds=\int_0^{\pi/4}\cos s ds+i\int_0^{\pi/4}\sin s ds$$

$$=[\sin s-i\cos s]_0^{\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\left(\frac{\sqrt{2}-2}{2}\right)$$

$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)s}ds, m,n\in IN$ نميز حالتين: ا) إذا كان $m=n$ فإن $\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)s}ds=\int_0^{2\pi}ds=2\pi$

ب) و أما إذا كان $m\neq n$ فإن $\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)s}ds=\left[\frac{e^{i(m-n)s}}{i(m-n)}\right]_0^{2\pi}=\frac{e^{2i(m-n)\pi}-1}{i(m-n)}=0$

(2 $\int_{(0,3)}^{(2,4)}(2y+x^2)dx+(3x-y)dy$ على مسار قطع المكافئ $y=s^2+3, x=2s$

من الثنائيتين $(0,3)$ ، $(2,4)$ و من المساوتين $y=s^2+3, x=2s$ نستنتج أن s تتغير من 0 الى1 و بالتالي:

$$\int_{(0,3)}^{(2,4)}(2y+x^2)dx+(3x-y)dy=\int_0^1(6s^2+6)2ds+(6s-s^2-3)2sds$$

$$\int_0^1(-2s^3+24s^2-6s+12)ds=\left[\frac{-1}{2}s^4+8s^3-3s^2+12s\right]_0^1=16{,}5$$

ثم على مسار القطعة المستقيمة في كل حالة مما يلي: 1) $(0,2),(1,2)$ ، 2) $(3,2),(3,4)$ ، 3) $(0,3),(2,4)$

نحدد معادلات حوامل القطع المستقيمة الثلاث

1) $y=2$ ، 2) $x=3$ ، 3) $y=\frac{1}{2}x+3$ و بالتالي يكون حساب التكامل في كل حالة كالتالي: 1)

$$\int_{(0,2)}^{(1,2)}(2y+x^2)dx+(3x-y)dy=\int_0^1(4+x^2)dx=\left[4x+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{13}{3}$$

2)

$$\int_{(3,2)}^{(3,4)}(2y+x^2)dx+(3x-y)dy=\int_2^4(9-y)dy=\left[9y-\frac{y^2}{2}\right]_2^4=12$$

$$\int_{(0,3)}^{(2,4)}\left(2y+x^2\right)dx+(3x-y)dy=\int_0^2\left(x^2+x+6\right)dx+0.5(2.5x-3)dx \quad (3$$

$$=\int_0^2\left(x^2+2.25x+4.5\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{2.25}{2}x^2+4.5x\right]_0^2=\frac{40.5}{3}$$

التمرين الثاني:

1) احسب التكامل $\int_0^{1+i}\bar{z}dz$ على المسارين $z=0$ إلى $z=1$ ثم من $z=1$ إلى $z=1+i$

$$\int_0^{1+i}\bar{z}dz=\int_0^1\bar{z}dz+\int_1^{1+i}\bar{z}dz=\int_0^1 xdx+\int_0^1 i(1-iy)dy=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+i\left[y-i\frac{y^2}{2}\right]_0^1=1+i$$

ثم التكامل $\int_\gamma \mathrm{Re}(z)dz$ حيث γ المسار المضلع من $z=0$ إلى $1+i$ ثم من $1+i$ إلى $z=2$

المسار الاول معادلته $y=x$ و المسار الثاني $y=-x+2$ و بالتالي:

$$\int_\gamma \mathrm{Re}(z)dz=\int_0^1 x(1+i)dx+\int_1^2 x(1-i)dx=\frac{(1+i)}{2}+\frac{3(1-i)}{2}=2-i$$

احسب التكامل $\int_\gamma\left(z^2+1\right)dz$ حيث γ يمثل اتحاد المسارين: المستقيم الذي يشمل النقطتين

$z_1=-1+i$ و $z_2=1+i$ ونصف الدائرة الايسر ذات المعادلة من $|z-1|=1$

أي أن المنحنى يتكون من القطعة المستقيمة التي حاملها ذي المعادلة $y=1$ و نصف الدائرة

الايسر ذات المعادلة من $|z-1|=1$ أي $z=1+e^{i\theta}\Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta,-\pi/2\le\theta\le\pi/2$

$$\int_\gamma\left(z^2+1\right)dz=\int_{oA}\left[(x+i)^2+1\right]dx+\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\left[\left(e^{i\theta}+1\right)^2+1\right]ie^{i\theta}d\theta$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[(x+i)^2+1\right]dx+\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\left[\left(e^{i\theta}+1\right)^2+1\right]ie^{i\theta}d\theta$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[x^2+2ix\right]dx+i\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\left[e^{3i\theta}+2e^{2i\theta}+2e^{i\theta}\right]d\theta$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}ix^2\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{e^{3i\theta}}{3}+e^{2i\theta}+2e^{i\theta}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{2}{3}+2i$$

2) من أجل $n \in Z$ و $r \geq 0$ لنحسب التكامل $\int_{|z|=r} z^n dz$ لدينا $z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

نميز حالتين

إذا كان $n \neq -1$ ، $\int_{|z|=r} z^n dz = i\int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta = \frac{r^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)\theta}\Big|_0^{2\pi} = 0$

و إذا كان $n = -1$ ، $\int_{|z|=r} z^{-1} dz = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2i\pi$

ثم لنحسب اولا الجذرين:

$$6z^2 - z + 1, \Delta = 1 - 24 = -23 \Rightarrow z' = \frac{1 - i\sqrt{23}}{12}, z'' = \frac{1 + i\sqrt{23}}{12}$$

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{6z^2 - z + 1} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{6(z - z')(z - z'')} = \int_{c_1} \frac{dz/6(z - z'')}{z - z'} + \int_{c_2} \frac{dz/6(z - z')}{z - z''}$$

حيث c_1 الدائرة ذات المركز z' و نصف القطر ε_1 وهي الدائرة العزلة للنقطة الشاذة $z = z'$

وكذاك c_2 الدائرة ذات المركز z'' و نصف القطر ε_2 وهي الدائرة العزلة للنقطة الشاذة $z = z''$

في الدائرة $|z| = 1$ أي ذات المركز المبدأ و نصف القطر1.

أي $$\int_{c_1} \frac{dz/6(z - z'')}{z - z'} = 2i\pi \frac{1}{6(z - z'')}\Bigg|_{z=z'} = \frac{2i\pi}{\frac{6 \times 2i\sqrt{23}}{12}} = \frac{2\pi\sqrt{23}}{23}$$

و $$\int_{c_2} \frac{dz/6(z - z')}{z - z''} = 2i\pi \frac{1}{6(z - z')}\Bigg|_{z=z''} = \frac{2i\pi}{\frac{-6 \times 2i\sqrt{23}}{12}} = -\frac{2\pi\sqrt{23}}{23}$$

و بالتالي: $$\int_{|z|=1} \frac{dz}{6z^2 - z + 1} = \frac{2\pi\sqrt{23}}{23} - \frac{2\pi\sqrt{23}}{23} = 0$$

3) ليكن $x \in D(0,1)$ يمكن حساب التكامل $\int_{|z|=1} dz/(z - x)$ بطريقتين

اولا: لتكن c_ε الدائرة ذات المركز x و نصف القطر ε وهي العزلة للنقطة الشاذة $z = x$

و بوضع $z - x = \varepsilon e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta} d\theta$ و بالتالي:

$$\int_{|z|=1} dz/(z - x) = \int_{|z-x|=\varepsilon} dz/(z - x) = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = 2i\pi$$

ثانيا: باستخدام صيغة كوشي الدالة التحليلية $f(z)=1$ في $D(0,1)$

$$\int_{|z|=1} dz/(z-x)=2i\pi f(z)\Big|_{z=x}=2i\pi$$

حالة: $|x|>1$ أي x خارج $D(0,1)$ و بالتالي الدالة $z\to 1/(z-x)$ تحليلية في $D(0,1)$ و التكامل على منحنى مغلق ومنه حسب نظرية كوشي التكامل معدوم.

التمرين الثالث: 1) لدينا $c=\{z\in C/|z|=r, 0\prec r\prec +\infty\}$، بوضع

$$z=re^{it}\Rightarrow dz=ire^{it}dt \quad \text{و} \quad 0\le t\le 2\pi$$

$\oint_c z|z|^2dz=ir^4\int_0^{2\pi}e^{2it}dt=\frac{r^4}{2}\left[e^{2it}\right]_0^{2\pi}=0$، و هذا صحيح حسب نظرية كوشي لان الدالة تحليلية في C و المنحنى مغلق و بالتالي التكامل معدوم.

3) لدينا $t\in[1,2]$، $c: z(t)=t+i(t-1)$ ومنه $dz=(1+i)dt$

$$\int_c \left(z^2+\bar{z}\right)dz=(1+i)\int_1^2\left[(t+i(t-1))^2+t-i(t-1)\right]dt$$

$$=(1+i)\int_1^2\left[t^2+2it(t-1)-(t-1)^2+t-i(t-1)\right]dt$$

$$=(1+i)\int_1^2\left(2it^2+3(1-i)t+i-1\right)dt$$

$$=(1+i)\left[\frac{2i}{3}t^3+\frac{3}{2}(1-i)t^2+(i-1)t\right]_1^2$$

$$=(1+i)\left[\frac{16i}{3}+4-4i-\frac{2i}{3}-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right]=\frac{7+14i}{3}$$

لحساب التكامل $\int_{-c}\left(z^2+\bar{z}\right)dz$، نضع $-t$ بدلا من t يكون لدينا

$$\int_{-c}\left(z^2+\bar{z}\right)dz=-(1+i)\int_{-2}^{-1}\left[(t+i(t+1))^2-t+i(t+1)\right]dt$$

$$=-(1+i)\int_{-2}^{-1}\left[t^2+2it(t+1)-(t+1)^2-t+i(t+1)\right]dt$$

$$=-(1+i)\int_{-2}^{-1}\left(2it^2+3(1-i)t+i-1\right)dt$$

ب. بن علي

$$=-(1+i)\left[\frac{2i}{3}t^3+\frac{3}{2}(1-i)t^2+(i-1)t\right]_{-2}^{-1}$$

$$=-(1+i)\left[-\frac{2i}{3}+\frac{(1-i)}{2}+\frac{16i}{3}-4+4i\right]=-\frac{7+14i}{3}$$

التكاملين مختلفين لان الدالة ليست تحليلية.

3) لنبرهن أن $\left|\int_{|z|=R} Log(z)dz/z^2\right| \leq 2\pi(\pi/R+\ln R/R), R>1$

بوضع $z=\mathrm{R}e^{i\theta}, R>1; -\pi<\theta\leq\pi$

$$\left|\int_{|z|=R}\frac{Log(z)dz}{z^2}\right|=\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(\ln R+i\theta)i\,\mathrm{R}e^{i\theta}\,d\theta}{R^2e^{2i\theta}}\right|\leq\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\ln R}{R}+\frac{\pi}{R}\right)d\theta\leq 2\pi\left(\frac{\ln R}{R}+\frac{\pi}{R}\right)$$

التمرين الخامس:

1) احسب التكامل $n=1,2,3,.....$ ، $\oint_c dz/(z-a)^n$ حيث a داخل الكفاف c

الدالة f تمثل دالة ثابتة أي $f(z)=1$ و بالتالي $\forall z\in C; \forall k\geq 1, f^{(k)}(z)=0$

و بوضع $n=k+1$ يكون لدينا حسب نظرية صيغة كوشي

من أجل $n=1\Rightarrow k=0$ ، $\oint_c dz/(z-a)^n=\oint_c dz/(z-a)=2i\pi f^{(0)}(a)=2i\pi$

و من أجل $n\geq 2\Rightarrow k\geq 1$ ، $\oint_c dz/(z-a)^n=2i\pi f^{(k)}(a)=2i\pi\times 0=0$

2) حساب التكامل $\oint_c dz/(z^2+a^2)$، لدينا: $z^2+a^2=(z-ia)(z+ia)$

ا) c موجود داخل منطقة D لا تحتوي على النقط $z=\pm ia$ أي النقط خارج الدائرة c و بالتالي الدالة $z\to 1/(z^2+a^2)$ تحليلية داخل و على c و حسب نظرية كوشي التكامل معدوم

ب) c موجود داخل منطقة D تحتوي على النقط $z=ia$ لا تحتوي $z=-ia$

بالتالي الدالة $z\to 1/(z+ia)$ تحليلية داخل و على c_ε الذي يمثل الدائرة ذات المركز $z=ia$ و نصف القطر ε أي الدائرة العزلة للنقطة $z=ia$ و منه حسب النتيجة الاولى لنظرية كوشي فإن $\oint_c dz/(z^2+a^2)=\oint_{c_\varepsilon}\frac{dz/(z+ia)}{z-ia}=2i\pi/(z+ia)\big|_{z=ia}=\frac{2i\pi}{2ia}=\frac{\pi}{a}$

ج) c موجود داخل منطقة D تحتوي على النقط $z=\pm ia$ بتطبيق نظرية كوشي على منطقة متعددة الترابط و اليكن $c_{\varepsilon'}$ الدائرة ذات المركز $z=-ia$ و نصف القطر ε' أي الدائرة

ب. بن علي

العزلة للنقطة $z=-ia$ و بالتالي: $\oint_c dz/(z^2+a^2)=\oint_{c_\varepsilon}\frac{dz/(z+ia)}{z-ia}+\oint_{c_{\varepsilon'}}\frac{dz/(z-ia)}{z+ia}$

$$=2i\pi/(z+ia)\big|_{z=ia}+2i\pi/(z-ia)\big|_{z=-ia}=\frac{2i\pi}{2ia}-\frac{2i\pi}{2ia}=0$$

التمرين السادس: باستعمال صيغة كوشي نحسب التكاملات:

1) $\oint_c e^{5z}dz/(z-1)^5$ c يحتوي على النقطة $z=1$ ، الدالة $z\to e^{5z}$ تحليلية داخل و على c

ومنه $\oint_c e^{5z}dz/(z-1)^5=\frac{2i\pi}{4!}\left(e^{5z}\right)''''\Big|_{z=1}=\frac{625i\pi e^5}{12}$

2) $\oint_c (z^2+1)dz/z(z+1)$ حيث c تمثل الدائرة ذات المعادلة $|z|=2$، لاحظ أن الدائرة c تحوي النقطتين $z=0, z=-1$ و اليكن c_{ε_0} الدائرة التي مركزها $z=0$ و نصف قطرها ε_0 و $c_{\varepsilon_{-1}}$ الدائرة التي مركزها $z=-1$ و نصف قطرها ε_{-1} و بالتالي

$$\oint_c (z^2+1)dz/z(z+1)=\oint_{c_{\varepsilon_0}}\frac{(z^2+1)dz/(z+1)}{z}+\oint_{c_{\varepsilon_{-1}}}\frac{(z^2+1)dz/z}{z+1}$$

$$=2i\pi-4i\pi=-2i\pi$$

التمرين السابع:

1) احسب التكامل $a\in IR, a\neq 0,\pm 1$ ، $\frac{1}{2i\pi}\oint_c dz/(z-a)(z-1/a)$

c موجود داخل منطقة D تحتوي على النقط $z=a$ ، $z=1/a$ بتطبيق نظرية كوشي على منطقة متعددة الترابط واليكن c_ε الذي يمثل الدائرة ذات المركز $z=a$ و نصف القطر ε أي الدائرة العزلة للنقطة $z=a$ ، و $c_{\varepsilon'}$ الدائرة ذات المركز $z=1/a$ و نصف القطر ε' أي الدائرة العزلة للنقطة $z=1/a$ و بالتالي:

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_c dz/(z-a)(z-1/a)=\frac{1}{2i\pi}\oint_{c_\varepsilon}\frac{dz/(z-1/a)}{z-a}+\frac{1}{2i\pi}\oint_{c_{\varepsilon'}}\frac{dz/(z-a)}{z-1/a}$$

$$=1/(z-1/a)\big|_{z=a}+1/(z-a)\big|_{z=1/a}=\frac{a}{a^2-1}+\frac{a}{1-a^2}=0$$

2) من أجل $1>a>0$,$\theta\in IR$ و بالتالي $1/a$ كبير، وبوضع $z=e^{i\theta}$ يكون

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_c dz/(z-a)(z-1/a)=\frac{1}{2i\pi}\oint_{c_\varepsilon}\frac{dz/(z-1/a)}{z-a}=\frac{a}{a^2-1}$$

ب. بن علي

$$\oint_c dz/(z-a)(z-1/a)=\int_0^{2\pi} ie^{i\theta}/\left(e^{i\theta}-a\right)\left(e^{i\theta}-1/a\right)$$

$$=ia\int_0^{2\pi} d\theta/\left(e^{i\theta}-a\right)\left(a-e^{-i\theta}\right)=-ia\int_0^{2\pi} d\theta/\left(1-ae^{i\theta}-ae^{-i\theta}+a^2\right)$$

$$=-ia\int_0^{2\pi} d\theta/\left(1+a^2-2a\cos\theta\right)=\frac{2i\pi a}{a^2-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} d\theta/\left(1+a^2-2a\cos\theta\right)=2\pi/1-a^2$$

التمرين التاسع:

1) ليكن الكفاف c الذي يحتوي على النقطة $z=-2i$ و لا يحتوي النقط الشاذة الأخر

لنحسب التكامل $\oint_{c:|z+i|=2}\cos(\pi z)dz/\left(z^2+4\right)$ ، حسب صيغة كوشي

$$\oint_{c::|z+i|=2}\cos(\pi z)dz/\left(z^2+4\right)=\oint_c\frac{\cos \pi z dz/(z-2i)}{z+2i}$$

$$=2i\pi\frac{\cos\pi z}{z-2i}\bigg|_{z=-2i}=-\frac{\pi}{2}\cos(2i\pi)=-\frac{\pi}{2}ch(2\pi)$$

2) حساب التكامل $\oint_{|z|=\sqrt{2}}dz/(z+i)$ حسب صيغة كوشي $\oint_{|z|=\sqrt{2}}dz/(z+i)=2i\pi\times 1\big|_{z=-i}=2i\pi....*$

بوضع $z=x+iy\Rightarrow dz=dx+idy$ و بالتالي:

$$\oint_{|z|=\sqrt{2}}dz/(z+i)=\oint_{D:|z|=\sqrt{2}}\frac{(x-i(y+1))(dx+idy)}{x^2+(y+1)^2}$$

$$=\oint_D\frac{xdx+(y+1)dy+i[xdy-(y+1)dx]}{x^2+(y+1)^2}$$

$$=\oint_D\frac{xdx+(y+1)dy}{x^2+(y+1)^2}+i\oint_D\frac{xdy-(y+1)dx}{x^2+(y+1)^2}......**$$ بالمطابقة بين المساوتين * و ** نجد

$$\oint_D\frac{xdy-(y+1)dx}{x^2+(y+1)^2}=2\pi \quad و \quad \oint_D\frac{(y+1)dy+xdx}{x^2+(y+1)^2}=0$$