الفصل السادس
نظرية الرواسب و تطبيقاتها

I) نظرية الرواسب

نظرية تمهيدية: إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية داخل و على المنحنى المغلق γ بسيط الترابط و كانت $z=z_0$ نقطة شاذة معزولة داخل γ فإن $\oint_\gamma f(z)dz=2i\pi c_{-1}$ حيث c_{-1} يمثل معامل الحد $1/(z-z_0)$ لنشر الدالة f الى سلسلة لوران في جوار z_0

البرهان: إذا كانت دالة f تحليلية على النطاق D عدا عند النقطة الشاذة المعزولة $z=z_0$ فإنه يمكن نشر الدالة f على شكل سلسلة لوران في جوار النقطة $z=z_0$ أي

$$D\supset V(z_0)=\{z\in C;|z-z_0|<R\},R>0 \quad \text{و} \quad \forall z\in D, f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$$

ليكن γ منحنى مغلق بحيث $D\supset\gamma$ و بالتالي:

$$\oint_\gamma f(z)dz=\oint_\gamma\left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}c_n(z-z_0)^n\right)dz$$ و نميز الحالات التالية

1- إذا كان $n\geq 0$ فإنه حسب نظرية كوشي $\oint_\gamma\left(\sum_{n\geq 0}c_n(z-z_0)\right)dz=\sum_{n\geq 0}c_n\oint_\gamma(z-z_0)^n dz=0$

2- إذا كان $n<0$ و $n\neq -1$، بوضع $z-z_0=re^{i\theta}$ بحيث $r>0$ و $0\leq\theta\leq 2\pi$، $dz=ire^{i\theta}d\theta$

$$\oint_\gamma\left(\sum_{-\infty}^{n=-2}c_n(z-z_0)^n\right)dz=\sum_{n=2}^{+\infty}c_{-n}\oint_\gamma(z-z_0)^{-n}dz$$

$$=\sum_{n=2}^{+\infty}ic_{-n}\int_0^{2\pi}r^{-n+1}e^{i(-n+1)\theta}d\theta=\sum_{n=2}^{+\infty}c_{-n}\frac{r^{-n+1}\left[e^{i(-n+1)2\pi}-1\right]}{-n+1}=0$$

3- إذا كان $n=-1$، بوضع $z-z_0=re^{i\theta}$ بحيث $r>0$ و $0\leq\theta\leq 2\pi$، $dz=ire^{i\theta}d\theta$

$$\oint_\gamma f(z)dz=\oint_\gamma\frac{c_{-1}dz}{z-z_0}=ic_{-1}\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}}=ic_{-1}\int_0^{2\pi}d\theta=2i\pi c_{-1}.$$

تعريف: إذا كانت $z=z_0$ نقطة شاذة معزولة داخل المنحنى المغلق γ بسيط الترابط و الموجه في الاتجاه الموجب فإن العدد c_{-1} معامل الحد $1/(z-z_0)$ لنشر الدالة f الى سلسلة لوران في جوار z_0 يسمى راسب – باقي- الدالة f عند النقطة $z=z_0$ و نكتب $\mathrm{Res}(f(z),z=z_0)=c_{-1}$

مثال: احسب $\mathrm{Res}(f(z),0)$ إذا علمت أن $f(z)=e^{3/z}$

الحل: نعلم بأن نشر الدالة f في المنقطة $0<|z|<+\infty$ هو

$f(z)=e^{3/z}=1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{2!z^2}+.....$ و منه نستنتج أن $\mathrm{Res}(f(z),z=0)=3$

ب بن علي

نظرية: إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية داخل و على المنحنى المغلق γ بسيط الترابط و الموجه في الاتجاه الموجب - كنتور - و كانت $z=z_0$ نقطة شاذة معزولة داخل γ فإن

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f(z), z=z_0)$$

مثال: احسب $\oint_{\gamma} f(z)dz$ إذا علمت أن $f(z)=e^{3/z}$ وأن $f(z)$ دالة تحليلية داخل و على المنحنى المغلق γ بسيط الترابط و الموجه في الاتجاه الموجب - كنتور - و $z=0$ داخل γ

الحل: نعلم مما ورد في المثال السابق أن $z=0$ نقطة شاذة للدالة f داخل γ و أن $\operatorname{Res}(f(z),0)=3$ ، و بالتالي: $\oint_{\gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma} e^{3/z}dz = 2i\pi \operatorname{Res}(e^{3/z}, z=0) = 2\pi i \times 3 = 6\pi i$

طرق ايجاد الراسب:

نظرية: إذا كانت $z=z_0$ قطب بسيط للدالة f فإن $\operatorname{Res}(f(z), z=z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

البرهان: ليكن $z=z_0$ قطب بسيط للدالة f و بالتالي نشر الدالة f الى سلسلة لوران في جوار z_0

$$\forall z, z_0 \in D, f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

ومنه
$$\forall z, z_0 \in D, (z-z_0)f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n+1}$$

إذن
$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}\left(\sum_{n=-1}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n+1}\right) = c_{-1}$$

مثال: جد الراسب للدالة g حيث $g(z)=\frac{\cos z}{z}$

الحل: واضح أن $z=0$ كذلك $g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n-1}/(2n)!$

$$\operatorname{Res}(g(z),0) = \lim_{z\to 0} zg(z) = \lim_{z\to 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n-1}/(2n)!\right) = 1$$

من جهة اخرى
$$\operatorname{Res}(g(z),0) = \lim_{z\to 0} zg(z) = \lim_{z\to 0}\cos z = 1$$

نظرية: إذا كانت $z=z_0$ قطب من الرتبة $n>1$ للدالة f فإن

$$\operatorname{Res}(f(z), z=z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$$

البرهان: ليكن $z=z_0$ قطب من الرتبة $n>1$ للدالة f ، و بالتالي نشر الدالة f الى سلسلة لوران في جوار z_0

$$\forall z, z_0 \in D, f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-(n-1)}}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

بضرب الطرفين في الحد $(z-z_0)^n$ نحصل على ما يلي:

$$(z-z_0)^n f(z) = c_{-n} + c_{-(n-1)}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} +$$
$$c_0(z-z_0)^n + c_1(z-z_0)^{n+1} + c_2(z-z_0)^{n+2} + \ldots$$

و باشتقاق المساواة الاخيرة $n-1$ مرة نجد أن

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] = (n-1)!c_{-1} + n!c_0(z-z_0) + \frac{(n+1)!}{2!}c_1(z-z_0)^2 + \frac{(n+2)!}{3!}c_2(z-z_0)^3 + \ldots$$

و بحساب النهاية من طرفي المساواة عندما $z \to z_0$ نحصل على

$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] = (n-1)!c_{-1}$ و منه نستنتج أنه عندما يكون $n>1$ فإن

$$\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] = c_{-1} = \operatorname{Re}s(f(z), z=z_0)$$

مثال: جد الراسب للدالة h عند $z=-2$ حيث $h(z) = \dfrac{e^{z-1}}{(z+2)^3}$

الحل: واضح أنه $\lim\limits_{z\to -2}(z+2)^3 h(z) = \lim\limits_{z\to -2} e^{z-1} = e^{-3}$ أي أن $z=-2$ هو قطب من الرتبة الثالثة للدالة h ، و بالتالي $\operatorname{Re}s(h(z), z=-2) = \dfrac{1}{2!}\lim\limits_{z\to -2}\dfrac{d^2}{dz^2}\left[(z+2)^3 h(z)\right] = \dfrac{e^{-3}}{2}$

نتيجة: إذا كان h, g دالتين تحليليتين و كان $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ بحيث $g(z_0) \neq 0$ و $h(z_0) = 0$ لكن $h'(z_0) \neq 0$ فإن

$$\operatorname{Re}s(f(z), z=z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)g(z)}{h(z)}$$
$$= \lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{\dfrac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \Rightarrow \operatorname{Re}s(f(z), z=z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

و ذلك لان g مستمرة و h تحليلية عند $z=z_0$ و $h(z_0)=0$.

مثال: جد الراسب للدالة k عند $z=0$ حيث $k(z) = \dfrac{e^z}{e^z - 1}$

الحل: حسب النتيجة السابقة $\operatorname{Re}s(k(z), z=0) = \dfrac{e^0}{\left(e^z-1\right)'_{z=0}} = \dfrac{1}{\left(e^z\right)_{z=0}} = \dfrac{1}{1} = 1$

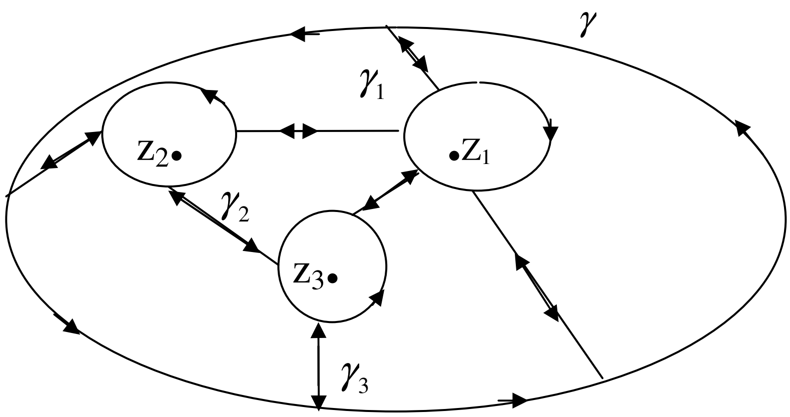
نظرية: : ليكن D نطاق بسيط الترابط و اليكن γ كنتور مغلق، إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية داخل و على الكنتور γ و كانت $z = z_1, z_2, \ldots z_n$ نقط شاذة معزولة الدالة f داخل γ فإن

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 2i\pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}s\left(f(z), z = z_k\right)$$

البرهان: لتكن $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ دوائر مراكزها $z_1, z_2, \ldots z_n$ على الترتيب منفصلة ليست متماسة ولا متقاطعة

داخل الكنتور γ حسب تطبيق نظرية كوشي- قورسات على دال تحليلية في نطاق D و لها عدد منته من النقاط الشاذة $z_1, z_2, \ldots z_n$ في D فإن $\oint_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n}\oint_{\gamma_i} f(z)dz$

انظر الشكل:



و بتطبيق نظرية الراسب $\oint_{\gamma_k} f(z)dz = 2i\pi\operatorname{Re}s\left(f(z), z = z_k\right)$

ومنه فإن $\oint_{\gamma} f(z)dz = 2i\pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}s\left(f(z), z = z_k\right)$.

مثال: جد قيمة التكامل $\oint_{\gamma:|z|=2} \dfrac{\cos z}{z(z-i)^2}dz$

الحل: للدالة f حيث $f(z) = \dfrac{\cos z}{z(z-i)^2}$ نقطتين شاذتين داخل الكنتور γ و هما القطبين $z=0$ قطب بسيط و $z=i$ قطب من الرتبة 2 و بالتالي

$$\oint_{\gamma:|z|=2} \frac{\cos z}{z(z-i)^2}dz = 2\pi i\left[\operatorname{Re}s\left(f(z), z=0\right) + \operatorname{Re}s\left(f(z), z=i\right)\right]$$

$$= 2\pi i\left[\left(\frac{\cos z}{(z-i)^2}\right)_{z=0} + \frac{d}{dz}\left(\frac{\cos z}{z}\right)_{z=i}\right] = 2\pi i\left[-1+e^i\right]$$

2) تطبيقات نظرية الرواسب في حساب التكامل:

تكامل الكسور المثلثية:

لدينا التكامل من الشكل $\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)dt$ حيث $F(\cos t, \sin t)$ الدالة كسرية بدلالة $\cos t$ و $\sin t$

أي أن $F(x,y)=\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ و $Q(x,y)\neq 0$ على الدائرة $\gamma=\{(x,y)\in IR^2; x^2+y^2=1\}$

نضع $z=e^{it}$ أي $z=\cos t+i\sin t$ و $z^{-1}=\cos t-i\sin t$ و منه نستنتج أن

$$dt=\frac{dz}{iz} \Rightarrow dz=ie^{it}dt=izdt \text{ ، } \cos t=\frac{z+z^{-1}}{2}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \text{ و } \sin t=\frac{z-z^{-1}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)dt=\oint_{\gamma:|z|=1} F\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

حسب نظرية الرواسب فإن $\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)dt=2\pi i\sum_{|z_k|<1}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{iz}F\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right), z=z_k\right)$

حيث الاعداد المركبة z_k تمثل النقط الشاذة للدالة $\frac{1}{iz}F\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$ ضمن الكنتور $\gamma:|z|=1$

مثال: بإستخدام نظرية الرواسب احسب التكامل التالي: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(5-3\sin t)^2}$

الحل: نضع $z=e^{it}$ و منه نستنتج أن $dt=\frac{dz}{iz} \Rightarrow dz=ie^{it}dt=izdt$ ، و $\sin t=\frac{z-z^{-1}}{2i}$

و بالتالي $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(5-3\sin t)^2}=\oint_{\gamma:|z|=1}\frac{dz}{iz\left(5-3\left(z-z^{-1}/2i\right)\right)}=-\frac{4}{i}\oint_{\gamma:|z|=1}\frac{zdz}{(3z^2-10iz-3)^2}$

للدالة $z\to\frac{z}{(3z^2-10iz-3)^2}$ قطبين مضاعفين أي من الرتبة الثانية في الكنتور $\gamma:|z|=1$ هما

$$z_1=\frac{10i-\sqrt{-100+36}}{6}=\frac{10i-8i}{6}=i/3 \text{ و } z_2=\frac{10i+\sqrt{-100+36}}{6}=\frac{10i+8i}{6}=3i$$

لكن الملاحظ أن $|z_2|>1$ أي أن z_2 خارج الكنتور $\gamma:|z|=1$ و منه نستنتج أن دالة قطب واحد من الرتبة الثانية وهو z_1 داخل الكنتور $\gamma:|z|=1$، و منه

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(5-3\sin t)^2}=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{-4z}{i(3z^2-10iz-3)^2}, z=i/3\right)=\frac{8\pi}{3}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z-3i)^2}\right]_{z=i/3}=\frac{5\pi}{32}.$$

تكاملات الدوال الكسرية لمتغير حقيقي:

نعتبر التكامل من الشكل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ حيث f دالة حقيقية و تحقق الشروط التالية:

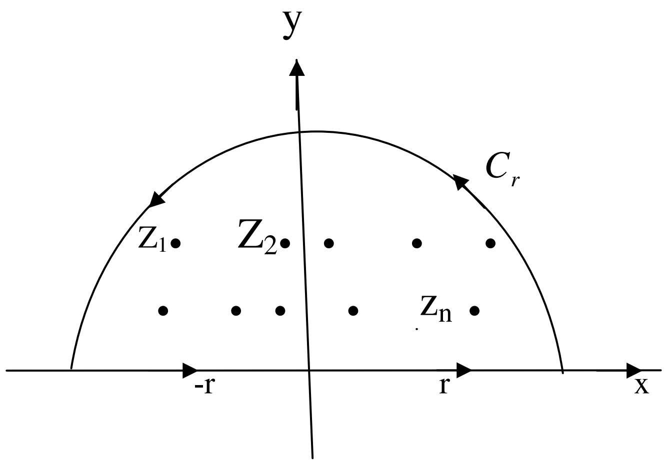
1) $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيري حدود للمتغير الحقيقي x

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$ أي أن $\deg P \geq \deg Q+2$

3) $Q(x)$ لا تنعدم في IR .

من أجل حساب التكامل المعطى، نعتبر التكامل المنحني $\int_\gamma f(z)dz$ حيث γ الكنتور المعرف كما يلي: $\gamma=[-r,r]\cup\{z\in C; |z|=r, \operatorname{Im}(z)\geq 0\}$ و الموضح بالشكل التالي:

نضع $\gamma=[-r,r]\cup C_r$



و بالتالي يكون لدينا (1) $\int_\gamma f(z)dz=\int_{-r}^{r} f(z)dz+\int_{C_r} f(z)dz=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k\geq 0}\operatorname{Re}s(f(z),z=z_k)$

حيث (k محدود)، $z=z_k$ اقطاب للدالة f داخل و على الكنتور γ .

نظرية: اذا كانت $Q(x)\neq 0$ لجميع الاعداد الحقيقية x و كانت $\deg Q\geq 2+\deg P$ فإن $\lim\limits_{r\to+\infty}\int_{C_r} f(z)dz=0$ حيث $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ و C_r نصف الدائرة العلوي الذي يشمل جميع اقطاب الدالة f

البرهان:

من برهان النظرية الاساسية للجبر تبين لنا أن $|Q(z)|\geq \frac{1}{2}|z|^n$ حيث $\deg Q=n$ و بالتالي $\dfrac{1}{|Q(z)|}\leq\dfrac{2}{|z|^n}$

و عليه فإن $|f(z)|=\dfrac{|P(z)|}{|Q(z)|}\leq\dfrac{2|P(z)|}{|z|^n}$ ، فإذا كانت r كبيرة نسبيا تكون $|z|$ كبيرة نسبيا فإنه يوجد عدد ثابت K

$|P(z)|\leq K|z|^m$ حيث $\deg P=m$ و بما أن $m+2\leq n$ فإن $\dfrac{2K}{r^2}>\dfrac{2K|z|^m}{|z|^{m+2}}\geq|f(z)|$ و بالتالي

$\left|\int_{C_r} f(z)dz\right|<\dfrac{2K}{r}$ و منه $\lim\limits_{r\to+\infty}\int_{C_r} f(z)dz=0$.

ب بن علي

نتيجة: اذا كانت $f(z)=\frac{P(z)}{Q(x)}$ بحيث $\deg Q \geq \deg p+2$ و كان $\forall x \in IR, Q(x)\neq 0$ فإنه

عندما $r \to +\infty$ العلاقة (1) تصبح $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k \geq 0} \operatorname{Re} s(f(z), z=z_k)$.

مثال: احسب التكامل

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+1)}dx$$

الحل: نلاحظ أن درجة المقام أكبر من درجة البسط بدرجتين على الاقل، كثير الحدود المقام له جذور غير حقيقية فإن شروط النظرية محققة و بالتالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+1)}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k \geq 0} \operatorname{Re} s(f(z), z=z_k)$$

النقاط الشاذة للدالة - الاقطاب- $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+1)}$ التي تقع في النصف العلوي من المستوي المركب $z_0=2i$ ، $z_1=i$ و منه

$$\operatorname{Re} s(f(z), z=2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z) = \left.\frac{z^2}{(z+2i)(z^2+1)}\right|_{z=2i} = -\frac{i}{3}$$

$$\operatorname{Re} s(f(z), z=i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \left.\frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)}\right|_{z=i} = \frac{i}{6}$$

أذن $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+1)}dx = 2\pi i\left[\frac{i}{6}-\frac{i}{3}\right] = \frac{\pi}{3}$.

ملاحظة:

1- إذا كانت الدالة f زوجية فإن $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$

2- في حالة اختيار نصف القرص الذي يقع في النصف السفلي و بالتالي يكون لدينا العلاقة مشابهة للعلاقة السابقة في النصف العلوي أي $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k \leq 0} \operatorname{Re} s(f(z), z=z_k)$

مثال: اقطاب الدالة في نصف المستوي السفلي هي $z_0=-2i$ ، $z_1=-i$ و منه

$$\operatorname{Re} s(f(z), z=-2i) = \lim_{z\to -2i}(z+2i)f(z) = \left.\frac{z^2}{(z-2i)(z^2+1)}\right|_{z=2i} = \frac{i}{3}$$

$$\operatorname{Re} s(f(z), z=-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \left.\frac{z^2}{(z-i)(z^2+4)}\right|_{z=i} = -\frac{i}{6}$$

أذن $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+1)}dx = -2\pi i\left[-\frac{i}{6}+\frac{i}{3}\right] = \frac{\pi}{3}$.

تكامل الدوال التي عبارتها بها العامل $e^{i\alpha x}$:

أي الدالة $g(x)=f(x)e^{i\alpha x}$ حيث $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ، $Q(x),P(x)$ كثيري حدود و الدالة f مستمرة على $IR=]-\infty,+\infty[$ أيضا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos nxdx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos nxdx \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin nxdx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin nxdx$$

نعلم أن $e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$ و هذا يؤدي إلى

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{inx}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos nx+i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin nxdx$$ و بالتالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos nxdx=\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{inx}dx\right) \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin nxdx=\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{inx}dx\right)$$

إذا فرضنا أن $\forall x\in IR, Q(x)\neq 0$ و كانت جميع اقطاب الدالة f تقع في النصف العلوي أو السفلي من المستوي، فإذا فرضنا أن γ الكنتور المعرف كما يلي: $\gamma=[-r,r]\cup\{z\in C;|z|=r,\mathrm{Im}(z)\geq 0\}$ - الشكل السابق- و بتطبيق نظرية كوشي فإن $\int_{\gamma} f(z)e^{inz}dz=2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\, z_k\geq 0}\mathrm{Re}\, s(g(z),z=z_k)$

حيث $g(x)=f(x)e^{i\alpha x}$ و $z_1,z_2,...,z_k$ اقطاب للدالة f في النصف للعلوي من المستوي المركب

و منه $\int_{\gamma} f(z)e^{inz}dz=\int_{-r}^{r} f(x)e^{inx}dx+\int_{C_r} f(z)e^{inz}dz$

الطرف الايسر من المساواة السابقة لا يعتمد على r و بالتالي فإن المساواة محققة عندما $r\to+\infty$

$$\int_{\gamma} f(z)e^{inz}dz=\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} f(x)e^{inx}dx+\lim_{r\to+\infty}\int_{C_r} f(z)e^{inz}dz$$

فإذا تحقق $\lim_{r\to+\infty}\int_{C_r} f(z)e^{inz}dz=0$ - البرهان في النظرية التالية- فإن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{inx}dx=\int_{\gamma} f(z)e^{inz}dz=\sum_{\mathrm{Im}\, z_k\geq 0}\mathrm{Re}\, s(g(z),z=z_k)$$

نظرية: إذا كان $\forall x\in IR, Q(x)\neq 0$ و كان $\deg Q\geq 2+\deg P$ حيث $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

فإن $\lim_{r\to+\infty}\int_{C_r} f(z)e^{inz}dz=0, n>0$

البرهان: من برهان النظرية السابقة و بما أن $\deg Q \geq 2 + \deg P$ فإن $|f(z)| = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{2K}{r}$

و بفرض أن $z \in C_r$ أي أن $z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$ فإن

$$\left|f(z)e^{inz}\right| \leq \frac{2K}{r}\left|e^{-rn\sin\theta}.e^{irn\cos\theta}\right| \leq \frac{2K}{r}e^{-nr\sin\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$$ و منه

$$\left|\int_{C_r} f(z)e^{inz}dz\right| \leq 2K\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{r}e^{-rn\sin\theta}.e^{irn\cos\theta}ire^{i\theta}\right|d\theta \leq 2K\int_0^{\pi}e^{-nr\sin\theta}d\theta,$$

و بما أن $\int_0^{\pi}e^{-nr\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\pi/2}e^{-rn\sin\theta}d\theta$ و كذلك $\forall\theta \in [0, \pi/2], \sin\theta \geq 2\theta/\pi$

و بالتالي: $$\int_0^{\pi}e^{-nr\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\pi/2}e^{-rn\sin\theta}d\theta \leq 2\int_0^{\pi/2}e^{-2nr\theta/\pi}d\theta \leq -\frac{\pi}{nr}\left[e^{-nr} - 1\right]$$

و بما أن $\lim_{r\to+\infty}\frac{\pi}{nr}\left[e^{-nr} - 1\right] = 0$ أي أن $\lim_{r\to+\infty}\int_{C_r} f(z)e^{inz}dz = 0, n > 0$.

و بهذا نكون قد برهنا النظرية التالية

<u>نظرية</u>: إذا كان $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ بحيث $\deg Q \geq 2 + \deg P$ و كان $\forall x \in IR, Q(x) \neq 0$ فإن

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{inx}dx = \sum_{\operatorname{Im} z_k \geq 0}\operatorname{Re}s(g(z), z = z_k)$ كذلك $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{inx}dx = -\sum_{\operatorname{Im} z_k \leq 0}\operatorname{Re}s(g(z), z = z_k)$

حيث $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$.

مثال: احسب التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2 + 4x + 5}dx$

لدينا $$\int_{\gamma}\frac{\sin z}{z^2 + 4z + 5}dz = \operatorname{Im}\left(\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z^2 + 4z + 5}dz\right)$$

و بما أن $$\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z^2 + 4z + 5}dz = 2\pi i\operatorname{Re}s\left(\frac{e^{iz}}{z^2 + 4z + 5}, z = -2 + i\right)$$

$$= 2\pi i\frac{e^{i(-2+i)}}{-2 + i + 2 + i} = \pi e^{-1}(\cos(2) - i\sin(2))$$

و منه $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2 + 4x + 5}dx = -\pi e^{-1}\sin(2)$$

التكامل نقاط الفروع للدوال متعددة القيم:

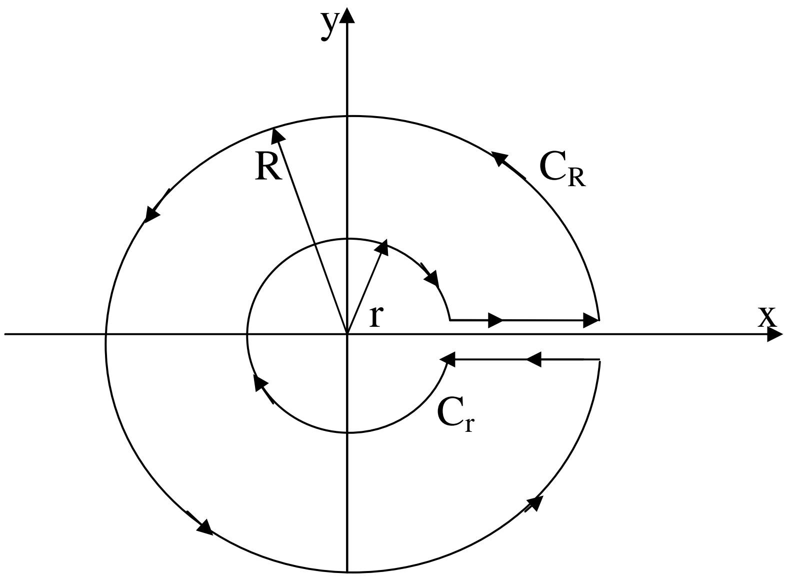
سنقتصر على الدوال متعددة القيم من الشكل $f(z)=\dfrac{z^a P(z)}{Q(z)},0<a<1$

نعلم بأن نقط فصل الفروع و نقط التفرع هي نفط شاذة للدوال متعددة القيم لذلك لابده من الدقة في اختيار الفرع المناسب لحساب التكامل، بالنسبة للدالة $f(z)$ نعتبر الفرع

$z^a=|z|^a e^{ia\theta}$ حيث $0\le\theta\le 2\pi$

و بذلك يكون شعاع الفصل هو $\theta=0$ و نقطة الفرع $z=0$

و بالتالي لحساب التكامل $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^a P(x)}{Q(x)}dx$ حيث $\deg Q\ge 2+\deg P$ و أنه يوجد صفر بسيط على الاكثر للدالة $Q(x)$. نفرض أن الكنتور γ يتكون من الدائرتين $S(w,R)$ ، $s(w,r)$ و القطعتين الموصلتين بينهما بالاتجاهين المتعاكسين حيث $0<r<R$ ، حتى نتجنب نقطة التفرع و فصل الفرع كما هو موضح في الشكل



فإذا كانت $z_1,z_2,...z_n$ أقطاب للدالة f ليست من IR_+ ، فأنه حسب نظرية كوشي

$$\int_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}s\left(f(z),z=z_k\right)$$

و بتقسيم الكنتور γ بالشكل التالي: $\gamma=C_R-C_r+[r,R]+[R,r]$ ومنه

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_{C_R}f(z)dz-\int_{C_r}f(z)dz+\int_r^R f(z)dz-\int_R^r f(z)dz$$

نلاحظ أن تكامل الدالة f كل من المسارين $[r,R]$ و $-[r,R]$ مختلفين لاختلاف عمدة z في الدالة متعددة القيم حيث أنه إذا كان عدد حقيقي موجب و اقترب من النصف العلوي للمستوي المركب

فإن $z=|z|e^{i\theta}=|z|$ ، لأن $\theta=\arg(z)=0$. لكن إذا اقترب العدد z من النصف السفلي للمستوي المركب فإن $z=|z|e^{i\theta}=|z|e^{2i\pi}$ و ذلك لأن $\theta=\arg(z)=2\pi$ و بالتالي:

$$\int_{\gamma} f(z)dz=\int_{C_R} f(z)dz-\int_{C_r} f(z)dz+\int_r^R \frac{z^a P(z)}{Q(z)}dz-\int_R^r \frac{z^a e^{2ia\pi}P(z)}{Q(z)}dz$$

$$\int_{\gamma} f(z)dz=\int_{C_R} f(z)dz-\int_{C_r} f(z)dz+\left[1-e^{2ia\pi}\right]\int_r^R \frac{z^a P(z)}{Q(z)}dz$$

ومنه عندما $r\xrightarrow{\geq}0$ و $R\to+\infty$ فإن

$$\int_{\gamma} f(z)dz=\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz-\lim_{r\xrightarrow{>}0}\int_{C_r} f(z)dz+\left[1-e^{2ia\pi}\right]\lim_{\substack{R\to+\infty\\ r\to0}}\int_r^R \frac{x^a P(x)}{Q(x)}dx$$

و بالتالي نستنتج أن
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^a P(x)}{Q(x)}dx=\lim_{\substack{R\to+\infty\\ r\to0}}\int_r^R \frac{x^a P(x)}{Q(x)}dx$$

$$=\frac{1}{\left(1-e^{2ia\pi}\right)}\left[\int_{\gamma} f(z)dz-\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz+\lim_{r\xrightarrow{>}0}\int_{C_r} f(z)dz\right]$$

و عندما $\lim_{r\to0}\int_{C_r} f(z)dz=0$ و $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0$ نجد أن

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^a P(x)}{Q(x)}dx=\frac{2\pi i}{\left(1-e^{2ia\pi}\right)}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}s\left(f(z),z=z_k\right)$$

مثال: احسب التكامل

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+4}$$

الحل: مما تقدم لدينا $a=1/2$ وللدالة قطب بسيط في النصف العلوي للمستوي المركب و هو $z=2i$ و منه

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+4}=\frac{2\pi i}{1-e^{i\pi}}\operatorname{Re}s\left(\frac{\sqrt{z}}{z^2+4},z=2i\right)$$

و بما أن
$$\frac{2\pi i}{1-e^{i\pi}}\operatorname{Re}s\left(\frac{\sqrt{z}}{z^2+4},z=2i\right)=\frac{2\pi i}{2}\times\frac{1+i}{4i}=\frac{\pi}{4}(1+i)$$

و الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي متساويين نستنتج أن $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+4}=\frac{\pi}{4}$.