الفصل الخامس
النشر الى سلسلة تايلور- لوران

تذكير

متتاليات و سلاسل الدوال

تعريف: نقول عن متتالية الدوال (f_n) أنها تتقارب نحو الدالة f في النقطة $z = z_0 \in C$ إذا كان
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(z_0, \varepsilon), \forall n > N \rightarrow |f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon$$
و إذا كانت متتالية الدوال (f_n) متقاربة من أجل كل النقطة $z \in G \subset C$ نقول أن (f_n) متقاربة نقطيا أو ببساطة على G

مثال: بين باستخدام التعريف أن متتالية الدوال (f_n) و المعرفة بحدها العام $f_n(z) = 1 + z/n$ تتقارب نحو الدالة الثابتة $f(z) = 1$

الحل: ليكن $\varepsilon > 0$ لنبين وجود N و ذلك بـ: $|f_n(z) - f(z)| = \left|1 + \frac{z}{n} - 1\right| = \frac{|z|}{n} < \varepsilon \Rightarrow |z| < n\varepsilon$

أي يكفي أن نأخذ $N \geq E(n\varepsilon)$ الجزء الصحيح المقدار $n\varepsilon$.

تعريف: إذا كانت متتالية الدوال (f_n)، f معرفة على $G \subset C$، تكون (f_n) متقاربة بانتظام على G إذا وفقط إذا كان $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall z \in G, \forall n > N \rightarrow \sup_{z \in G} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

مثال: بين باستخدام التعريف أن متتالية الدوال (f_n) و المعرفة بحدها العام $f_n(z) = z^n$ تتقارب بانتظام على $D = \{z \in C; |z| \leq r < 1\}$ نحو الدالة المعدومة $f(z) = 0$

الحل: ليكن $\varepsilon > 0$ لنبين وجود N و ذلك بـ:
$$\sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| = \sup_{z \in D} |z^n| = r^n < \varepsilon \Rightarrow n \ln r < \ln \varepsilon \Rightarrow n > \ln \varepsilon / \ln r$$
أي بأخذ $N = E(\ln \varepsilon / \ln r) = [\ln \varepsilon / \ln r]$ لاحظ أن N لا يتعلق بـ z

قضية: إذا كانت (f_n) متتالية دوال مستمرة و متقاربة بانتظام على G نحو f فإن f مستمرة على G

نظرية: بفرض أن (f_n) متتالية دوال مستمرة على المنحنى γ و المتقاربة بانتظام نحو f على G فإن
$$\lim_{n \to +\infty} \int_\gamma f_n(z) dz = \int_\gamma f(z) dz$$

البرهان: حسب القضية السابقة الدوال (f_n)، f مستمرة على المنحنى γ فإن
$$\left|\int_\gamma f_n(z) dz - \int_\gamma f(z) dz\right| = \left|\int_\gamma [f_n(z) - f(z)]\right| \leq \underset{z \in \gamma}{Max} |f_n(z) - f(z)| L(\gamma)$$
و بما أن (f_n) متقاربة بانتظام على γ نحو f هذا يعني أن $\underset{z \in \gamma}{Max} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0$ و بالتالي
$$\lim_{n \to +\infty} \int_\gamma f_n(z) dz = \int_\gamma f(z) dz.$$

نظرية: إذا كانت (f_n) متتالية دوال هلمورفية و متقاربة بانتظام على G نحو f فإن f هلمورفية على G.

البرهان: ليكن γ منحنى مغلق داخل G حسب النظرية السابقة $\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{n\to+\infty}\int_{\gamma} f_n(z)dz$ ب

و $\lim_{n\to+\infty}\int_{\gamma} f_n(z)dz = 0, \forall n$ و بالتالي $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ و حسب نظرية موريرا f هلمورفية.

سلسلة الدوال

لتكن متتالية الدوال المركبة(f_n) المعرفة في نطاق D و التكن متتالية المجاميع $(S_n(z))$، للدوال السبقة و المعرفة كالتالي

$$S_1(z) = f_1(z)$$
$$S_2(z) = f_1(z) + f_2(z)$$
$$\text{.......... ....}$$
$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + ... f_n(z)$$

نسمي $S_n(z)$ المجموع الجزئي من الرتبة n لسلسلة الدوال المركبة$\sum_{n\geq 1} f_n(z)$، إذا كان للمجموع $S_n(z)$نهاية منتهية عندما $n \to +\infty$ نقول عن السلسلة أنها متقاربة و إذا كانت ليست منتهية نقول عن السلسلة أنها متباعدة، و إذا كانت $\sum_{n\geq 1} f_n(z)$ متقاربة من أجل كل z من $D \subset C$، تسمى D منطقة تقارب السلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n(z)$

مثال: اثبت أن السلسلة $z(1-z) + z^2(1-z) + ... + ...$ تتقارب في المنطقة $D = \{z \in |z| < 1\}$

الحل: ليكن $S_n(z)$ المجموع الجزئي من الرتبة n أي

$$S_n(z) = z(1-z) + z^2(1-z) + ... + z^n(1-z)$$
$$= z - z^2 + z^2 - z^3 + ... + z^n - z^{n+1} = z - z^{n+1}$$

و بما أن $|z| < 1$ فإن $S(z) = \lim_{n\to+\infty}|S_n(z)| \leq |z| + \lim_{z\to+\infty}|z|^{n+1} = |z|$ أي أن $S(z) = z$.

تعريف: تكون سليسلة الدوال$\sum_{n\geq 1} f_n(z)$ متقاربة بانتظام على المنطقة D إذا كانت $(S_n(z))$ متقاربة بانتظام على المنطقة D.

نظرية:(اختبار فرشستراس)

نفرض أن متتالية الدوال المستمرة$(f_n(z))$على المنطقة G و من أجل كل $|f_k(z)| \leq M_k ; k \in Z$ (M_k لا يتعلق بـ z)، و السلسلة $\sum_{k\geq 1} M_k$ متقاربة فإن$\sum_{k\geq 1} f_k(z)$ متقاربة مطلقا و بانتظام على G.

البرهان: من أجل كل z من Gفإن$\sum_{k=1}^{+\infty}|f_k(z)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} M_k < +\infty$ و بالتالي $\sum_{k=1}^{+\infty}|f_k(z)|$متقاربة نحو الدالة$F(z)$. بما أن $\sum_{k\geq 1} M_k$ متقاربة فإنه يوجد N بحيث $\sum_{n+1}^{+\infty} M_k = \sum_{k=1}^{+\infty} M_k - \sum_{k=1}^{n} M_k < \varepsilon$

إذن $\forall z \in C, \forall n > N; \left|F(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right| = \left|\sum_{n+1}^{+\infty} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty}|f_k(z)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} M_k < \varepsilon$

و هذا يبين التقارب المنتظم.

نظرية: ليكن γ كنتور مغلق و بسيط الترابط في منطقة D و إذا كانت $\sum_{n\geq 1} f_n(z)$ سلسلة الدوال مستمرة و متقاربة بانتظام في D نحو الدالة f المستمرة في D فإن $\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{n\geq 1}\int_{\gamma} f_n(z)dz$.

السلاسل الصحيحة

تعريف: نسمي كل سلسلة من الشكل $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ حيث (a_n) متتالية أعداد مركبة و z_0 ثابت مركب بالسلسلة الصحيحة للمتغير المركب $z-z_0$.

نصف قطر التقارب

لإيجاد نصف قطر تقارب سلسلة صحيحة لمتغير مركب نستخدم الطرق السابقة لإيجاد نصف قطر تقارب سلسلة صحيحة لمتغير حقيقي أي $R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ أو $R=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

مثال: جد نصف التقارب للسلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2i)^n(z+i)}{n!}$

الحل: نستخدم قانون النسبة لدلانبير

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{|2i|^n}{n!}\times\frac{(n+1)!}{|2i|^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n(n+1)n!}{2^{n+1}n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2}=+\infty$$

نظرية: من أجل كل سلسلة صحيحة $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ يوجد عدد موجب R و $0<R<+\infty$ والمتعلق فقط بالمعاملات a_n بحيث:

1) السلسلة متقاربة مطلقا في $|z-z_0|<R$

2) السلسلة متقاربة بانتظام في $|z-z_0|\leq R'<R$

3) السلسلة متباعدة في $|z-z_0|>R$.

مثال: حدد منطقة التقارب للسلاسل التالية

$$1)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+2i)^n}{(1+i)^n}\ ،\quad 2)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3n+5}{2n+1}\right)z^n\ ،\quad 3)\ \sum_{n=0}^{+\infty} n!(z+i)^n$$

الحل: لتحديد نصف قطر التقارب السلسلة 1) نستخدم قانون دالنبير

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(1/1+i)^n}{(1/1+i)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{2})^n}=\sqrt{2}$$

و بالتالي منطقة التقارب لهذه السلسلة هي $|z+2i|<\sqrt{2}$ أي القرص المفتوح الذي مركزه $w(0,-2)$ و نصف قطره $R=\sqrt{2}$ و نكتب $D=\{z\in C; |z+2i|<\sqrt{2}\}$

في السلسلة 2) لتحديد نصف قطر التقارب مقياس كوشي أي $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

من $\dfrac{2}{3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{3n+5} = R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\left|\left(\dfrac{3n+5}{2n+1}\right)\right|^n}}$ و منطقة التقارب $D = \left\{ z \in C; |z| < \dfrac{2}{3} \right\}$

أما السلسلة 3) نستعمل $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!} = R = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ السلسلة متباعدة

وهناك نوع ثالث من السلاسل المتقاربة على C أي منطقة القارب نصف قطرها غير منتهي أنظر المثال السابق

ملاحظة: السلسلة عند نقاط الدائرة $|z - z_0| = R$ يمكن تكون متقاربة أو متباعدة

مثال: انظر المثال السابق السلسلة 1 من أجل $|z + 2i| = \sqrt{2}$ تكون $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{2}^n}{\sqrt{2}^n}$ وهي سلسلة ليست متقاربة مطلقا ولا تحقق شروط ابيل فهي متباعدة، لكن بتعويض $|z| = 2/3$ في السلسلة 2

نجد $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{3n+5}{2n+1}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ وهي متقاربة مطلقا فهي متقاربة في منطقة التقارب

السلاسل الصحيحة الهلمورفية

السلسلة الصحيحة تمثل دالة كثير حدود للمتغير z درجته غير منتهي وهي تحليلية (هلمورفية) في أي منطقة من C و بالتالي الدالة $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ تحليلية في المنطقة $D \subset C$ حيث

$D(z_0, R) = \{z \in C; |z - z_0| < R, R > 0\}$ و $\forall z \in D, f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$

نظرية: إذا كان $D(z_0, R) = \{z \in C; |z - z_0 < R; R > 0|\}$ يمثل قرص التقارب للسلسلة الصحيحة $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ و كان γ كنتور في D فإنه من أجل كل z من D

1) $w = F(z)$ دالة تحليلية

2) $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$

3) $\int\limits_{\gamma} f(z) dz = \int\limits_{\gamma} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n dz = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_{\gamma} a_n (z - z_0) dz$

البرهان: نضع $f_n(z) = \sum\limits_{n=0}^{n} a_k (z - z_0)^k$ فإن $(f_n(z))$ هي متتالية دوال تحليلية على المنطقة $|z - z_0| < R$ حسب نظرية لمتتالية الدوال فإن $(f_n(z))$ تتقارب بانتظام نحو الدالة التحليلية $f(z)$ على D، نضع $g(z) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$ لاحظ أن نصف قطر التقارب للسلسلة $g(z)$

هو نفسه $R_g = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{ka_k}{(k+1)a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to+\infty}\frac{k}{k+1}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = R$ و منه $\forall z\in D, g(z)=f'(z)$

نتيجة: إذا كانت $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ سلسلة صحيحة فإنه

من أجل كل z من $D=\{z\in C; |z-z_0|<R, R>0\}$

1) $w=f(z)$ هي دالة مستمرة

2) $w=f(z)$ هي دالة تحليلية

3) $w=f(z)$ هي دالة قابلة للاشتقاق ما لانهاية من المرات

4) $$\forall z\in D, F'(z)=\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{d(z-z_0)^n}{dz}=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}$$

5) $$\forall z\in D, f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)....(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}$$

6) $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ و $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ تسمى سلسلة تايلور للدالة f

7) $$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n\right)dz=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_\gamma a_n(z-z_0)dz=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$$

سلاسل تايلور ولوران

سلاسل تايلور

نظرية: (تايلور)

إذا كانت $f: D\subset C\to C$ تحليلية في D فإنها قابلة للنشر إلى سلسلة صحيحة أي

$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ حيث $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_R}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw, n=0,1,2,...$ و

$\gamma_R=\{z\in C; |z-z_0|<R, R>0\}$ و $D\supset\gamma_R$

البرهان: ليكن $|z-z_0|<R$ و اليكن المتغير المركب w بحيث $|w-z_0|=R$ حسب صيغة كوشي

$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R}\frac{f(w)}{w-z}dw$ ، لاحظ أن العامل $\frac{1}{w-z}$ يمكن صياغته كما يلي

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-z_0+z_0-z}=\frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}=\frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$ لان $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|<1$

و منه $$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_R}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_R}f(w)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2i\pi}\left[\oint\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right](z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

و هذا حسب صيغة كوشئ $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2i\pi}\oint_{\gamma_R}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw, n=0,1,2,...$.

مثال: اعط نشر تايلور للدالة $f(z)=\frac{1}{z-1}$ التحليلية في $C-\{1\}$ عند النقطة $z_0=2i$

الحل: واضح أن

$$f(z)=\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{1-2i-(z-2i)}=\frac{-1}{1-2i}\frac{1}{1-\frac{z-2i}{1-2i}}$$

$$=\frac{-1}{1-2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-2i)^n}{(1-2i)^{n+1}}$$

السلسلة المحصل عليها صحيحة ونصف قطر تقاربها $R=1/\sqrt{5}$.

نتيجة: إذا كان $z_0=0$ فإنه يمكن صياغته سلسلة تايلور كما يلي $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$ وتسمى سلسلة ماكلوران للدالة f عند النقطة $z_0=0$.

ملاحظة: كل النشور الى سلاسل صحيحة بصيغة ماكلوران للدوال المرجعية بالنسبة للمتغير الحقيقي صحيحة بالنسبة للمتغير المركب

مثلا: $z\in C$

$$e^z=1+z/1!+z^2/2!+z^3/3!+.........=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n/n!$$

$$1/(z-1)=1+z+z^2+....=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n \qquad |z|<1$$

$$\ln(1+z)=z-z^2/2+....=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}z^n/n \qquad |z|<1$$

$$\sin z=z-z^3/3!+....=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)! \qquad z\in C$$

$$chz=2+z^2/2!+....=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{2n}/(2n)! \qquad z\in C$$

$$(1+z)^\alpha=1+\alpha z+\alpha(\alpha-1)z/2!+....$$

$$=1+\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)z^{\alpha-n}/n! \qquad z\in C$$

ملاحظة: كما يمكن نشر دالة تحليلية في منطقة D الى سلسلة تايلور- ماكلوران عن طريق الاشتقاق أو المكاملة

مثال: اعط نشر تايلور للدالة $f(z)=Log\,(3-iz)$ في جوار $z_0=2i$ نختار تفرع دالة اللوغاريتم $w=f(0)=Log\,3$

الحل: نبحث عن ذلك عن طريق المشتق $f'(z)=\frac{-i}{3-iz}$ و بوضع $z'=z-2i \Leftarrow z=z'+2i$

من أجل تطبيق دستور ماكلوران لان $z=2i \Leftarrow z'=0$ و منه

ب. بن علي

$$g(z')=f'(z'+2i)=\frac{-i}{3-i(z'+2i)}=\frac{-i}{5-iz'}=\frac{-i}{5}\left(\frac{1}{1-iz'/5}\right)=\frac{-i}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iz')^n}{5^n}$$

ثم بالمكاملة طرفا الى طرف بالنسبة الى z' على γ ضمن منطقة محتواه في $C-\{-5i\}$ نجد

$$f(z'+2i)=Log\,(1-iz'/5)=\frac{-i}{5}\int_\gamma\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iz')^n}{5^n}\right)dz'=\frac{-i}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_\gamma\frac{(iz')^n}{5^n}dz'$$

$$=\frac{-i}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iz')^{n+1}}{i(n+1)5^n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{iz'}{5}\right)^{n+1}$$

و منه $= f(z'+2i)=Log\,(5-iz')-Log\,5=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iz')^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}$

وبالرجوع الى $z'=z-2i$ نجد $f(z)=Log\,(3-iz)=Log\,5-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(iz-2)^n}{n5^n}$

سلاسل لوران

هل يمكن لدالة ليست تحليلية عند نقطة z_0 تمثيلها على شكل سلسلة قوى؟ المثال التالي يوضح ذلك ولكن ليست سلسلة تايلور حيث تكون قوى $(z-z_0)$ سالبة وليست موجبة بالضرورة

مثال: اعط تمثيل للدالة $e^{1/z}$ على شكل سلسلة قوى من خلال سلسلة تايلور،

إذا كان $|z|>1 \Leftarrow 1>\frac{1}{|z|}$ و بالتالي بتعويض $\frac{1}{z}$ بدلا z في السلسلة $e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$

نتحصل على السلسلة $e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n n!}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{z^3 3!}+....$ وهي سلسلة قوى لـ z تختلف عن سلسلة تايلور في جوار $z_0=0$

أي أنه يمكن تمثيل دالة تحليلية في منطقة D على شكل سلسلة ذات قوى سالبة و موجبة الحد $(z-z_0)$ وهي نتيجة نظرية لوران

منطقة تقارب سلسلة لوران

نعتبر السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n(z-z_0)^{-n}=b_1(z-z_0)^{-1}+b_2(z-z_0)^{-2}+.....$

لتحديد نصف قطر التقارب لهذه السلسلة، نضع $w=\frac{1}{z-z_0}$ بالتعويض في السلسلة السابقة نتحصل على سلسلة تايلور للمتغير w نصف قطر تقاربها $R'=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|$ ومنطقة تقاربها $|w|<R'$ هذا يعني أن $|z-z_0|>\frac{1}{R'}=r$. و بصورة عامة أذا كانت لدينا سلسلة قوى حدودها بقوى موجبة و سالبة للحد $(z-z_0)$ من الشكل $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n(z-z_0)^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$ وتسمى سلسلة لوران و نسمي الجزء من هذه السلسلة الذي أسس حدوده سالبة **الجزء الاساسي** أما الجزء الذي أسسه موجبة يسمى **الجزء التحليلي .**

نضع $R=\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ و $r=\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right|$ أي أن منطقة التقارب لسلسلة لوران هي الحلقة المعرفة كالتالي $\Re=\{z\in C;r<|z-z_0|<R\}$

نظرية: (نظرية لوران)
لتكن $f:\Re\to C$ دالة تحليلية في الحلقة $\Re=\{z\in C;r<|z-z_0|<R\}$ فإن الدالة f قابلة للنشر الى سلسلة لوران أي $\forall z\in\Re; f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$

و $c_n=\dfrac{1}{2i\pi}\oint_\gamma\dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw, n=0,\pm1,\pm2,...$ حيث $\gamma\subset\Re$.

نظرية: نفرض أن السلسلة $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$ متقاربة في الحلقة $\Re=\{z\in C;r<|z-z_0|<R\}$ فإنه توجد دالة وحيدة f تحليلية في الحلقة $\Re$ بحيث $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$

و $c_n=\dfrac{1}{2i\pi}\oint_\gamma\dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw, n=0,\pm1,\pm2,...$ حيث $\gamma\subset\Re$.

مثال: اعط نشر لوران للدالة و $f(z)=\dfrac{2}{(1-z)(z-2)}$ في المناطق التالية:

ا) $|z|<1$، ب) $1<|z|<2$، جـ) $|z|>2$

الحل: لاحظ أن $\forall z\in C-\{1,2\}, f(z)=\dfrac{\alpha}{1-z}+\dfrac{\beta}{z-2}$ بعد توحيد المقام والمطابقة مع الشكل المعطى نجد $\alpha=\beta=-1$ أي أن $f(z)=\dfrac{-1}{1-z}-\dfrac{1}{z-2}$

ا) $|z|<1$، أي أن $\dfrac{-1}{1-z}=-\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$ ، و $-\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{2(1-z/2)}=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n$

ومنه $f(z)=-\sum_{n=0}^{+\infty}z^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2^{-n-1}-1\right)z^n$

ب) $1<|z|<2$، بما أن $|z|>1\Leftarrow\dfrac{1}{|z|}<1$ ومنه $\dfrac{-1}{1-z}=\dfrac{-1}{z(1-1/z)}=\dfrac{-1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{-1}{z^{n+1}}$

لكن $|z|<2\Leftarrow\dfrac{|z|}{2}<1\Leftarrow\dfrac{1}{2-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}$ و منه $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{z^n}$

و ذلك بعد استبدال $n+1$ بـ n في السلسلة الثانية تكون بداية السلسلة من 1 و ليس من 0 .

جـ) $|z|>2$ و بالتالي و بنفس الطريقة نجد $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\left(2^{n-1}-1\right)}{z^n}$

وهذا بعد استبدال $n+1$ بـ n تكون بداية السلسلة من 1 و ليس من 0 .

النشر في جوار نقطة شاذة معزولة

تعريف: نسمي النقطة z_0 التي تكون من أجلها الدالة f ليست تحليلية بالنقطة الشاذة و إذا كان بالإمكان إيجاد $\delta(\delta > 0)$ بحيث كان الجوار $|z - z_0| < \delta$ لا يحتوي أي نقطة شاذة أخري للدالة f تختلف عن z_0 نسمي z_0 نقطة شاذة معزولة

النقطة الشاذة القابلة للرفع

تعريف: تكون النقطة z_0 نقطة شاذة قابلة للرفع للدالة f إذا كانت لها نهاية عندما $z \to z_0$

مثال: واضح أن $z_0 = 0$ هي نقطة شاذة معزولة للدالة $f(z) = \sin z/z$ و أن $\lim\limits_{z\to 0} \sin z/z = 1$

و منه نستنتج أن $z_0 = 0$ نقطة شاذة قابلة للرفع للدالة $f(z) = \sin z/z$.

نظرية: تكون النقطة z_0 نقطة شاذة قابلة للرفع للدالة f إذا و فقط إذا كان الجزء الاساس في نشر هذه الدالة الى سلسلة لوران في جوار z_0 معدوم.

مثال: نعتبر الدالة المركبة $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$ ، - عين النقطة الشاذة لهذه الدالة؟

- اعط نشر لوران اهذه الدالة في جوار النقطة الشاذة، ماذا تستنتج؟

الحل: النقطة الشاذة للدالة f هي النقطة $z_0 = 0$

نعلم بأن نشر $\cos z$ في جوار $z_0 = 0$ هو $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

ومن

$$\frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^4}{4!}\right) = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - ....$$

لاحظ أن حدود السلسلة كلها ذات أسس موجبة أي أن الجزء الاساس في سلسلة لوران غير موجود (معدوم) ومنه نستنتج أن النقطة الشاذة قابلة للرفع

نقطة التفرع: وهي نقطة شاذة للدالة متعددة القيم

مثال: $f(z) = (1+z)^{1/2}$ لها نقطة تفرع $z_0 = 0$ ونشرها في جوارها هو

$$f(z) = (1+z)^{1/2} = 1 + \sum_{n=}^{+\infty} \frac{1}{2} \times \ldots \times \left(\frac{1}{2} - n + 1\right) z^n$$

الاقطاب

تعريف: إذا كانت z_0 نقطة شاذة معزولة للدالة f وجد عدد $m(m \in IN^*)$ بحيث كانت $\lim\limits_{z\to z_0}(z - z_0)^m f(z) = A(A \neq 0, \infty)$ نسمي z_0 قطبا من الرتبة m و إذا كان $m = 1$ قطب بسيط

مثال: بين أن للدالة $k(z) = \dfrac{z^3}{(z-i)^4}$ قطب من الرتبة الثالثة عند $z_0 = i$

الحل: واضح أن $z_0 = i$ نقطة شاذة و أن $\lim\limits_{z\to i}(z-i)^4 \dfrac{z^3}{(z-i)^4} = \lim\limits_{z\to i} z^3 = -i$ أي $z_0 = i$ هو قطب من الرتبة الرابعة للدالة k

نظرية: تكون النقطة الشاذة z_0 قطبا من الرتبة $m(m \geq 1)$ للدالة f إذا كان

الجزء الاساس لسلسلة لوران لنشر الدالة f في جوار z_0 يحتوي على عدد منته من الحدود أي

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+....+\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}$$

مثال: بين أن للدالة $g(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^3}$ قطب وماهي رتبته؟

الحل: واضح أن للدالة نقطة $z_0=1$ شاذة للدالة $g(z)$ وأن $\lim\limits_{z\to 1}(z-1)^3\dfrac{e^z}{(z-1)^3}=e$

لدينا نشر الدالة e^z عند $z_0=1$ هو $e^z=ee^{z-1}=e\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n!}$ و بالتالي

$$g(z)=\frac{e}{(z-1)^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}=\frac{e}{(z-1)^3}+\frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{2(z-1)}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{e(z-1)^{n-3}}{n!}$$

$$=\frac{e}{(z-1)^3}+\frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{2(z-1)}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e(z-1)^n}{(n+3)!}$$

و منه نستنتج أن $z_0=1$ قطب من الرتبة الثالثة.

النقطة الشاذة الاساسية

تعريف: وهي نقطة شاذة تختلف عن القطب ونقطة القابلة للرفع ونقطة الفرع و هي أيضا النقطة الشاذة التي ليس للدالة عندها نهاية.

مثال: لتكن الدالة $h(z)=e^{1/z}$ لها نقطة شاذة $z_0=0$ لكن $\lim\limits_{z\to 0_-}e^{1/z}=0$ بينما $\lim\limits_{z\to 0+}e^{1/z}=+\infty$ ومنه نستنتج أنه ليس للدالة h نهاية عندما $z\to 0$ أي أن $z_0=0$ نقطة شاذة أساسية.

نظرية: تكون النقطة الشاذة z_0 نقطة شاذة اساسية للدالة f إذا وفقط إذا كان الجزء الاساس في نشر لوران لهذه الدالة في جوار z_0 يحتوي على عدد غير منتهي(لا نهائي) من الحدود.

مثال: نعتبر الدالة $h(z)=\cos\dfrac{1}{z}$، للدالة h نقطة شاذة $z_0=0$ ونعلم بأن

$h(z)=\cos\dfrac{1}{z}=\cos z^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z^{-1})^{2n}}{(2n)!}=....+\dfrac{1}{z^4 4!}-\dfrac{1}{z^2 2!}+1$ لاحظ أن الجزء الاساس في هذا النشر غير منتهي ومنه نستنتج أن $z_0=0$ نقطة شاذة اساسية للدالة h.

نظرية سوخوسكي: إذا كانت z_0 نقطة شاذة اساسية للدالة f فإنه لكل عدد مركب A توجد متتالية أعداد مركبة $\{z_n\}$ متقاربة نحو z_0 بحيث $\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n)=A$

مثال: لتكن الدالة $T(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$ النقطة $z_0=1$ نقطة شاذة اساسية، والتكن المتتالية $\{z_n\}$ بحيث $z_n=-\dfrac{1}{n}+1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}T(z_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-n}=0$.

جوار اللانهاية $(z_0=\infty)$

لتكن f دالة تحليلية في النطاق $0<\rho<|z|<+\infty$ في هذه الحالة $z_0=+\infty$ نقطة شاذة نسمي مجموعة النقط $\{z\in C;0<\rho<|z|<+\infty\}$ بجوار اللانهاية. f تحليلية في جوار $+\infty$ أي أن $z_0=+\infty$ $|z|>\rho$

لوضع $w = 1/z$ فإن $f(z) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \varphi(w)$ معرفة وتحليلية في الحلقة $0 < |w| < \rho$

إذن نوعية النقطة الشاذة عند $z_0 = +\infty$ هي من نوعية النقطة الشاذة $w = 0$ للدالة φ

نشر لوران في جوار اللانهاية $(z_0 = \infty)$

لنشر $f(z)$ في جوار $z_0 = +\infty$ يكفي نشر $\varphi(w)$ في جوار $w = 0$ ، بما أن φ تحليلية في جوار $w = 0$

أي في الحلقة $0 < |w| < \rho$ و منه $\varphi(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n w^n$ و بالتالي:

$$f(z) = \varphi(1/z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n / z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{-n} z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \,........ (*), (a_n = b_{-n}; n \in Z)$$

تعريف: نسمي السلسلة (*) سلسلة لوران في جوار اللانهاية و نسمي السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ الجزء الاساس للسلسلة (*) ايضا نسمي السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n / z^n$ الجزء التحليلي للسلسلة (*).

نوعية النقطة الشاذة عند $z_0 = +\infty$ بالنسبة للدالة $f(z)$

1) تكون نقطة شاذة قابلة للرفع إذا كان الجزء الاساس لنشر لوران للدالة $f(z)$ في جوار $z_0 = +\infty$ معدوم

مثال: نعتبر الدالة $k(z) = e^{-1/z^2}$ النقطة $z_0 = +\infty$ نقطة شاذة و نشر الدالة $k(z)$ في جوارها هو $k(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{-1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, z^{2n}}$ نلاحظ أن النشر لا يحتوي على الجزء الاساس ومنه نستنتج أن $z_0 = +\infty$ نقطة شاذة قابلة للرفع.

2) تكون النقطة الشاذة $z_0 = +\infty$ قطب للدالة $f(z)$ من الرتبة m $(m \geq 1)$ إذا كان الجزء الاساس في نشر لوران في جوارها يحوي عدد منته من الحدود بحيث أصغر معامل $a_m \neq 0$.

مثال: لتكن $g(z) = \frac{z^3 + 3}{z - 1}$ النقطة $z_0 = +\infty$ شاذة للدالة g ، النشر في جوارها هو

$$g(z) = \frac{z^3 + 3}{z - 1} = \frac{z^3 + 3}{z}\left(\frac{1}{1 - 1/z}\right) = \frac{z^3 + 3}{z}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n}\right)$$

$$= \left(z^2 + \frac{3}{z}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{3}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n}$$

$$= z^2 + z + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{z^{n-2}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{z^{n+1}} = z^2 + z + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(z^2 + \frac{3}{z}\right)\frac{1}{z^n}$$

واضح أن الجزء الاساس به حدين فقط وبالتالي $z_0 = +\infty$ هو قطب للدالة g من الرتبة الثانية.

3) تكون النقطة الشاذة $z_0 = +\infty$ نقطة شاذة اساسية إذا كان الجزء الاساس في نشر لوران للدالة f في جوارها يحتوي على عدد لانهائي من الحدود

مثال: لتكن الدالة $g(z) = \sin z$ ، $z_0 = +\infty$ نقطة شاذة و $\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

واضح أن الجزء الاساس في نشر لوران يحتوي على عدد غير منتهي من الحدود.