الفصل الرابع
تكامل الدوال المركبة

I) الدوال المركبة لمتغير حقيقي

تعريف: لتكن $f : I(I \subset IR) \to C$ حيث $f(t) = U(t) + iV(t)$ أي $U(t) = \mathrm{Re}(f(t))$ و $V(t) = \mathrm{Im}(f(t))$ واليكن المتراص $[a,b] \subset I$ بحيث f معرفة و مستمرة ولو بتقطع على $[a,b]$

فإن $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b U(t)dt + i\int_a^b V(t)dt$

و إذا كان $I = [0,+\infty[$ فإن $\int_I f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt$

مثال: جد التكامل التالي: $\int_0^{\pi/2} e^{it}dt$

الحل: لدينا $e^{it} = \cos t + i\sin t$ و بالتالي $\int_0^{\pi/2} e^{it}dt = \int_0^{\pi/2}\cos t dt + i\int_0^{\pi/2}\sin t dt = -1+i$

قواعد المكاملة: إذا كان $f\,,g$ دالتين مستمرتين على المتراص $[a,b] \subset I$ فإن قواعد المكاملة للدوال الحقيقية صحيحة على الدوال المركبة لمتغير حقيقي

1) $\int_a^b (f(t) \pm g(t))dt = \int_a^b f(t)dt \pm \int_a^b g(t)dt$

2) $\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt$ ، $\forall \alpha \in C$

3) إذا كان $a < c < b$ فإن $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ و إذا كان $a = c = b$ فإن $\int_a^a f(t)dt = 0$

و إذا كان $a = b \neq c$ فإن $\int_a^c f(t)dt = -\int_c^a f(t)dt$

4) $\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(t)dt$ ، و $\mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Im}\, f(t)dt$

5) $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

<u>**نظرية**</u>: إذا كانت (f_n) متتالية دوال مستمرة و متقاربة بانتظام على المتراص $[a,b]$ نحو الدالة المستمرة f فإن $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

كذلك إذا كانت $\sum_{n\geq 0} f_n$ سلسلة دوال مستمرة و متقاربة بانتظام **(نظيميا)** على المتراص $[a,b]$ نحو الدالة المستمرة f فإن $\sum_{n\geq 0}\int_a^b f_n(t)dt=\int_a^b f(t)dt$.

التظرية الاساسية للتفاضل و التكامل

لتكن $f:I(I\subset IR)\to C$ دالة مستمرة على I

1) بوضع $\forall t\in I; F(t)=\int_I f(s)ds$ و كان $\forall t\in I; F'(t)=f(t)$

و بالتالي نقول أن دالة F أصلية للدالة f على I

2) بفرض أن قابلة للاشتقاق F مع الاستمرار على I فإنه $\forall a,b\in I,\int_a^b F'(t)dt=F(b)-F(a)$

3) تحويل المتغير: لتكن $\varphi: I(I\subset IR)\to J(J\subset IR)$ دالة قابلة للاشتقاق مع الاستمرار على I

فإنه $\forall a,b\in I,\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)ds$

II) التكامل المنحني:

تعريف: نسمي المنحني الذي لا يتقاطع مع نفسه و الذي يمكن أن يكون طوله محدود أو غير محدود بمنحنى جوردان

نظرية: يقسم منحنى جوردان المستوي الى منطقتين و يكون المنحنى حدا مشتركا لهما و المنطقة التي تحقق $|z|<M$ ، $(M>0)$ تسمى المنطقة الداخلية و نسمي المنطقة المكملة الخارجية.

تعريف: المنحنى γ في C هو التطبيق $\gamma:[a,b]\subset IR\to C$ و يسمى بسيط الترابط إذا كان لا يقطع نفسه أي $\forall t_1,t_2\in[a,b]; t_1\neq t_2\Rightarrow \gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$ و إذا كان $\gamma(a)=\gamma(b)$ يكون γ مغلق

تعريف: نقول عن المنحنى $\gamma(t)$ أنه مهيئ **(املس)** إذا من الصنف $C^1([a,b])$ أي قابل للاشتقاق مع الاستمرار على $]a,b[$ ، و بالتالي إذا كان $f:I\to C$ بحيث $[A,B]\subset I$ و بوضع $Z=\gamma(t)$ فأن

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

مثال: احسب التكامل $\int_\gamma \bar{z}dz$ حيث $z=\gamma(t)=t^2+it$

الحل: لدينا $dz=2t+i$ ومنه

$$\int_\gamma \bar{z}dz=\int_0^2 (t^2-it)(2t+i)dt=t^4/2+t^2/2+i(t^3/3-2t^3/3)]_0^2=10-8i/3$$

ملاحظة: إذا كان المنحنى γ متصل نقطة بنقطة نقول أنه مستمر، إذا كان بالإمكان تقسيم المجال $[a,b]$ الى مجالات جزئية $a=t_0<t_1<.....<t_n=b$ بحيث كان γ مستمرا على كل مجال جزئي

نقول أن γ مستمر بتقطع على $[a,b]$، كذلك إذا كان مهيئ **(املس)** في كل $]t_j,t_{j+1}[$ $j=0,1,...,n-1;$ مجال جزئي نقول أنه مهيئ **(املس)** بتقطع على $[a,b]$.

تعريف الكفاف: نسمي المنحنى المكون من عدد محدود من المنحنيات المهيئة **(**الملساء**)** المتصلة نهاية ببداية **بالكنتور (**الكفاف**)**

مثال: احسب التكامل $\int_\gamma z^2 dz$ حيث γ يمثل الكنتور المكون من اتحاد القطعتين OA و AB بحيث O مبدأ المعلم، $A(2,0)$ و $B(2.1)$

الحل: واضح أن γ يمثل الضلعين القائمين في المثلث OAB القائم في A ومنه

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_{OA} x^2 dx + i\int_{AB}(2+iy)^2 dy = \int_0^2 x^2 dx + i\int_0^1 (2+iy)dy = -4/3+11i/3$$

خاصية-1-: إذا كانت المعادلة الوسيطية للكنتور γ هي $\gamma(t)\equiv z(t)=x(t)+iy(t);t\in[a,b]$ فإن

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

خاصية-2-: إذا كان الكنتور**(**الكفاف**)** γ مغلق و موجه في الاتجاه المعاكس لعقارب الساعة نرمز الى تكامل الدالة f على γ بالرمز $\oint_\gamma$ و نكتب $\oint_\gamma f(z)dz$

مثال: احسب التكامل $\oint_D z\,\mathrm{Re}(z^2)dz$ حيث $D=\{z\in C/|z|=1\}$ هي الدائرة ذات المركز O و نق $r=1$

الحل: نضع $z=re^{i\theta}$ حيث $\theta\in[0,2\pi]$، $r=1$ و بالتالي $dz=ie^{i\theta}d\theta$ كذلك $\mathrm{Re}(z^2)=\cos 2\theta$ و منه

$$\oint_D z\,\mathrm{Re}(z^2)dz = \oint_{|z|=1} z\,\mathrm{Re}(z^2)dz = i\int_0^{2\pi} e^{2i\theta}\cos 2\theta d\theta = -\int_0^{2\pi}\sin 2\theta\cos 2\theta d\theta + i\int_0^{2\pi}\cos^2 2\theta d\theta$$

$$= -\sin^2 2\theta/4 + i\theta/2\Big|_0^{2\pi} = i\pi$$

نظرية: ليكن $\gamma(t)\equiv z=z_0+re^{it}$ حيث $0\le t\le 2\pi$ فإنه $\forall n\in Z, \oint_\gamma (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 2i\pi; n=-1 \\ 0; n\neq -1\end{cases}$

البرهان: لدينا $\gamma(t)\equiv z=z_0+re^{it}$ حيث $0\le t\le 2\pi$ أي $z-z_0=re^{it}$ ومنه $dz=ire^{it}dt$

كذلك $(z-z_0)^n = r^n e^{nit}$ و بالتالي $\oint_\gamma (z-z_0)^n dz = i\int_0^{2\pi} r^{n+1}e^{i(n+1)t}dt = \left.\frac{e^{i(n+1)t}}{n+1}\right|_0^{2\pi} /(n\neq -1) = 1-1=0$

وإذا كان $n=-1$ فإن $\oint_\gamma (z-z_0)^n dz = i\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}}{re^{it}}dt = i\int_0^{2\pi}dt = 2i\pi$.

نظرية: ليكن γ كنتور**(**كفاف**)** موجه محتوى في منطقة $D\subset C$ و f,g دالتين مستمرتين على D، γ_1,γ_2 منحنيين منفصلين $(\gamma_1\cap\gamma_2=\phi)$ فإن

1) $\forall k\in C, \int_\gamma kf(z)dz = k\int_\gamma f(z)dz$

$$\int_\gamma [f+g](z)dz=\int_\gamma f(z)dz+\int_\gamma g(z)dz \quad (2$$

$$\int_{-\gamma} f(z)dz=-\int_\gamma f(z)dz \quad (3$$ ،

(4 $\left|\int_\gamma f(z)dz\right|\le \underset{z\in D}{Max}|f(z)|L$ حيث L طول المنحنى γ

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz \quad (5$$

البرهان: نقتصر على

3) إذا كان $\gamma:[a,b]\subset IR\to C$ نعرف $-\gamma(t)=\gamma(a+b-t)$ وبالتالي $-\gamma(a)=\gamma(b)$ و $-\gamma(b)=\gamma(a)$ أي أن $-\gamma:[b,a]\subset IR\to C$ و منه نستنتج أن $-\gamma(t)$ هو معكوس $\gamma(t)$ كذلك $\gamma(t)\in C^1([a,b])$ فإن $-\gamma(t)\in C^1([b,a])$ و بالتالي $\int_{-\gamma} f(z)dz=-\int_\gamma f(z)dz$

4) انطلاقا من المساواة $\forall t\in[a,b]\subset D; \int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ و مما سبق

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right|=\left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right|\le\int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt\le\int_a^b \underset{z\in D}{Max}|f(z)||\gamma'(t)|dt$$

$$\le \underset{z\in D}{Max}|f(z)|\int_a^b \gamma'(t)dt\le \underset{z\in D}{Max}|f(z)|L$$

5) بما أن $\gamma_1\cap\gamma_2=\phi$ فإن $\gamma_1+\gamma_2=\gamma_1\cup\gamma_2$ و بالتالي

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz=\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz \; .$$

نتيجة: من النظرية السابقة إذا كان n هدد منتهي و كانت $\gamma_1,\gamma_2,....\gamma_n$ منحنيات مهيئة و منفصلة مثنى مثنى فإن

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2\cup...\cup\gamma_n} f(z)dz=\sum_{i=1}^n\int_{\gamma_i} f(z)dz \; .$$

مثال: احسب التكامل $\int_\gamma dz/z$ حيث γ المربع الذي رؤوسه النقط ذات اللواحق

$-2-2i,-2+2i,2+2i,2-2i$

الحل: لتكن $A(2-2i)$ ، $B(2+2i)$ ، $C(-2+2i)$ ، $D(-2-2i)$ واضح مسار الحركة بإتجاه عكس حركة عقارب الساعة و منه التكامل A مرورا بـ D,C,B بهذا الترتيب الى A هو

$$\int_{ABCDA} dz/z=\int_{AB} dz/z+\int_{BC} dz/z+\int_{DC} dz/z+\int_{DA} dz/z$$

$$=\int_{-2}^{2} idy/(2+iy)+\int_{2}^{-2} dx/(x+2i)+\int_{2}^{-2} idy/(-2+iy)+\int_{-2}^{2} dx/(x-2i)$$

$$=\ln(2+iy)]_{-2}^{2}+\ln(x+2i)]_{2}^{-2}+\ln(-2+iy)]_{2}^{-2}+\ln(x-2i)]_{-2}^{2}$$

$$=\ln\frac{2+2i}{2-2i}+\ln\frac{-2+2i}{2+2i}+\ln\frac{-2-2i}{-2+2i}+\ln\frac{2-2i}{-2-2i}=0$$

III) قانون التكامل لكوشي

نظرية قرين: نفرض أن المسار γ كنتور بسيط الترابط، مغلق و موجه في الاتجاه المباشر داخل المنطقة D و كانت الدلتان $U(x,y),V(x,y)$ مستمرتان ودوالها المشتقة الجزئية الاولى U_x,U_y,V_x,V_y موجودة و مستمرة في جميع نقاط γ ، D فإن $\int_\gamma (Udx+Vdy)=\iint_D (V_x-U_y)dxdy$

نظرية كوشي-غوصة: لتكن f دالة تحليلية في نطاق بسيط الترابط D و كان γ كمنور مغلق في D فإن

$$\oint_\gamma f(z)dz=0$$

البرهان: بما أن f دالة تحليلية في D وكانت $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ فإن U_x,U_y,V_x,V_y موجودة و تحقق معادلتي كوشى – ريمان و $dz=dx+idy$ بالتالي

$$\oint_\gamma f(z)dz=\int_\gamma (U+iV)(dx+idy)=\int_\gamma (Udx-Vdy)+i\int_\gamma (Vdx+Udy)$$

$$=\iint_D (-V_x-U_y)dxdy+i\iint_D (U_x-V_y)dxdy=\iint_D (U_y-U_y)dxdy+i\iint_D (V_y-V_y)dxdy=0$$

مثال: بين أن $\int_{|z|=r} z^2dz=0$

الحل: الدالة $f(z)=z^2$ دالة تحليلية في C و المنطقة $S=\{z\in C/|z|=r, r>0\}$ تمثل دائرة مركزها O ونصف قطرها r فهي منحنى مغلق و بالتالي حسب نظرية كوشي $\oint_S z^2dz=\int_{|z|=r} z^2dz=0$.

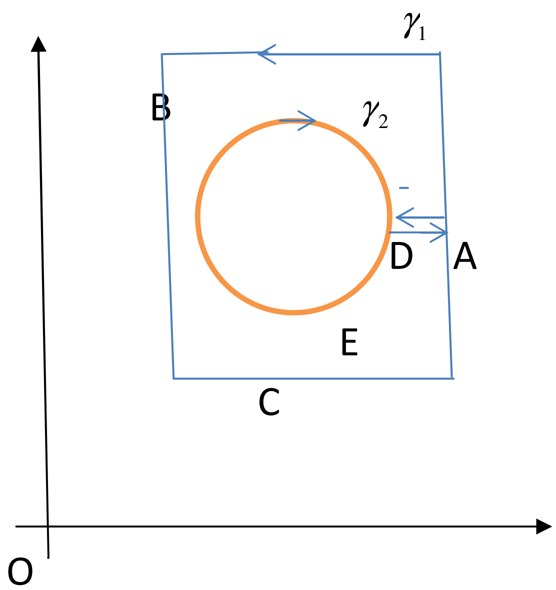
نتيجة-1-: تكامل دالة تحليلية داخل أو على كنتور مغلق معدوم ولو كانت لها نقطة شاذة خارج هذا الكفاف

مثال: بين أن $\int_{|z|=1} dz/(z-3)$

الحل: واضح أن الدالة $g(z)=1/(z-3)$ تحليلية على $S=\{z\in C/|z|=1\}$ و بداخلها حسب نظرية كوشي تكاملها على S معدوم.

نتيجة-2-: يمكن تطبيق نظرية كوشي على نطاق متعدد الروابط و ذلك بتقطيعه الى مسارات بين الفجوات

توضيح: لاحظ الشكل النطاق محدود بين المنحنيين γ_1 و γ_2 وبالتالي فهو نطاق متعدد الروابط فإذا



ما تصورنا و جود فجوة من A الى D وأكملنا المسار من A الى B الى C الى A ثم الى D ثم الى E **(**بعكس الاتجاه**)**ثم الى D ثم الى A فإننا بذلك نحصل على نطاق بسيط الترابط لأننا تجنبنا الفجوة و المسار يكون مغلق إذن بتطبيق نظرية كوشي لتكامل دالة تحليلية داخل منحني بسيط الترابط و مغلق يكون $\oint_{ABCADEDA} f(z)dz = 0$ ثم بتقسيم هذا المسار الى عدة مسارات متصلة نهاية ببداية نجد

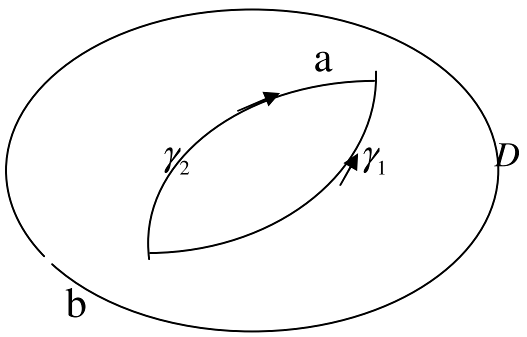
$$\oint_{ABCADEDA} f(z)dz = \oint_{ABCA} f(z)dz + \int_A^D f(z)dz + \oint_{DED} f(z)dz + \int_D^A f(z)dz = 0$$

واضح أن التكاملين $\int_A^D f(z)dz$ و $\int_D^A f(z)dz$ متعاكسين و منه نستنتج أن

$$\oint_{ABCA} f(z)dz + \oint_{DED} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow \oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz$$

نتيجة-3-: تكامل دالة تحليلية في نطاق D لا يعتمد على مسار معين بين أي نقطتين منه.

البرهان: لدينا المسارين المبينين في الشكل



المطلوب حساب التكامل $\int_a^b f(z)dz$ على كل من المسارين γ_1 و γ_2 و بفرض أن f تحليلية في D الذي يحوي المنحنيين γ_1 و γ_2 نسمي γ المسار من b الى a الى b الاتجاه المباشر واضح أن γ مغلق و بالتالي حسب نظرية كوشي $\oint_{\gamma} f(z)dz=0$ أي $\oint_{\gamma_1} f(z)dz=\oint_{\gamma_2} f(z)dz \Leftarrow \oint_{\gamma_1} f(z)dz-\oint_{\gamma_2} f(z)dz=0$

مثال: نعتبر الدالة $f(z)=z^2$ التحليلية في C، بين أن تكامل الدالة f بين النقطتين $z=0$ و $z=1+i$ مستقل عن المسارين $\gamma_2(t)=t+it^2;\gamma_1(t)=t+it;0\le t\le 1$

الحل: واضح أن $\oint_{\gamma_1} f(z)dz=\int_0^1 t^2 2i(1+i)dt=\frac{2}{3}(-1+i)$ كذلك

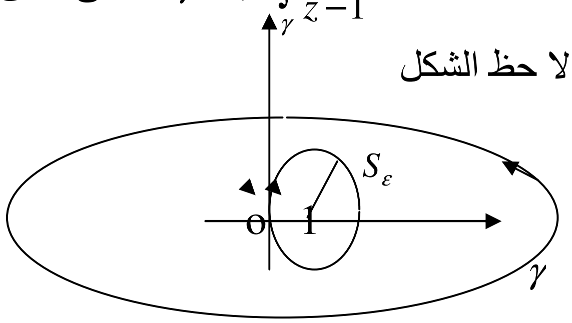
$\oint_{\gamma_2} f(z)dz=\int_0^1 (t+it^2)(1+2it)dt=\frac{2}{3}(-1+i)$ و منه نستنتج استقلالية التكامل على المسارين.

نظرية موريرا: إذا كانت f دالة مستمرة في نطاق D بسيط الترابط و كان على أي منحنى مغلق من D فإن $f(z)$ تحليلية في D.

ملاحظة: إذا كان للدالة f في النطاق D بسيط الترابط و المحدود بالمنحني المغلق γ نقطة شاذة z_0 فأنه يمكن عزلها بدائرة $S(z_0,\varepsilon);\varepsilon>0$ و حسب النتيجة2 $\oint_{\gamma} f(z)dz=\oint_{S_\varepsilon} f(z)dz=\oint_{|z-z_0|=\varepsilon} f(z)dz$.

مثال: احسب التكامل $\oint_{\gamma}\frac{dz}{z-1}$ حيث γ منحنى مغلق يحوي النقطة $z=1$

الحل: لا حظ الشكل

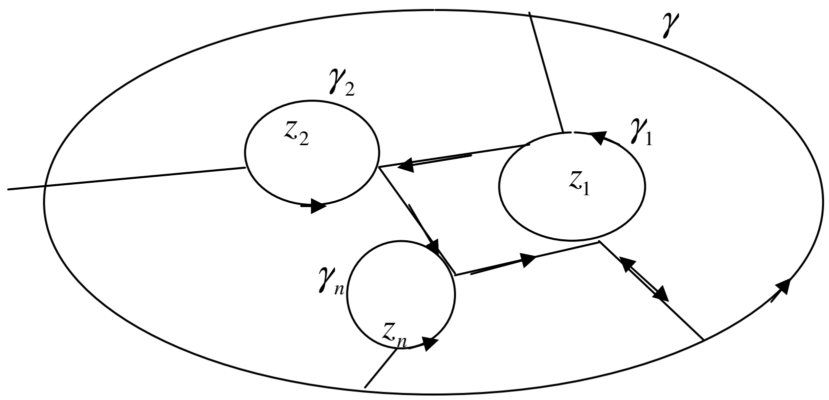


γ منحنى مغلق بسط الترابط يحوي النقطة $z=1$ حسب الملاحظة و بوضع $z-1=\varepsilon e^{i\theta}$ فإن $dz=i\varepsilon e^{i\theta}$ حيث $0\le\theta\le 2\pi$ و منه

$$\oint_{\gamma}\frac{dz}{z-1}=\oint_{S_\varepsilon}\frac{dz}{z-1}=\oint_{|z-1|=\varepsilon}\frac{dz}{z-1}=\int_0^{2\pi}\frac{i\varepsilon e^{i\theta}d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}}=i\int_0^{2\pi}d\theta=2i\pi$$

تكامل دالة غير تحليلية عند عدد محدود من النقط الشاذة

نظرية: لتكن $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة D وعلى المنحنيات المغلقة، γ_n، .....، γ_2، γ_1 , γ الحادة للمنطقة D فإن $\oint_{\gamma} f(z)dz=\sum_{i=1}^{n}\oint_{\gamma_i} f(z)dz$



مثال: لتكن $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة D و التي تحوي النقاط $z_0=0, z_1=-1, z_2=1$ وعلى المنحنى γ الحاد لها حيث $f(z)=\dfrac{z-i}{z(z^2-1)}$

الحل: حسب النظرية السابقة $\displaystyle\oint_\gamma \frac{z-i}{z(z^2-1)}dz=-\oint_{|z|=\varepsilon_1}\frac{z-i}{z}dz+\frac{1}{2}\oint_{|z-1|=\varepsilon_2}\frac{z-i}{z-1}dz-\frac{1}{2}\oint_{|z+1|=\varepsilon_3}\frac{z-i}{z+1}dz$

و بالتالي

بوضع $z=\varepsilon_1 e^{i\theta} \Rightarrow dz=i\varepsilon_1 e^{i\theta}d\theta$ و

$$\oint_{|z|=\varepsilon_1}\frac{z-i}{z}dz=\oint_{|z|=\varepsilon_1}dz-i\oint_{|z|=\varepsilon_1}\frac{dz}{z}=\int_0^{2\pi} i\varepsilon_1 e^{i\theta}d\theta+\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$$

كذلك بوضع $z-1=\varepsilon_2 e^{i\theta} \Rightarrow dz=i\varepsilon_2 e^{i\theta}d\theta$

$$\frac{1}{2}\oint_{|z-1|=\varepsilon_2}\frac{z-i}{z-1}dz=\frac{1}{2}\oint_{|z-1|=\varepsilon_2}dz+\frac{(1-i)}{2}\oint_{|z-1|=\varepsilon_2}\frac{dz}{z-1}=\int_0^{2\pi}\frac{i\varepsilon_2}{2}e^{i\theta}d\theta+\frac{i(1-i)}{2}\int_0^{2\pi}d\theta=\pi(1+i)$$

و بوضع $z+1=\varepsilon_3 e^{i\theta} \Rightarrow dz=i\varepsilon_3 e^{i\theta}d\theta$

$$\frac{1}{2}\oint_{|z+1|=\varepsilon_3}\frac{z-i}{z+1}dz=\frac{1}{2}\oint_{|z+1|=\varepsilon_3}dz-\frac{(1+i)}{2}\oint_{|z+1|=\varepsilon_3}\frac{dz}{z+1}=\int_0^{2\pi}\frac{i\varepsilon_3}{2}e^{i\theta}d\theta-\frac{i(1+i)}{2}\int_0^{2\pi}d\theta=\pi(i-1)$$

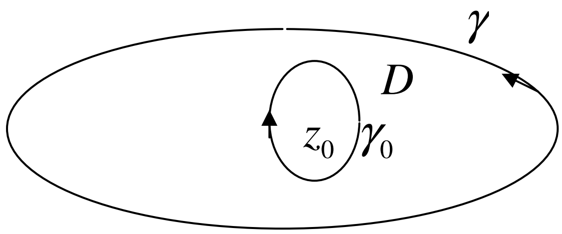
و منه $\displaystyle\oint_\gamma\frac{z-i}{z(z^2-1)}dz=-2\pi+\pi(i+1)-\pi(i-1)=0$

ب بن علي

IV) صيغة كوشي للتكامل

نظرية: إذا كانت $f(z)$ تحليلية داخل و على المنحنى المغلق γ البسيط الترابط و كانت $z=z_0$ داخل γ فإن $f(z_0)=\dfrac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma}\dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$ و بصورة عامة $\forall n\in IN, f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2i\pi}\oint_{\gamma}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

البرهان: إذا كان $n=0$ حسب النتيجة-2- انظر الشكل $\gamma_0=\{z\in C/|z-z_0|=\varepsilon;\varepsilon>0\}$
و $dz=i\varepsilon e^{i\theta}\Leftarrow z-z_0=\varepsilon e^{i\theta},0\le\theta\le 2\pi$ و منه



$$\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_{\gamma_0}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_{|z-z_0|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})ie^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}}d\theta=i\int_0^{2\pi}f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})d\theta$$

بما أن $f(z)$ تحليلية داخل و على المنحنى المغلق γ فهي مستمرة ومنه $\lim\limits_{\varepsilon\to0}f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})=f(z_0)$

و بالتالي $\oint_{\gamma}\dfrac{f(z)}{z-z_0}dz=if(z_0)\int_0^{2\pi}d\theta=2i\pi f(z_0)$

في حالة $n=1$ نأخذ $\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\dfrac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma}\dfrac{1}{h}\left[\dfrac{1}{z-(z_0+h)}-\dfrac{1}{z-z_0}\right]f(z)dz$

$$=\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma}\left[\frac{z-z_0}{[z-(z_0+h)](z-z_0)^2}\right]f(z)dz=\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma}\frac{[z-(z_0+h)+h]f(z)}{[z-(z_0-h)](z-z_0)^2}dz$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}+\frac{h}{2i\pi}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{[z-(z_0-h)](z-z_0)^2}dz$$

واضح أنه لما $h\to0$ فإن $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=f'(z_0)$ و الطرف الثاني هو $\dfrac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma}\dfrac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}$ ك

ذلك لأن $\dfrac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma}\dfrac{f(z)dz}{(z-z_0)^2[z-(z_0+h)]}=\dfrac{h}{2i\pi}\oint_{\gamma_0}\dfrac{f(z)}{[z-(z_0-h)](z-z_0)^2}dz$

بأخذ $|h|<\varepsilon/2$ حتى يكون $z=z_0+h$ داخل γ_0 و بما أن $|z-z_0-h|\ge|z-z_0|-|h|\ge\varepsilon-\varepsilon/2=\varepsilon/2$

و بما أن $f(z)$ تحليلية داخل و على المنحنى المغلق γ_0 فهي محدودة أي $\exists M;|f(z)|<M$ و منه

$$\left|\frac{h}{2i\pi}\oint_{\gamma_0}\frac{f(z)}{[z-(z_0-h)](z-z_0)^2}dz\right|\leq\frac{|h|}{2\pi}\oint_{\gamma_0}\frac{|f(z)||dz|}{|z-z_0|^2|z-(z_0+h)|}\leq\frac{|h|M\varepsilon}{2\pi\varepsilon^2\,\varepsilon/2}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{2|h|M}{\varepsilon^2}\xrightarrow[h\to0]{}0$$

يمكن مواصلة البرهان بالتراجع بفرض أن $f^{(n-1)}(z_0)=\frac{(n-1)!}{2i\pi}\oint_\gamma\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^n}$ ونبرهن صحة

$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2i\pi}\oint_\gamma\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ بنفس الطريقة في حالة $n=1$ عن طريق النسبة

$$\frac{f^{(n-1)}(z_0+h)-f^{(n-1)}(z_0)}{h}$$

مثال: احسب بطريقتين مختلفتين التكامل $\oint_\gamma\frac{\sin z dz}{(z-1)(z-2)}$ حيث γ يحوي النقطتين $z=1, z=2$

الحل: **__طريق1__** نعلم بأن ة $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$ و بالتالي و حسب صيغة كوشي

$$\oint_\gamma\frac{\sin z dz}{(z-1)(z-2)}=\oint_\gamma\frac{\sin z}{z-2}dz-\oint_\gamma\frac{\sin z}{z-1}dz=2i\pi(\sin 2-\sin 1)$$

__طريق2__ باستعمال نظرية كوشي أي كل مرة نعزل النقطتين حيث γ_{ε_1} يعزل $z=1$ و γ_{ε_2} يعزل $z=2$ كمايلي حيث

ملاحظة: من النظرية السابقة و برهانها نستنتج أنه إذا كانت $f(z)$ تحليلية في نطاق D فإن جميع مشتقاتها الى الرتبة n أي $f^{(n)}(z)$ تحليلية في D

مثال: احسب التكامل $\oint_\gamma\frac{e^{5z}dz}{(z-1)^5}$ حيث γ يشمل $z=1$

الحل: حسب صيغة كوشي $\oint_\gamma\frac{e^{5z}dz}{(z-1)^5}=\frac{2i\pi}{4!}\left(e^{5z}\right)^{(4)}_{z=1}=\frac{2i\pi 5^4 e^5}{4!}$

متباينة كوشي: لتكن $f(z)$ تحليلية على القرص $D(z_0,R)$ و تحقق $\exists M>0,\forall z\in D,|f(z)|\leq M$ فإن

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|\leq\frac{Mn!}{R^n}$$

البرهان: حسب صيغة كوشي $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2i\pi}\oint_\gamma\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\Rightarrow\left|f^{(n)}(z_0)\right|\leq\frac{Mn!R}{R^{n+1}}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{Mn!}{R^n}$

نظرية ليوفيل: لتكن $f(z)$ تحليلية في المستوي المركب و $\exists M>0,\forall z\in C,|f(z)|\leq M$ فإن f دالة ثابتة

البرهان: حسب متباينة كوشي من أجل $n=1$ فإن $|f'(z_0)|\leq\frac{M}{R}$ و لكن f تحليلية في كل C و بالتالي يمكن أن نأخذ $R=\infty$ و منه $0\leq|f'(z_0)|$ أي $|f'(z_0)|=0$ و z_0 كيفية و منه نستنتج أن $f(z)$ ثابتة.

نظرية قانون التوسط: إذا كانت $f(z)$ تحليلية في نطاق بسيط الترابط D يحوي القرص $\gamma(z_0,R)$

فإن $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z\ \ +\mathrm{Re}^{i\theta}\right)d\theta$

ب بن علي

البرهان: نعلم بأن $\gamma(t)=z_0+\mathrm{Re}^{i\theta} \Leftarrow d\gamma=i\mathrm{Re}^{i\theta}\,d\theta$ و حسب صيغة كوشي

$$f(z_0)=\frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+\mathrm{Re}^{i\theta})\mathrm{Re}^{i\theta}}{\mathrm{Re}^{i\theta}}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+\mathrm{Re}^{i\theta})d\theta$$

برهان نظرية موريرا: بما أن الدالة $f(z)$ مستمرة D فإنها تقبل الدالة اصلية و بما أن z_0 نقطة ثابتة في D إذن F تحليلية في D و بالتالي $\forall z\in D, F(z)=\int_{z_0}^{z} f(s)ds$ ، نستنتج أن دالتها المشقة f تحليلية في D

النظرية الاساسية لجبر دالتبير-غوص:

كل كثير حدود غير ثابت و بمعاملات مركبة يقبل على الاقل جذر مركب

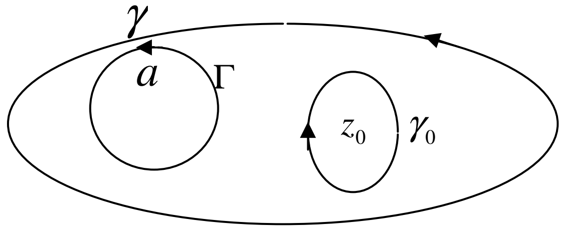
البرهان: ليكن $P(z)$ كثير حدود غير ثابت من الرتبة n بحيث $P(z)\neq 0$ كل دالة $f(z); f(z)=1/P(z)$ من أجل كل z من C غير ثابتة و تحليلية، لدينا $P(z)=z^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+...+\frac{a_2}{z^{n-1}}+\frac{a_1}{z^n}\right), a_n\neq 0,$

و منه نستنتج أن $|P(z)|\underset{z\to+\infty}{\to}+\infty$ و بالتالي $\exists M>0$ بحيث f محدودة خارج $D=\{z\in C,|z|\leq M\}$

و لكن f مستمرة فهي محدودة قي D و بالتالي نستنتج أن f محدودة في C و منه حسب نظرية ليوفيل في ثابتة و هذا يثبت ايضا أن P ثابت وهذا تناقض.

نظرية السعة-1-: إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على منحنى γ مغلق بسيط الترابط و بداخله باستثناء نقطة $z=z_0$ و التي هي قطب من الرتبة m و كذلك $f(z)$ لها صفر وحيد في النقطة $z=a$ داخل γ برتبة n

فإن $\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=2i\pi(n-m)$



نظرية السعة-2-: : إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على منحنى γ مغلق بسيط الترابط و بداخله باستثناء عدد محدود من الاقطاب $a_1,a_2,...,a_m$ و التي رتبها د $p_1,p_2,...,p_m$ داخل γ و كانت للدالة $f(z)$ عدد محدود من الاصفار $b_1,b_2,...,b_k$ داخل γ و التي رتبها $n_1,n_2,....n_k$ بعزل كل الاقطاب و الاصفار Γ_j,γ_i

فإن $$\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{i=1}^{m}\oint_{\gamma_i}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\sum_{j=1}^{k}\oint_{\Gamma_j}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2i\pi\left(\sum_{j=1}^{k}n_j-\sum_{i=1}^{m}p_i\right)$$

مثال: إذا كانت $f(z)=\frac{(z-1)^3(z-i)^4}{(z+5)^2(z+i)^6(z+1)^3}$ فأوجد $\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ علما أن كل الاقطاب و الاصفار داخل γ

الحل: لاحظ أن $z=1$ و $z=i$ صفرين للدالة $f(z)$ من الرتب 3و 4 على الترتيب أما الاقطاب فهي $z=-5$ ، $z=-i$ و $z=-1$ و رتبها أيضأ على الترتيب 2 ، 6و 3 و بالتالي

$$\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2i\pi[(3+4)-(2+6+3)] = -8i\pi$$