الفصل الثالث
الدوال المرجعية
كثيرات الحدود و الكسور الناطقة
إذا كان $n \in IN$ و $a_0, a_1, ...a_n$ ثوابت مركبة نسمي العبارة الجبرية
$(a_n \neq 0)$ ، $P_n(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ كثير حدود من الدرجة n و منطقة تعريفه C
و نسمي حاصل قسمة كثيري حدود بالكسر الناطق $r(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \dfrac{a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + ... + b_m z^m}$
حيث $Q(z) \neq 0$ و الدالة $r(z)$ معرفة على $D_r = C / \{Q(z) = 0\}$

مثال: عين مجموعة تحريف الكير الناطق $r(z) = \dfrac{z^3 - 3z + 2}{z^2 + 1}$ هي $D_r = C - \{-i, i\}$

تعريف: نقول عن الدالة f أنها تحليلية في نطاق D من C إذا كانت هلمورفية في D و قابلة للنشر الي سلسلة صحيحة في D.

نظرية: 1) الدالة $P_n(z)$ تحليلية في C و $P'_n(z) = a_1 + 2a_2 z .... + n a_n z^{n-1}$

2) الدالة $r(z)$ تحليلية ضمن أي مفتوح من D_r و $r'(z) = \dfrac{P'_n(z) Q_m(z) - Q'_m(z) P(z)}{Q^2{}_m(z)}$

نظرية: كل كثير حدود غير ثابت بمعاملات مركبة يقبل على الاقل جذرا مركبا.

البرهان: انظر الفصل الرابع

حسب النظرية السابقة إذا كان $(a_n \neq 0)$ ، $P_n(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ فإنه $\exists z_1 \in C$

بحيث $P_n(z_1) = 0$ و بالتالي يمكن كتابة $P_n(z) = (z - z_1) P_{n-1}(z)$ حيث $P_{n-1}(z)$ من الرتبة $n-1$

كذلك $\exists z_2 \in C$ بحيث $P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) P_{n-2}(z)$ و هذا يؤدي بنا يمكن كتابة

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2)........(z - z_n)$$

مثال: حلل كثير الحدود $P(z) = z^3 + (2 - i) z^2 - 2iz$ الجداء عوامل من الدرجة الاولى

الحل: واضح أن $P(z) = z(z^2 + (2 - i) z - 2i) = z(z + 2)(z - i)$

الدوال الاسية المركبة:
تعريف: إذا كان $z = x + iy; (x, y) \in IR^2$ نعرف الدالة الاسية المركبة بالعلاقة التالية

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos\ y + i \sin\ y)$$

إذا كان $y = 0 \Leftarrow e^z = e^x$ أي أنها الدالة الاسية للمتغير الحقيقي x و منه نستنتج أن الدالة الاسية المركبة هي تمديد للدالة الا سية الحقيقية e^x في C و تأخذ قيمها فيي

نظرية: الدالة الاسية المركبة تحليلية في C و مشتقها يحقق المساواة $de^z / dz = e^z$

البرهان: بوضع $z = x + iy$ حسب التعريف نستنتج أن $\text{Re}(e^z) = e^x \cos\ y$ و $\text{Im}(e^z) = e^x \sin\ y$

ونما أن e^z تحليلية و حسب شرطي كوشي– ريمان فإنه لدينا $\text{Re}(e^z)_x = U_x = e^x \cos\ y = V_y$ و

$\text{Re}(e^z)_y = U_Y = -e^x \sin\ y = V_x$ و منه $de^z / dz = U_x + iV_x = e^x(\cos\ y + i \sin\ y) = e^z$

مثال: احسب المشتقة للدالة $f(z) = iz^4 (z^2 - e^z)$

الحل: الدالة تحليلية في C و $f'(z) = 4iz^3 (z^2 - e^z) + iz^4 (2z - e^z) = iz^3 (6z^2 + (z - 4) e^z)$

قضية: إذا كان $\forall z_1, z_2 \in C$ $\quad e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow \exists k \in Z; z_1 = z_2 + 2ki\pi$

البرهان: $\Rightarrow$)

$$\exists k \in Z; z_1 = z_2 + 2ki\pi \Rightarrow e^{z_1} = e^{z_2+2ik\pi} = e^{z_2}e^{2ik\pi}$$
$$e^{z_2}\left(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)\right) = 1e^{z_2} = e^{z_2}$$

$\Leftarrow$) بالمطابقة

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Rightarrow e^{z_1}/e^{z_1} = 1 \Rightarrow e^{z_1-z_2} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi); k \in Z$$
$$\Rightarrow e^{z_1-z_2} = e^{2ik\pi} \Rightarrow z_1 - z_2 = 2ik\pi \Rightarrow z_1 = z_2 + 2ik\pi$$

خواص:

1) الدالة الاسية المركبة دورية و دورها $2i\pi$

2) $e^0 = 1$ ، 3) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ ، 4) $1/e^z = e^{-z}$ ، 5) $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$

6) $\forall n \in Z, \left(e^z\right)^n = e^{nz}$ ، 7) $\left|e^z\right| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ ، 8) $e^z \neq 0$ ، 9) $\forall a > 0; a^z = e^{z\ln a}$

10) الدالة الاسية المركبة ليست متباينة مثل الدالة الاسية الحقيقية.

مثال: ليكن α ثابت حقيقي، ما هي صورة المجموعة $A = \{z \in C; z = \alpha + iy\}$ بواسطة الدالة $f(z) = e^z$

الحل: لدينا $f(A) = \{w \in C, e^z = e^{\alpha+iy}, \alpha \in IR\} = \{w \in C, |w| = e^{\alpha}\}$ و هي دائرة مركزها المبدأ و نصف قطرها e^{α}.

الدالة اللوغاريتمية المركبة:

تعريف: ليكن z عدد مركب غير معدوم حيث $z = |z|e^{i\arg(z)}$ و بالتالي نعرف

$$\log z = \ln|z| + i\arg(z) \qquad (z \neq 0)$$

و باستعمال الاحداثيات القطبية إذا كان $z = re^{i\theta}; (r,\theta) \in IR_+^* \times IR$ $\Leftarrow$ $\log z = \ln r + i\theta$

حيث θ يمثل احدى قيم $\arg(z)$ و نكتب بصورة عامة $\log z = \ln r + i(\theta + 2k\pi); k \in Z$

و هذا يبين أن الدالة اللوغاريتمية المركبة متعددة القيم أي العدد المركب z له عدة صور.

خواص: الدالة اللوغاريتمية المركبة لها الخواص التالية:

1) $\forall z_1, z_2 \in C^*; \log(z_1z_2) = \log z_1 + \log z_2$ ، 2) $e^{\log z} = z$

3) $\forall z_1, z_2 \in C^*; \log(z_1/z_2) = \log z_1 - \log z_2$ ، 4) $\log e^z = z + 2ik\pi; k \in Z$.

البرهان: 1) ليكن $(z_1, z_2) \in C^{*2}$

$$\log z_1 + \log z_2 = \ln|z_1| + i\arg z_1 + \ln z_2 + i\arg z_2$$
$$= \ln\left(|z_1||z_2|\right) + i\left(\arg z_1 + \arg_2\right) = \ln|z_1z_2| + i\arg(z_1z_2) = \log(z_1z_2)$$

2) $e^{\log z} = e^{\ln|z| + i\arg z} = |z|e^{i\arg z} = z$

4) $\log e^z = \log e^{z+2ik\pi} = z + 2ik\pi; k \in Z$.

مثال: اكتب الاعداد التالية على الشكل $a + ib$

$$\log(1+i) \quad \text{،} \quad \log(-1) \quad \text{،} \quad \log 4$$

الحل: $\log 4 = \ln 4 + i\arg(4) = \ln 4 + 2ik\pi; k \in Z$

$$\log(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) = \ln 1 + i(2k+1)\pi = i\pi(2k+1); k \in Z$$

$$\log(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right); k \in Z.$$

ب. بن علي

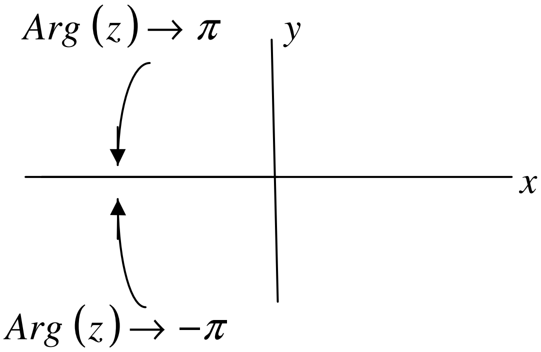
القيمة الرئيسية للدالة log

تعريف: القيمة الرئيسية للدالة $\log z$ بأنها القيمة المعرفة كما يلي

$$Log\,(z) = \ln|z| + iArg\,(z); -\pi < Arg\,(z) \le \pi$$

الدالة $Log\,(z)$ دالة وحيدة القيمة على المنطقة الاساسية $R_{fon} = \{z \in C; |z| > 0, -\pi < Arg\,(z) \le \pi\}$

و التي ليست مستمرة على المحور الحقيقي السالب أي $\{z \in C; \mathrm{Re}(z) \le 0, \mathrm{Im}(z) = 0\}$



الدالة $Log\,(z)$ ليست مستمرة على المحور الحقيقي السالب و $z = 0$

ملاحظة-1-: لاحظ الفرق بين رمزي الدالة $\log z$ و العمدة $\arg(z)$ و بين القيمة الرئيسية $Log\,(z)$ و العمدة $Arg\,(z)$ بحيث $-\pi < Arg\,(z) \le \pi$.

ملاحظة-2-: الدالة $Log\,(z)$ ليست فرعا للدالة $\log z$ و لكنها اقتصار للدالة $\log z$ على $R_1 = \{z \in C; |z| > 0, -\pi < Arg\,(z) < \pi\}$ (أي $\arg(z) \ne \pi$) هي فرع للدالة $\log z$ هذا الفرع يسمى فرع رئيسي.

مثال: احسب القيمة للدالة $Log\,(z)$ حيث $z = -2$

الحل: نعلم أن $Log\,(-2) = \ln|-2| + iArg\,(-2) = \ln 2 + i\pi$

قضية: إذا كانت الدالة المركبة $f\,(z) = e^z$ معرفة على المنطقة R_{fon} فإن $f\,(z)$ متباين و دالته العكسية الدالة $f^{-1}(z) = Log\,(z)$.

البرهان: نعلم حسب الخاصية للدالة اللوغاريتمية بأن $e^{\log z} = z$ و بما أن $Log\,(z)$ هي اقتصار للدالة $\log z$ على المنطقة R_1 و بالتالي $e^{Log\,(z)} = z$

من جهة ثانية حسب الخاصية4 و بما أن $Log\,(z)$ هي اقتصار للدالة $\log z$ على المنطقة R_1 نستنتج أن $Log\,(e^z) = \ln|e^z| + iArg\,(e^z) = \ln e^x + iy = x + iy = z$.

نظرية: الفرع الرئيس للدالة $\log z$ و المعرفة بالدالة $Log\,(z)$ على المنطقة R_1 تحليلية و مشتقتها تعطى بالعبارة $d\,(Log\,(z))/dz = 1/z$

البرهان: ليكن z من R_1 و كان $z = re^{i\theta} \Leftarrow -\pi < \theta < \pi$ و بالتالي $Log\,(z) = \ln r + i\theta$

و بوضع $U = \ln r$ و $V = \theta$ نجد أن $\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}, \frac{\partial V}{\partial \theta} = 1$ و $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial V}{\partial r}$ و بالتالي بتطبيق شرطي كوشي- ريمان في الا حداثيات القطبية أي $\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}; \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}$ و هاته الدوال مستمرة في R_1 وبالتالي حسب نظرية الدوال التوافقية الدالة $Log\,(z)$ تحليلية و

ب. بن علي

$\left(Log\left(z\right)\right)' = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial r}+i\frac{\partial V}{\partial r}\right)=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{z}$ و هذا بشرط z لا يحقق $\mathrm{Re}\left(z\right)\le 0$ و $\mathrm{Im}\left(z\right)=0$.

مثال: عين منطقة تحليلية الدالة $g\left(z\right)=Log\left(z+1\right)$ و احسب دالتها المشتقة

منطقة تحليلية هذه الدالة $C/\{z\in C, z=x+iy; x\le 0, y=0\}$ و $g'(z)=\frac{1}{z+1}$

صورة منطقة بالدالة Log(z)

إذا كان $z=re^{i\theta}$ و $f\left(z\right)=Log\left(z\right)=U+iV$

صورة $\{z\in C;|z|>0\}$ بالدالة $Log\left(z\right)$ هي $\{w\in C;-\infty<U<+\infty,-\pi<V<\pi-\}$

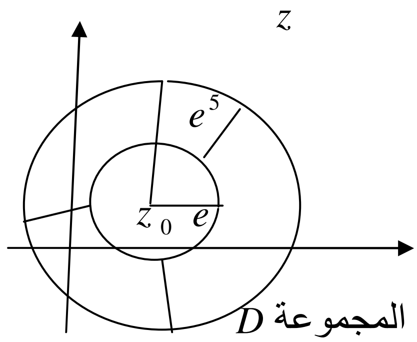
صورة $\{z\in C;|z|=r, r>0\}$ بالدالة $Log\left(z\right)$ هي $\{w\in C;U=\ln r,-\pi<V<\pi-\}$

صورة $\{z\in C; Arg\left(z\right)=\theta\}$ بالدالة $Log\left(z\right)$ هي $\{w\in C;-\infty<U<+\infty, V=\theta\}$

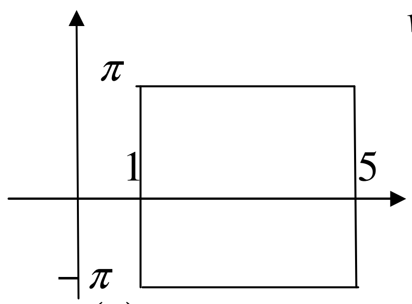
مثال: عين صورة $D=\left\{z=C;e<\left|z<e^5\right|\right\}$ بالدالة $Log\left(z\right)$ ،

ومنه $w=Log\left(z\right)=U+iV=\ln|z|+iArg\left(z\right)$

$$U=\ln|z|, V=Arg\left(z\right)\Rightarrow 1\le U=\ln|z|\le 5,-\pi<V=Arg\left(z\right)<\pi$$



المجموعة D



صورة المجموعة D بالدالة $Log\left(z\right)$

الدالة الاسية للأساس الكيفي

تعريف: نسمي الدالة $z\to w=z^a$ حيث $a\in C$ و تعرف بالعبارة أيضا $w=e^{a\log z}$ (log يرمز الى الدالة اللوغاريتمية متعددة القيم) بالدالة الاسية ذات الاساس الكيفي و هي أيضا دالة متعددة القيم.

ملاحظة: في حالة أخذ فرع للدالة log تكون الدالة z^a وحيدة القيمة في نفس منطقة الفرع في حالة اختيار الفرع الرئيس فإن $f\left(z\right)=z^a=e^{aLog\left(z\right)}$ و $f'\left(z\right)=az^{a-1}$.

مثال: لاحظ أن $i^{2i}=e^{2i\log i}=e^{2i\left(\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)}=e^{-\pi(4k+1)}$.

حالات خاصة: - z^a لها قيمة وحيدة إذا كان $a=n; n\in Z$

- z^a لها m قيمة إذا كان $a=n/m;\left(n,m\right)\in Z\times Z^*$

- z^a تقبل عدد لا نهائي من القيم القابلة للعد في الحالات الاخر

- القيمة الرئيسية لـ z^a إذا كان $z^a=e^{aLog\left(z\right)}$ نقطة التفرع لـ z^a العامة عند $z=0$

الدوال الجيبية المركبة

نعلم بأن $e^{it} = \cos t + i \sin t; t \in IR$ و بنفس الكيفية التي عرفت بها الدوال الاسية المركبة انطلاقا من الدوال الاسية الحقيقية بنفس الكيفية نعرف الدوال الجيبية المركبة انطلاقا من الدوال الجيبية الحقيقة و بالتالي $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ ، $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$$\cot g(z) = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} \quad ، \quad tg(z) = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$$

خواص: كل الخواص الواردة بين الدوال الجيبية الحقيقية صحيحة بين الدوال الجيبية المركبة كـ:

$$\forall z \in C \;\; ، \sin(z+2\pi) = \sin(z) \;\; ، \cos(-z) = \cos(z) \;\; ، \sin(-z) = -\sin(z)$$

$$.\cot g(z+\pi) = \cot g(z) \;\; ، \;\; \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

نظرية: الدوال $\cos(z), \sin(z)$ تحليلية في C و $d(\sin z)/dz = \cos(z)$ ،

$$d(\cos z)/dz = -\sin(z)$$

البرهان: نعلم بأن $\dfrac{d(\sin z)}{dz} = \dfrac{d\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{2idz} = \dfrac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \cos z$

كذلك $\dfrac{d(\cos z)}{dz} = \dfrac{d\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{2dz} = \dfrac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$.

مثال: احسب مشتقات الدوال التالية $\log\left[\dfrac{1}{\cos z} + tgz\right]$ ، $\dfrac{1}{\sin\left[1+z^2\right]^{1/2}}$ ، ثم $\lim\limits_{z\to 0}(\cos z)^{1/z^2}$

$$d\left(\log\left[\frac{1}{\cos z} + tgz\right]\right)\Big/dz = \frac{\sin z/\cos^2 z + 1/\cos^2 z}{1/(\cos z) + tgz} = 1/\cos z$$

$$d\left(\frac{1}{\sin\left[1+z^2\right]^{1/2}}\right)\Big/dz = -z\cos\left[1+z^2\right]^{1/2} \Big/ \left[1+z^2\right]^{1/2} \sin^2\left[1+z^2\right]^{1/2}$$

حسب نظرية لوبيطال

$$\lim_{z\to 0}\log(\cos z)^{1/z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{\log(\cos z)}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{-\sin z}{2z\cos z} =$$

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{z}\right)\left(\frac{-1}{2\cos z}\right) = -1/2 \Rightarrow \lim_{z\to 0}(\cos z)^{1/z^2} = e^{-1/2}$$

الدوال الزائدية المركبة

تعريف: نعرف الدوال الزائدية لمتغير مركب كما الحال في الدوال الزائدية لمتغير حقيقي أي

$$cthz = \frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1} \quad ، \quad thz = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} \quad ، \quad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad ، \quad shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

خواص: نفس خواص الدوال الزائدية لمتغير حقيقي

$$ch^2 z + sh^2 z = ch2z \;\; ، ch^2 z - sh^2 z = 1 \;\; ، sh(-z) = -shz \;\; ، \;\; ch(-z) = chz$$

$$ch(z+w) = ch(z)ch(w) + sh(z)sh(w) ، sh(z+w) = sh(z)ch(w) + ch(z)sh(w)$$

الدالتان chz, shz دوريتان و دورهما $2i\pi$ أي $sh(z+2i\pi) = shz$ ، $ch(z+2i\pi) = chz$

للأن مثلا $shz = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \dfrac{e^z e^{2i\pi} - e^{-z} e^{-2i\pi}}{2} = \dfrac{e^{z+\pi 2i} - e^{-z-2i\pi}}{2} = sh(z+2i\pi)$

ب. بن علي

نظرية: الدالتان shz ، chz تحليليتان على C^*و C على الترتيب و مشتقتيهما

$$\frac{d(shz)}{dz}=chz \text{ و } \frac{d(chz)}{dz}=shz$$

البرهان: واضح أن $\frac{d(shz)}{dz}=\frac{d\left(e^{z}-e^{-z}\right)}{2dz}=\frac{e^{z}+e^{-iz}}{2}=chz$

كذلك $\frac{d(chz)}{dz}=\frac{d\left(e^{z}+e^{-z}\right)}{2dz}=\frac{e^{z}-e^{-iz}}{2}=shz$

العلاقة بين الدوال الزائدية و الجيبية

$$sh(iz)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=i\sin z \quad \text{،} \quad ch(iz)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z \text{ ، } \sin(iz)=ishz \text{ ، } \cos(iz)=chz$$

$$|sh(z)|^2=\frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^2\cos^2 y}{4}+\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)\sin^2 y}{4}=\frac{\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)\left(\cos^2 y+\sin^2 y\right)}{4}+\frac{\sin^2 y-\cos^2 y}{2}$$

$$=\frac{\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)}{4}+\frac{1+\sin^2 y-\cos^2 y}{2}=\frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^2}{4}+\frac{\sin^2 y+1-\cos^2 y}{2}=sh^2x+\sin^2 y$$

بنفس الطريقة يتم صحة العلاقات

$$|\cos z|^2=\cos^2 x+sh^2y \quad \text{،} |\sin z|^2=\sin^2 x+sh^2y \quad \text{،} \quad |ch(z)|^2=sh^2x+\cos^2 y$$

الدوال العكسية

نظرية: أثبت أن $\sin^{-1}z=-i\log\left[zi+\left(1-z^2\right)^{1/2}\right]$ ، $\cos^{-1}z=-i\log\left[z+i\left(1-z^2\right)^{1/2}\right]$

$$sh^{-1}z=\log\left[z+\left(1+z^2\right)^{1/2}\right] \quad \text{،} \quad ch^{-1}z=\log\left[z+\left(z^2-1\right)^{1/2}\right]$$

البرهان: لنبرهن أن $ch^{-1}z=\log\left[z+\left(z^2-1\right)^{1/2}\right]$

و ذلك مثلا بوضع $ch^{-1}z=w$ فإن $z=chw=\frac{e^{w}+e^{-w}}{2}$ و بالتالي $2z=e^{w}+e^{-w}$

أي معادلة من الدرجة الثانية مجهولها e^{w} كالتالي $e^{2w}-2ze^{w}+1=0$ مميزها $\Delta'=z^2-1$

و منه $e^{w}=z+\left(z^2-1\right)^{1/2}\Leftarrow ch^{-1}z=w=\log\left[z+\left(z^2-1\right)^{1/2}\right]$ ، نفس الطريقة تبرهن البقية.

مثال: أثبت أن $\frac{d\left(\cos^{-1}z\right)}{dz}=\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$

الحل: نعلم بأن $\cos^{-1}z=-i\log\left[z+i\left(1-z^2\right)^{1/2}\right]$ و بالتالي

$$\frac{d\left(\cos^{-1}z\right)}{dz}=\frac{d\left[-i\log\left[z+i\left(1-z^2\right)^{1/2}\right]\right]}{dz}=-i\frac{1-iz/\left(1-z^2\right)^{1/2}}{z+i\left(1-z^2\right)^{1/2}}$$

$$=-\frac{\left[z+i\left(1-z^2\right)^{1/2}\right]\left(z-i\left(1-z^2\right)^{1/2}\right)}{\left(z^2+\left(1-z^2\right)\right)\left(1-z^2\right)^{1/2}}=-\frac{z^2+\left(1-z^2\right)}{\left(1-z^2\right)^{1/2}}=\frac{-1}{\left(1-z^2\right)^{1/2}}$$