COURS TRAITEMENT de SIGNAL

Chapitre 2 :

Les signaux déterministes à temps continu

I . Introduction

Le lien entre la représentation temporelle d'un signal et sa représentation fréquentielle est la décomposition en Série de Fourier (DSF) pour les signaux périodique ou la Transformée de Fourier (TF) pour les signaux non périodiques.

II. Propriétés temporelles

II .1 Énergie et Puissance des signaux:

- ***Énergie de x(t) :***

$$E = \lim_{To \to \infty} \int_{-\frac{To}{2}}^{\frac{To}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

- ***Puissance moyenne de x(t):***

$$P = \lim_{To \to \infty} \frac{1}{To} \int_{-\frac{To}{2}}^{\frac{To}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

- ***Puissance moyenne des signaux périodiques de période T :***

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

II.2 Fonction d'auto corrélation et d'inter corrélation

Pour comparer deux signaux entre eux, ou faire ressortir une caractéristique d'un signal noyé dans le bruit, on compare le signal **x(t)** pris à un instant « ***t*** **»,** à un signal **y(t)** pris à un instant **« *t'= t -τ* ».**

1 L'inter corrélation

L'inter corrélation compare deux signaux réels x(t) et y(t) retardée, elle traduit la ressemblance de de forme entre eux:

$$C_{x,y}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y\ (t-\tau)dt$$

$$C_{x,y}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^{*}(t-\tau)dt$$

2 L’auto corrélation

L’auto corrélation réalise une comparaison entre un signal x(t) et ses copies retardées.

$$C_{x,x}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x\ (t-\tau)dt$$

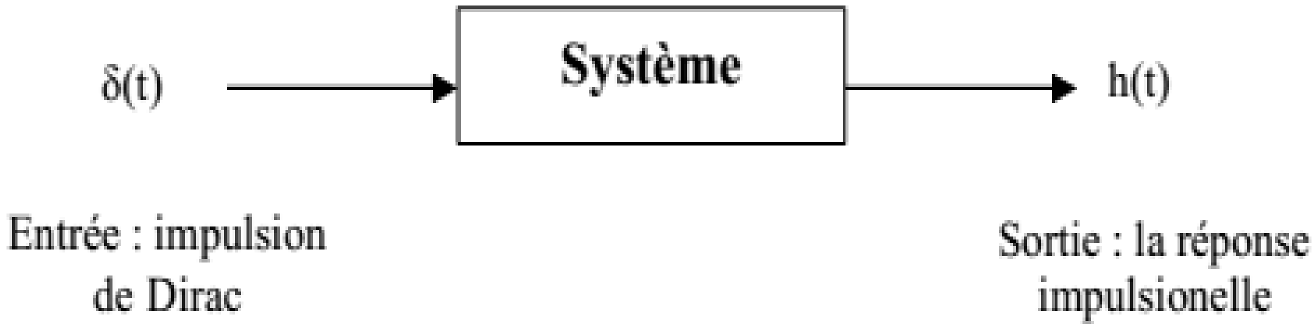
Propriétés de corrélation

- ✓ $C_{x,x}(t)$ est maximale pour $t = 0$.
- ✓ $C_{x,y}(t) = C_{x,y}(-t)$: c'est une fonction paire.
- ✓ $C_{x,y}(t) = x(t) * y(-t)$ et $C_{x,x}(t) = x(t) * x(-t)$.

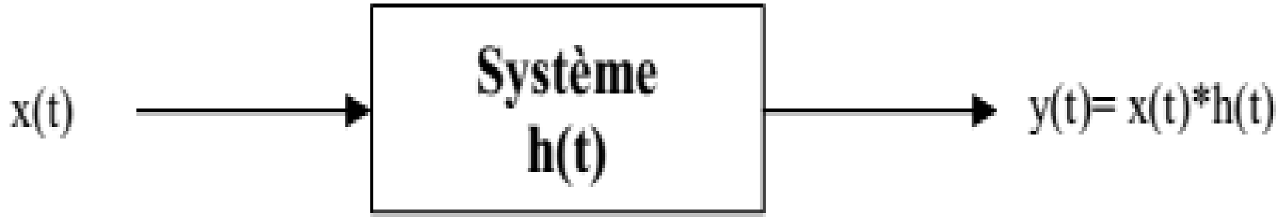
III. Produit de Convolution

1. Définition

Soit le système ci-dessous, ayant pour entrée une impulsion de Dirac *δ(t)* et de sortie la réponse impulsionelle h(t)



Un système linéaire est modélisé par sa réponse impulsionelle. La réponse y(t) d'un système à une entrée x(t) est une superposition de réponses impulsionelle amplifié par des valeurs instantanées de x(t) ; cette opération appelé : convolution de x par h ; noté (*).



Equation générale de convolution

$$\mathbf{Y(t) = x(t) * h(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau).h(\tau).d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau).d\tau$$

2. Propriétés du produit de convolution

Soit les trois signaux continus : f1[t], f2[t] et f3[t]

a- La commutativité :

$$f_1[t] * f_2[t] = f_2[t] * f_1[t]$$

b- La distributivité

$$(f_1[t] + f_2[t])* f_3[t] \;\; = (f_1[t] * f_3[t]) + (f_2[t] * f_3[t])$$

c- L'associativité

$$f_1[t] * f_2[t] * f_3[t] = f_1[t] * (f_2[t] * f_3[t]) = (f_1[t] * f_2[t]) * f_3[t]$$

d- L'élément neutre

$$f[t] * \delta[t] \;\; = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau).\delta(t-\tau).d\tau = f[t]$$

Exemple 1 :

Soit les signaux continus h(t) et x(t):

$h(t) = 2$ pour $0 \leq t \leq 2$

$h(t) = 0$ sinon

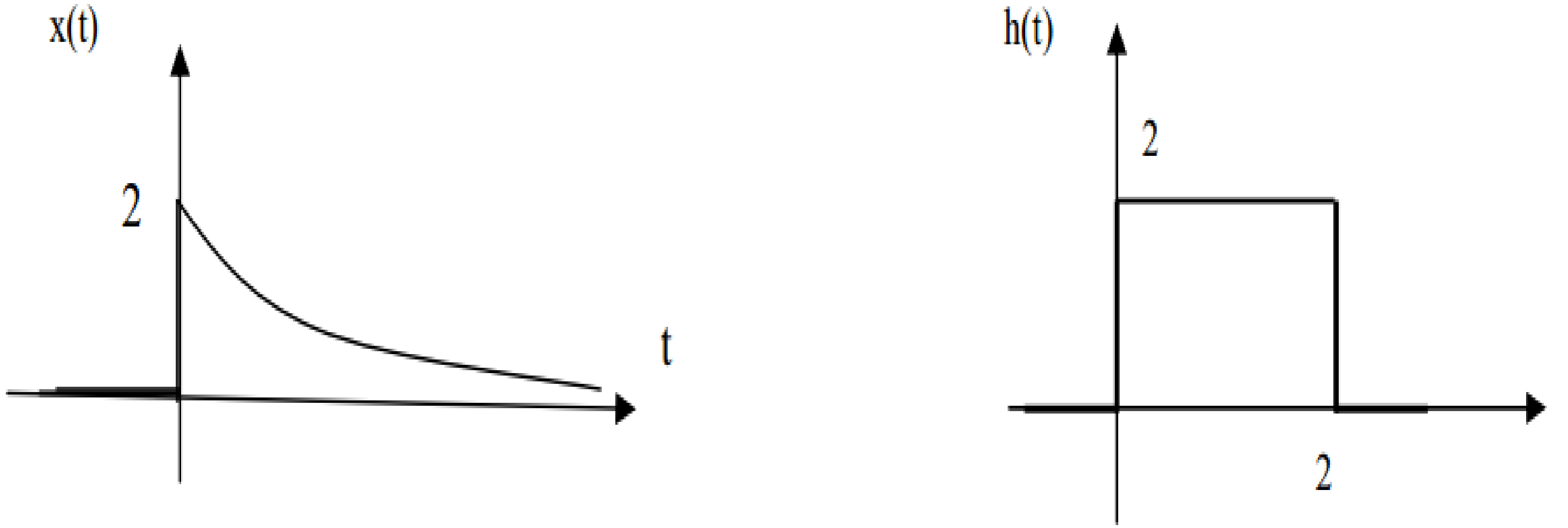
$x(t) = 2.e^{-t}$ pour $t \geq 0$

a- Représenter les deux signaux.

b- Déterminer le produit de convolution

$$y(t) = x(t) * h(t).$$

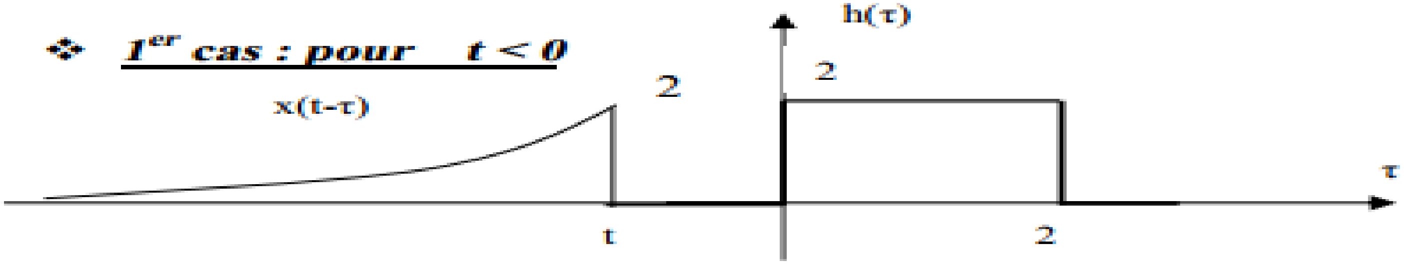
a-



La représentation temporelle des signaux x(t) et h(t).

b- le produit de convolution $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau).h(\tau).d\tau$

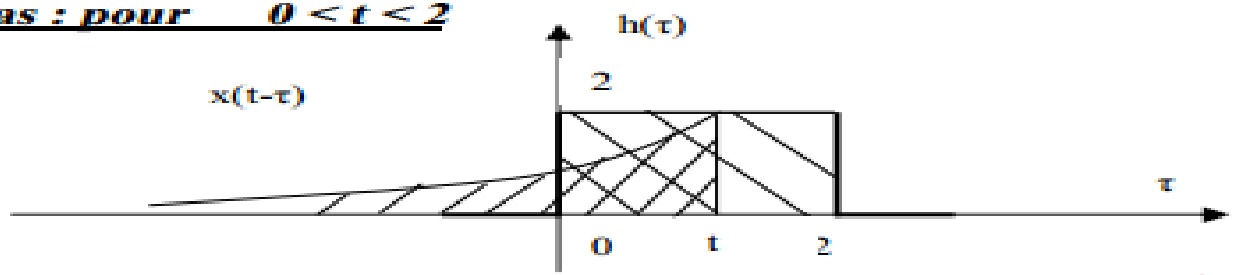
- ***1^er cas : pour $t < 0$***



La représentation des signaux pour *$t < 0$*.

Pas d'intersection entre les deux signaux d' où **$y(t) = 0$.**

- ***2^er cas : pour $0 < t < 2$***



La représentation des signaux pour $0 < t < 2$.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau).h(\tau).d\tau = \int_0^t 2.2.\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau = 4 \int_0^t e^{-t}.\, e^{\tau}.\, d\tau$$

$$= 4e^{-t} \int_0^t .\, e^{\tau}.\, d\tau = 4.\ e^{-t}[e^{t} - 1]$$

<u>$y(t) = 4.\ e^{-2t} - 4.e^{-t}$ pour $0 < t < 2$</u>

- ***3^eme cas : pour $t > 2$***

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau).h(\tau).d\tau = \int_0^2 4.\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau = 4 \int_0^t e^{-t}.\, e^{\tau}.\, d\tau$$

$$= 4e^{-t} \int_0^2 .\, e^{\tau}.\, d\tau = 4.\ e^{-t}[e^{2} - 1]$$ d'où <u>$y(t) = 4.\ e^{2-t} - 4.e^{-t}$ pour $t > 2$</u>

Exemple 2 : Soit un système «***S***» caractérisé par sa réponse impulsionelle ***h(t)***.

Si on excite ce système par un signal ***x (t),*** on aura une réponse ***y (t)***.

Soient les deux signaux continus *x(t)* **et** *h(t)* **telle que** :

$h(t) = 1$ pour $-2 \leq t \leq 2$

$h(t) = 0$ sinon

$x(t) = 1$ pour $0 \leq t \leq 4$

$x(t) = 0$ sinon

a- Représenter les deux signaux.

b- Déterminer le produit de convolution

$$y(t) = x(t) * h(t).$$

c- Représenter le produit de convolution ***y (t)***.

Transformation de Fourier des fonctions périodiques

Série de Fourier

L'introduction de la transformée et de la Série de Fourier permet de donner une autre représentation des signaux très intéressante pour la théorie de l'information et du signal .Cette décomposition **exponentielle** ou **trigonométrique** permet d'exprimer le signal en fonction de ses harmoniques.

1. Décomposition sous une forme trigonométrique

Un signal périodique s(t) de période T, peut être décomposé en Série de Fourier selon la Décomposition trigonométrique suivante :

Pour tout signal s(t) réel où ***s(t) = s (t + T0)***, on peut écrire :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(n2\pi F_0 t) + B_n \sin(n2\pi F_0 t)\right] \qquad (1)$$

Avec

$$A_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} s(t)dt$$

$$A_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} s(t).\cos(n2\pi F_0 t)dt \qquad pour\ n \geq 1$$

$$B_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} s(t).\sin(n2\pi F_0 t)dt \qquad pour\ n \geq 1$$

A_0 est la valeur moyenne de s(t).

Remarque :

- ✓ Si s(t) est paire => $B_n = 0$ pour $n \in N^*$
- ✓ Si s(t) est impaire => $A_n = 0$ pour $n \in N$ ($A_0 = 0$).

L'expression (1) peut s'écrire :

$$\mathbf{s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n.\cos(2\pi F_0 nt + \varphi_n)} \quad (2)$$

avec : $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ et $\varphi_n = Artgan\ (-\frac{b_n}{a_n})$

2. Décomposition sous une forme exponentielle

Un signal périodique ***s(t)*** de période T_0, continu par morceaux, peut être décomposé en Série de Fourier selon la Décomposition exponentielle suivante :

L'expression (1) peut se mettre sous la forme complexe suivante :

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n(nF_0) e^{jn2\pi F_0 t}$$

Avec $$S(nF_0) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} s(t) e^{-jn2\pi F_0 t} dt \quad pour\ n \geq 1 \quad \text{et} \quad S(0) = a_0$$

S(nF0) représente les composantes du spectre en fréquence de s(t), grandeur en général complexe, qui a pour :

- module : $|S(nf_0)| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{c_n}{2}$
- phase : $\varphi(nF_0) = \text{Arctan}(-b_n / a_n)$

L'expression du spectre S(f) est :

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} S(nF_0).\delta(f - nF_0) \quad \text{avec } S(nF_0) = |S(nF_0)|.\, e^{j\varphi(nF_0)}$$

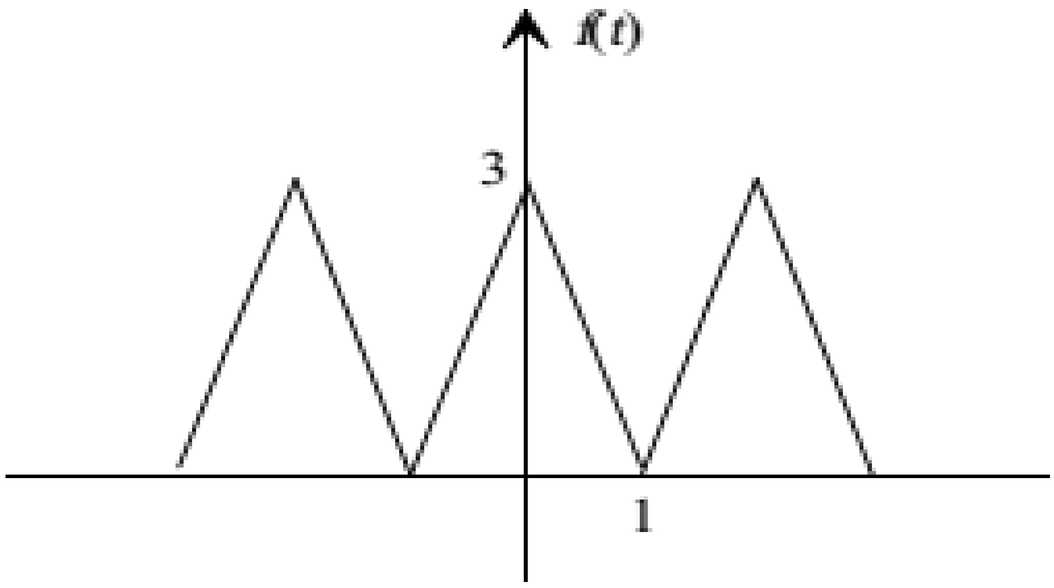
Propriétés

Si s(t) est paire => $B_n = 0$ et $S_n = S_{-n}$

Si s(t) est impaire => $A_n = 0$ et $S_n = -S_{-n}$

Exemple 01:

Décomposer en série de Fourier le signal représentée sur la figure suivante:



- **Correction :**

La période est : T = 2 s ; La pulsation est : $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$; f est une fonction paire : $B_n = 0$.

La valeur moyenne est :

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} v(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} v(t)dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} v(t)dt$$

$\forall t \in [-1, 0]$ et $\forall t \in [0,1]$

$v(t) = at + b \Rightarrow v(t) = 3t + 3$ $v(t) = -3t + c \Rightarrow v(t) = -3t + 3$

D'où :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(3t+3)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}t^2 + 3t\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1(-3t+3)dt=\frac{1}{2}\left[-\frac{3}{2}t^2+3t\right]_0^1=\frac{3}{4}$$

A_0 = 3/4+3/4=3/2 **A_0 = 3/2**

$$A_n=\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0}s(t).\cos(n2\pi F_0 t)dt \quad \Rightarrow \quad A_n=\frac{2}{T}\int_{-1}^{1}f(t)\cos(n\pi t)dt$$

$$A_n=\int_{-1}^{0}(3t+3)\cos(n\pi t)dt+\int_0^1(-3t+3)\cos(n\pi t)dt$$

En intégrant par partie, on trouve $A_n=\frac{3}{(n\pi)^2}\left[1-(-1)^n\right]+\frac{3}{(n\pi)^2}\left[1-(-1)^n\right]$

D'où $$A_n=\frac{6}{(n\pi)^2}\left[1-(-1)^n\right]$$

Transformation de Fourier des fonctions

T.F

Soit *x(t)* un signal déterministe non périodique, sa transformée de Fourier est :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{T.F}} \longrightarrow X(f)$$

$$X(f) = TF\{x(t)\}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j2\pi ft}\,dt$$

- ✓ X(f) est une fonction de f, généralement complexe :

$$X(f) = R\{X(f)\} + j.I\{X(f)\} = |X(f)|\ .e^{j\varphi(f)}$$
$$= |X(f)|\ \cos(\varphi(f)) + j\ |X(f)|\ .\sin(\varphi(f))$$

-le module est l'amplitude du spectre :

$$|X(f)| = \sqrt{R[X(f)]^2 + I[X(f)]^2}$$

-L'argument $\varphi(f) = \arg(x(f)) = \mathrm{Arctg}\left(\frac{I[X(f)]}{R[X(f)]}\right)$

- ✓ La transformation inverse est donnée par :

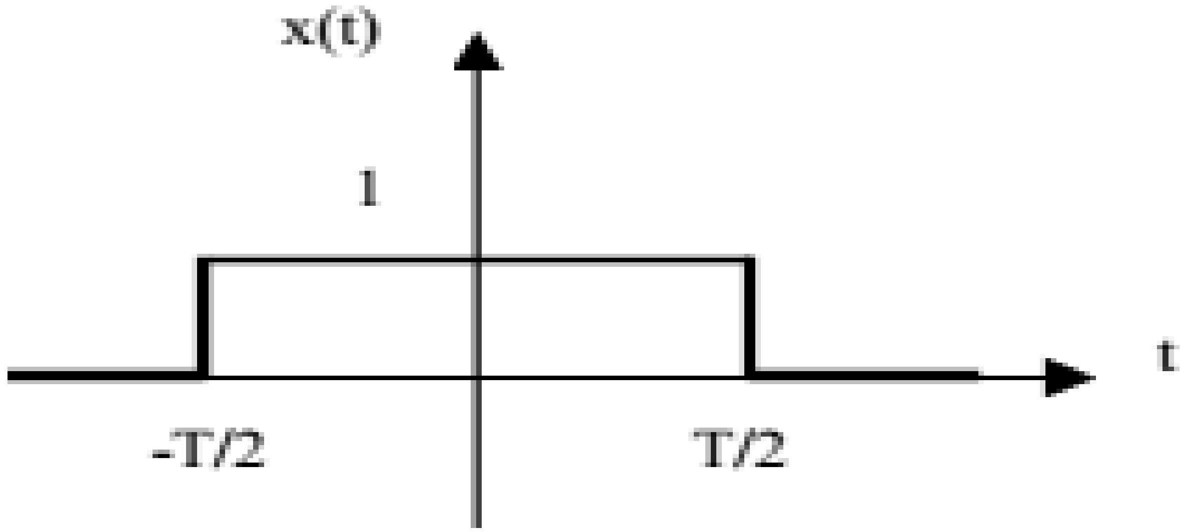
$$X(f) \longrightarrow \boxed{T.F^{-1}} \longrightarrow x(t)$$

$$x(t) = TF^{-1}\{\, X(f) \,\}$$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} . dt}$$

Exemple 02:

1. Calculer la transformée de Fourier de $x(t) = rect_T(t)$;
2. Représenter le spectre de x(t).



1. $X(f) = TF\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} rect_T(t).e^{-j2\pi ft}.dt$

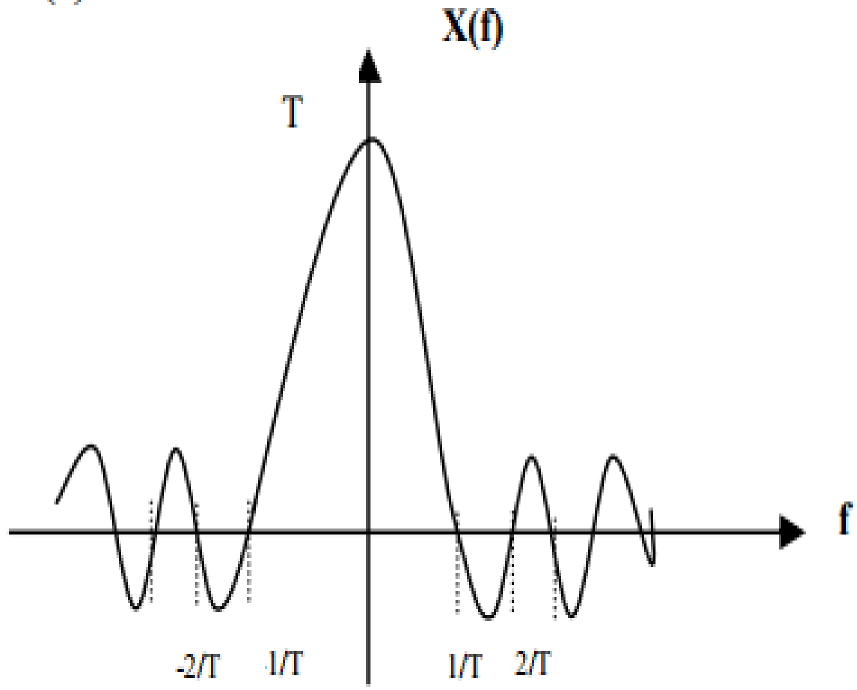
$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot e^{-j2\pi ft}.dt = -\frac{1}{j2\pi f}[e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}]$$

or $\sin\alpha = \frac{1}{2j}[e^{\alpha j} - e^{-j\alpha}]$ et $\operatorname{sinc}\alpha = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$

D'où $X(f) = \frac{1}{\pi f}.\sin(\pi fT) = T.\frac{1}{\pi fT}.\sin(\pi fT) = T.\operatorname{sinc}(fT)$

D'où <u>**$X(f) = T.\operatorname{sinc}(fT)$**</u>

2. représentation de X(f) :



Représentation spectrale d'un signal rectangulaire.

Propriétés de la TF

	s(t)	S(F)
Linéarité	$\alpha.s(t) + \beta.r(t)$	$\alpha.S(f) + \beta.R(f)$
Translation	$s(t-t_0)$	$e^{-2j\pi f t_0} S(f)$
	$e^{2j\pi f_0 t} s(t)$	$S(f-f_0)$
Conjugaison	$s^*(t)$	$S^*(-f)$
Dérivation	$\dfrac{d^n s(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n S(f)$
Dilatation	$s(at)$ avec $a \neq 0$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert} S\left(\dfrac{f}{a}\right)$
Convolution	$s(t) * r(t)$	$S(f) \bullet R(f)$
	$s(t) \bullet r(t)$	$S(f) * R(f)$
Dualité	S(t)	s(-f)

Cas particulier : Transformée de Fourierde Dirac

Le signal : $s(t)$	Transformée de Fourier Du signal : $S(f)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-j2\pi f\tau}$
$e^{-j2\pi f_0 t}$	$\delta(f+f_0)$

Application :

Calculer et représenter la transformée de Fourier d'un signal sinusoïdale s(t) d'amplitude S et de fréquence f_0 telle que : $s(t) = S.\cos(2\pi f_0 t)$

- Correction :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt = S.\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi ft}dt$$

or $\quad \cos(2\pi f_0 t) = \dfrac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$

$$S(f) = S.\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right)e^{-j2\pi ft}dt = \frac{S}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t}.e^{-j2\pi ft}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 t}.e^{-j2\pi ft}dt\right]$$

$$= \frac{S}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f_0 - f)t}\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f_0 + f)t}\,dt\right] = \frac{S}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f - f_0)t}\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f + f_0)t}\,dt\right]$$

$$S(f) = \frac{S}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$TF\left[S.\cos(2\pi f_0 t)\right] = \frac{S}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$