République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Echahid Hamma Lakhdar d’El Oued
Faculté de la Technologie
Département de GénieMecanique

Sujets des exercices avec corrigés du module de: Théorie du Signal

Mr Djokhrab Ala Eddine
Département de Génie mécanique Faculté de Technologie
Université de Echahid Hamma Lakhdar d’El Oued

Anné Universitaire 2020/2021

Exercice 01: sachant que :

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b) \qquad \cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$

1- Donner en fonction de *(cos(a) ; cos(b) ; sin(a) et sin(b))* les relations suivantes:

$$\sin(2a), \cos(2a), \sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right), \sin(a-b), \cos(a-b), \sin\left(a-\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(a-\frac{\pi}{2}\right)$$

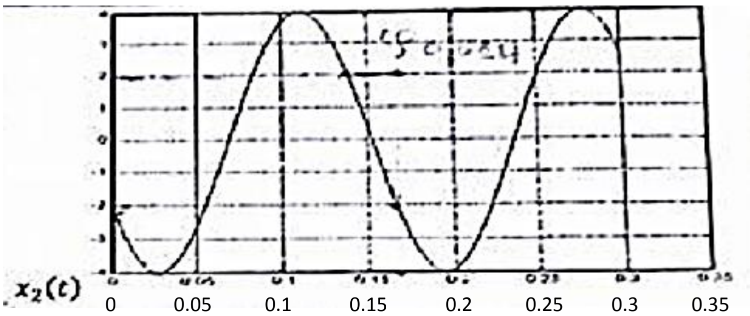
2- Déduire **C** et φ pour que $A\cos(a)+B\sin(a)=C\cos(a+\varphi)$ avec $(A,B)\in R^{*2}$

Exercice 02: soit les signaux suivants

$x_1(t) = 2\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

$x_3(t) = x_1(4t)$

$x_4(t) = -\frac{1}{2} + 3x_1(t) + x_2(t)$



1- Quelle est: la période , la fréquence , la pulsation de chacun des signaux?

2-Tracer sur le même repaire que $x_2(t)$ les signaux $x_1(t)$ et $x_3(t)$ en fonction du temps.

3- Y'a-t-il un déphasage entre le signal $x_1(t)$ et $x_2(t)$? si oui quel est la valeur de ce déphasage.

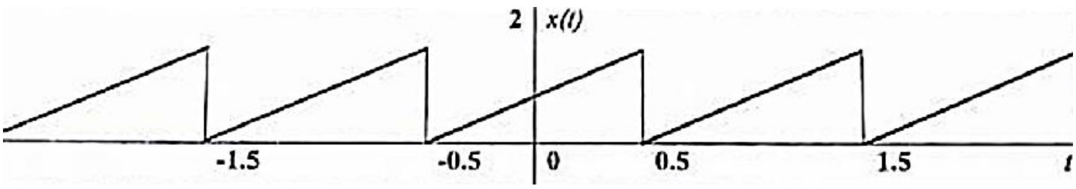
4- Calculer analytiquement le déphasage entre $x_2(t)$ et $x_3(t)$.$x_2(t)$ est-il en retard, en déduire de combien?

5- Réécrire x4(t) sous la forme $x_4(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$ déterminer f_0, A_0, n, A_k, φ_k

6- Ecrire $x_4(t)$ sous forme complexe, en déduire les coefficients complexes de la série de Fourier de $x_4(t)$

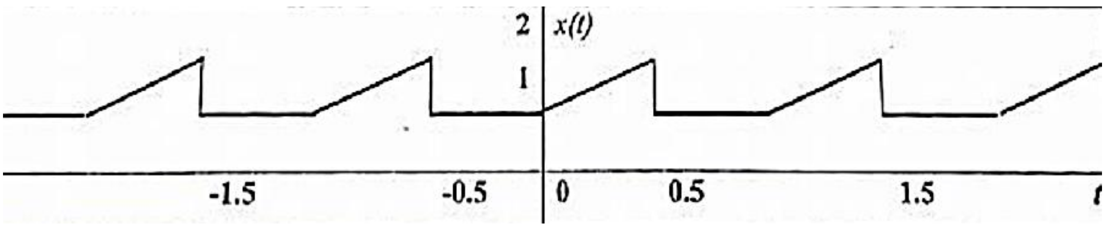
7- Dessinez les spectres d'amplitude et de phase unilatéraux puis bilatéraux de $x_4(t)$

Exercice 03: Soit le signal $x(t)$ suivant:



1- Calculer les coefficients de la série de Fourier du signal $x(t)$.
2- Déduire la forme cosinus et la forme complexe.
3- Tracer le spectre unilatéral et bilatéral du signal $x(t)$.
4- Calculer les coefficients complexes de Fourier du signal $x(t)$.et comparer le résultat avec la question 2.

Exercice 03(Supplémentaire):



1- Calculer les coefficients de la série de Fourier du signal $x(t)$.
2- Déduire la forme cosinus et la forme complexe.
3- Tracer le spectre unilatéral et bilatéral de d'amplitude et de phase du signal $x(t)$.
4- Calculer les coefficients complexes de Fourier du signal $x(t)$.et comparer le résultat avec la question 2.

Exercice 04: Soient les signaux suivants :

$$s_1(t) = A\,\mathrm{rect}(\frac{t}{T}) = \begin{cases} A & \text{Si} \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases} \qquad s_2(t) = s_1(t+T) - s_1(t-T)$$

1. Tracer les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.
2. Déterminer l'énergie et la puissance totales des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ et donner leurs type énergitique.
3. Déterminer $S_1(\omega)$ la transformée de Fourrier du signal $s_1(t)$ et en déduire $S_2(\omega)$

Exercice 05: Soient les signaux suivants :

$$s_1(t)=\sin(t)\,u(t) \qquad s_2(t)=e^{-t}\,u(t)$$

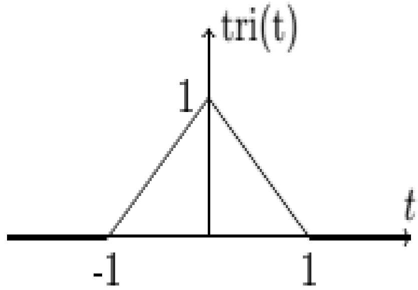
- Déterminer le produit de convolution des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

Exercice 05(Supplémentaire): Soient les signaux suivants :

$$s_1(t)=\cos(t)\,u(t) \qquad s_2(t)=e^{-t}\,u(t)$$

- Déterminer le produit de convolution des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

Exercice 06: Soit $tri(t)$ l'impulsion triangulaire unitaire, $\delta(t)$ est l'mpulsion de Dirac et $\delta_{T0}(t)$ est le peigne de Dirac de période T_0 , * signifie produit de convolution.



1. Donner l'équation mathématique de $tri(t)$, $\delta(t)$ et $\delta_{T0}(t)$.
2. Déterminer et tracer les signaux suivants :
- $s_1(t) = tri(t)\,.\,\delta(t)$.
- $s_2(t) = tri(t)\,.\,\delta(t - t0),\ t0 = 0.5$.
- $s_3(t) = tri(t)\,.\,\delta T0(t)$, avec $T0 = 0.25$.
- $s_4(t) = tri(t) * \delta(t)$.
- $s_5(t) = tri(t) * \delta(t - t0)$.
- $s_6(t) = tri(t) * \delta_{T0}(t)$ avec $T0 = 4$.
3. Que représente chaque signal

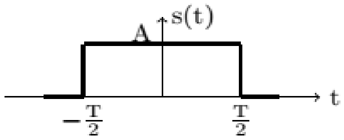
Exercice 07: Soit s(t) un signal défini par : $s(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si } |t| \le 2. \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$

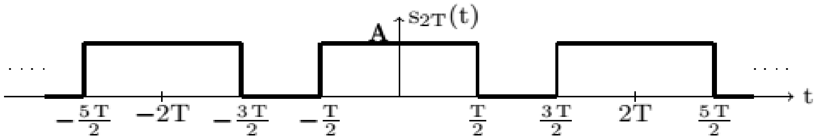
- Calculer et tracer la fonction d'autocorrélation $C_s(t)$.

Exercice 08: Calculer la fonction d'intercorrélation des signaux causaux définis par :

$$s_1(t)=\sin(t) \qquad s_2(t)=\cos(t)$$

Exercice 09: Soient les signaux suivants :





Avec A , T des constantes positives.

1. Donner l' équation mathématique, la nature et le type énergitique de chaque signal.

2. Déterminer la transformée de Fourier du signal $s(t)$.

Exercice 10: Soient les signaux suivants:

$$s_1(t)=e^{-at}\, u(t) \qquad\qquad s_2(t)= e^{-bt}\, u\, (t)$$

Avec a , b des constantes positives.

- Calculer et tracer la fonction d'intercorrélation $C_{s_1s_2}(t)$ des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

Exercice 10(Supplémentaire): Soient les signaux suivants:

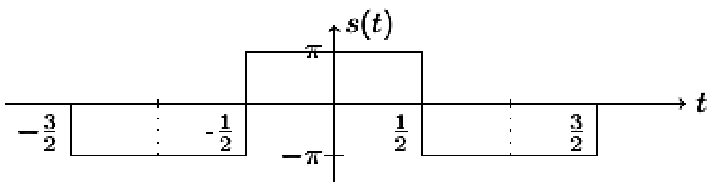
$$s_1(t)=e^{-2t}\, u(t) \qquad\qquad s_2(t)= e^{-t}\, u\, (t)$$

Choisir l'une des deux questions :

1. Déterminer le produit de convolution $s_1(t) * s_2(t)$.

2. Déterminer la fonction d'intercorrélation $C_{s_1s_2}(t)$ des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

Exercice 11: Soit $s(t)$ un signal donné par la figure ci dessous :



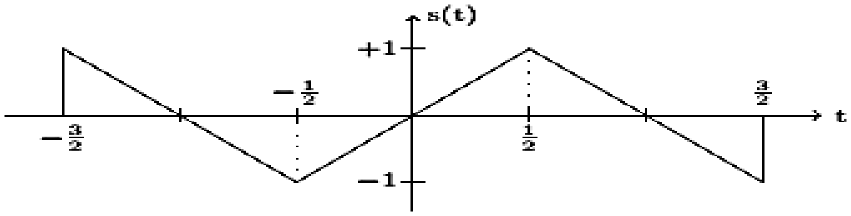
1. Donner son équation mathématique, déterminer son énergie et sa puissance moyenne.

2. Déduire $s(t)$ à l'aide des sommes où des différences des impulsions rectangulaires unitaires décalés de la forme $Arect(t - t0)$.

3. Déterminer la transformée de Fourier de l'impulsion rectangulaire unitaire $rect(t)$, en déduire la transformée de Fourier du signal $s(t)$.

Exercice 11(Supplémentaire): Soit $s(t)$ un signal donné par la figure ci dessous :

On désigne par $s_1(t) = ds(t)/dt$ la dérivée du signal $s(t)$



1. Donner l'équation mathématique et tracer le signal $s1(t)$.

2. Déterminer l'énergie et la puissance moyenne du signal $s1(t)$.

3. Déduire le signal $s1(t)$ à l'aide des sommes où des différences des impulsions rectangulaires unitaires décalées de la forme $A\ rect(t - t0)$.

4. Déterminer la transformée de Fourier de rect(t) et en déduire $S_1(\omega)$ et $S(\omega)$ les transformées de Fourier de $s_1(t)$ et $s(t)$

Exercice 12:

♣ Soit un signal défini par: $s_1(t) = \begin{cases} 3 & \text{Si } |t| < 3, \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$

1. Tracer le signal $s_1(t)$ et déterminer sa transformée de Fourier $S_1(\omega)$.

2. Déterminer s$(t) = s_1(t) * s_1(t)$, * signi e le produit de convolution.

3. Tracer le signal résultant $s(t)$.

♠ Soit un signal défini par: $s_2(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{6} & \text{Si } |t| < 6, \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$

1. Tracer le signal $s_2(t)$, donner $s_2(t)$ en fonction de $s_1(t)$

2. En déduire sa transformée de Fourier $S_2(\omega)$.

Exercice 13: Soit le signal $x(t)$, défini par : $x(t) = \begin{cases} 1 - |t| & si\ \ |t| \le 1 \\ 0 & si\ non \end{cases}$

1. Représenter le signal $x(t)$,

2. Déterminer le nom et les caractéristiques du signal $x(t)$,

3. Représenter les signaux suivant : $x(t+1)$, $x(t-1)$ et $x(t) \times u(t)$,

4. Déterminer la transformée de Fourier des signaux : $x\left(t - \frac{1}{2}\right); x(2t); \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

Corrigés des exercices

Exercice 01:

1°/

- $\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(a)$

$$= 2\cos(a)\sin(a)$$

- $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a)$

$$= \cos^2(a) - \sin^2(a) = \begin{cases} 1-2\sin^2(a) \\ 2\cos^2(a)-1 \end{cases} \text{ ou}$$

- $\sin(a+\frac{\pi}{2}) = \sin(a)\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{0} + \cos(a)\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{1} = \cos(a)$

- $\cos(a+\frac{\pi}{2}) = \cos(a)\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{0} - \sin(a)\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{1} = -\sin(a)$

- $\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin(a)\cos(-b) + \cos(a)\sin(-b)$

Rq: $\cos(x)$ est pair $\Rightarrow \cos(-x) = \cos(x)$

$\sin(x)$ est impair $\Rightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$

$\Rightarrow \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

- $\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b)$

$$= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

- $\sin(a-\frac{\pi}{2}) = \sin(a+(-\frac{\pi}{2})) = \sin(a)\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{0} - \cos(a)\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{1} =$

$$= -\cos(a)$$

- $\cos(a-\frac{\pi}{2}) = \cos(a)\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{0} + \sin(a)\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{1} = \sin(a)$

2) Déduire C et φ pour que :

$$A\cos(a) + B\sin(a) = C\cos(a+\varphi)$$
$$= C\left[\cos(a)\cos(\varphi) - \sin(a)\sin(\varphi)\right]$$
$$= \left[C\cos(a)\cos(\varphi)\right] + \left[-C\sin(a)\sin(\varphi)\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\cancel{\cos}(a) = C\cancel{\cos}(a)\cos(\varphi) \\ B\cancel{\sin}(a) = -C\cancel{\sin}(a)\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{A}{C} \quad \text{—— (1)} \\ \sin(\varphi) = \frac{-B}{C} \quad \text{—— (2)} \end{cases}$$

$$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1 = \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{-B}{A} = tg(\varphi) \Rightarrow \boxed{\varphi = arctg\left(\frac{-B}{A}\right)}$$

Exercice 02:

1°/

Signal	Pulsation(w)	Fréquence(f)	Période (T)
$x_1(t) = 2\cos(3\pi t + \frac{\pi}{3})$	$w_1 = 3\pi$	$f_1 = \frac{3}{2}$	$T_1 = \frac{2}{3}$
$x_2(t) = 4\sin(12\pi t + \frac{\pi}{6})$	$w_2 = 12\pi$	$f_2 = 6$	$T_2 = \frac{1}{6}$
$x_3(t) = x_1(4t)$ $= 2\cos(12\pi t + \frac{\pi}{3})$	$w_3 = 12\pi$	$f_3 = 6$	$T_3 = \frac{1}{6}$
$x_4(t) = -\frac{1}{2} + 3x_1(t) + x_2(t)$ $= -\frac{1}{2} + 6\cos(3\pi t + \frac{\pi}{3})$ $- 4\sin(12\pi t + \frac{\pi}{6})$	$w_4 = 3\pi$	$f_4 = \frac{3}{2}$	$T_4 = \frac{2}{3}$

$$w = 2\pi f \quad , \quad f = \frac{w}{2\pi} \quad , \quad T = \frac{1}{f}$$

$$x(t) = A_0 + \sum A_k \cos(2\pi f k.t) + B_k \sin(2\pi f k t)$$

°/ $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 & \text{et } T = \frac{2}{3} = 0{,}6 \\ x_3 = 1 & \text{et } T = \frac{1}{6} = 0{,}16 \end{cases}$

°/ On peut pas parler de déphasage entre $x_1(t)$ et $x_2(t)$ parce qu'ils n'ont pas la même fréquence ($f_1 \neq f_2$)

4°/ Le dephasage entre $x_2(t)$ et $x_3(t)$:

$$x_2(t) = -4 \sin\left(12\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \qquad \left(-\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= -4 \sin\left(12\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = +4\cos\left(12\pi t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= +4\cos\left(12\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$x_3(t) = 2\cos\left(12\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2(t) \text{ est en avance} \\ \text{par rapport au } x_3(t) \end{cases}$$

$$\Delta\varphi = \omega\, t_{\Delta\varphi} \Rightarrow t_{\Delta\varphi} = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\pi/3}{12\pi} = \frac{1}{36}\,s$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2(t) \text{ est en avance par rapport au } x_3(t) \\ \text{par } \frac{1}{36} \text{ seconde.} \end{cases}$$

5°/ $x_4(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos(2\pi K f_0 t + \varphi_k)$

$$x_4(t) = -\frac{1}{2} + 6\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right) - 4\sin\left(12\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \qquad \boxed{-\sin\alpha = \cos\alpha + \frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} + 6\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(12\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}}_{A_0} + \underset{A_1}{6}\cos\left(2\pi \cdot \underset{K}{1} \cdot \underset{f_0}{\frac{3}{2}} \cdot t + \underset{\varphi_1}{\frac{\pi}{3}}\right) + \underset{A_4}{4}\cos\left(2\pi \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot t + \underset{\varphi_4}{\frac{2\pi}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow A_0 = -\frac{1}{2},\ A_1 = 6,\ A_2 = 0,\ A_3 = 0,\ A_4 = 4$$

$$f_0 = \frac{3}{2},\ \varphi_1 = \frac{\pi}{3},\ \varphi_4 = \frac{2\pi}{3},\ K = \{0, 1, 2, 3, 4\},\ n = 4$$

6/ $x_4(t) = -\frac{1}{2} + 6\cos(3\pi t + \frac{\pi}{3}) + 4\cos(12\pi t + \frac{2\pi}{3})$

$$= -\frac{1}{2} + 6\left[\frac{e^{j(3\pi t+\frac{\pi}{3})} + e^{-j(3\pi t+\frac{\pi}{3})}}{2}\right] + 4\left[\frac{e^{j(12\pi t+\frac{2\pi}{3})} + e^{-j(12\pi t+\frac{2\pi}{3})}}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} + 3e^{j(3\pi t+\frac{\pi}{3})} + 3e^{-j(3\pi t+\frac{\pi}{3})} + 2e^{j(12\pi t+\frac{2\pi}{3})} + 2e^{-j(12\pi t+\frac{2\pi}{3})}$$

$$= -\frac{1}{2} + 3e^{j3\pi t}\cdot e^{j\frac{\pi}{3}} + 3e^{-j3\pi t}\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} + 2e^{j12\pi t}\cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + 2e^{-j12\pi t}\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

La forme complexe:

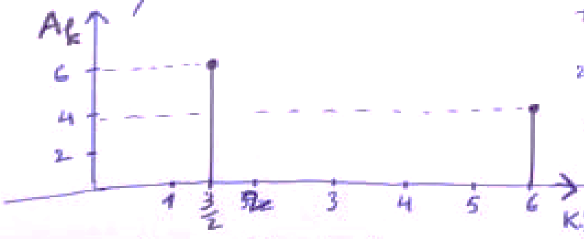
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, e^{j2\pi k f_0 t}$$

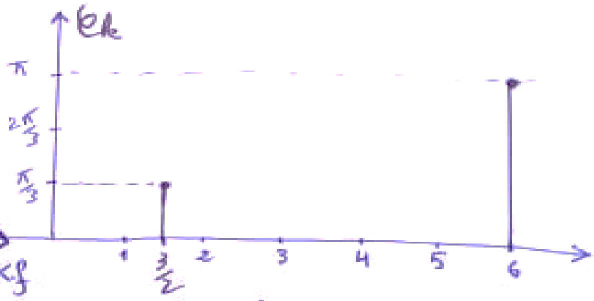
$\Rightarrow$ $x_4(1) = 3e^{j\pi/3}$; $x_4(-1) = 3e^{-j\pi/3}$

$x_4(4) = 2e^{j2\pi/3}$; $x_4(-4) = 2e^{-j\frac{2\pi}{3}}$

$x_4(0) = -\frac{1}{2}$; $x_4(k) = 0$ ailleurs

7/ Spectre Unilatéral:

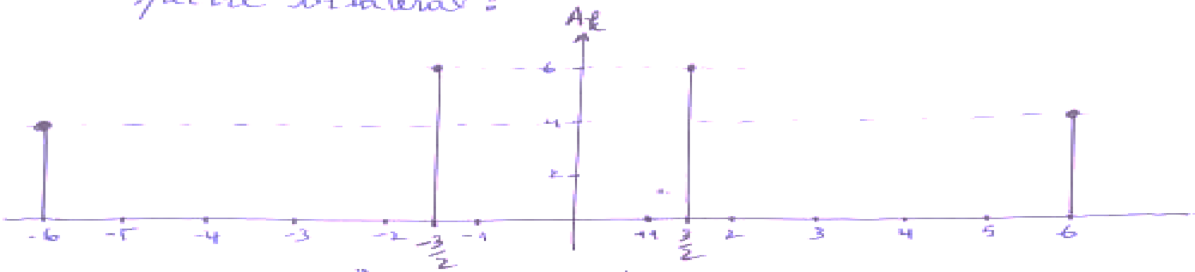




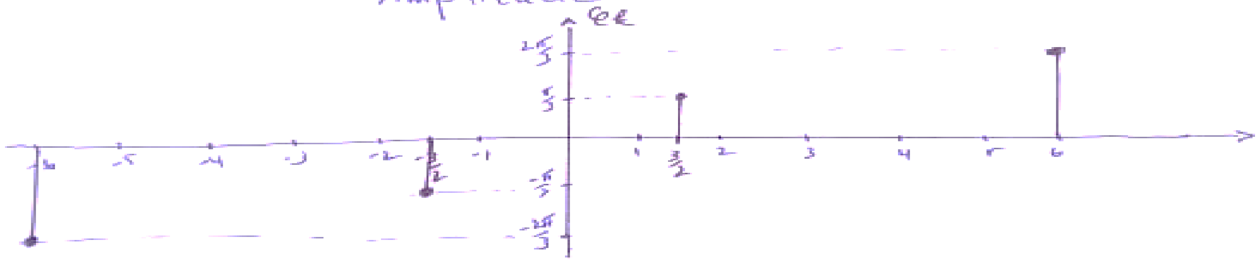
"amplitude" $A_k = 2|X(k)|$

"phase" $\varphi_k = \operatorname{arctg}(X(k))$

• Spectre bilatéral:



"Amplitude"



"phase"

Exercice 03:

%1) Deduire la forme cosinus

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$$

avec: $A_0 = \frac{a_0}{2} = 1$; $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{\left(2 \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{\pi k}\right)^2} = \frac{2}{\pi k}$

$$tg(\varphi_k) = \frac{-b_k}{a_k} = \frac{\frac{-2(-1)^{k+1}}{\pi k}}{0} = 2 \cdot \frac{(-1)^k}{0}$$

$$\Rightarrow \varphi_k = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } k \text{ est pair} \Rightarrow tg(\varphi_k) = +\infty \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } k \text{ est impair} \Rightarrow tg(\varphi_k) = -\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi k} \cos\left(2\pi k f t + (-1)^k \frac{\pi}{2}\right)$$

• La forme complexe:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{j2\pi k f t} = 1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi k} \cdot \frac{e^{j2\pi k t + (-1)^k \frac{\pi}{2}} + e^{-j2\pi k t + (-1)^k \frac{\pi}{2}}}{2}$$

$$= 1 + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi k} e^{j2\pi k t} e^{j(-1)^k \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\pi k} e^{-j\pi k t} e^{-j(-1)^k \frac{\pi}{2}}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ \frac{1}{\pi k} e^{j(-1)^k \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi k} e^{j\frac{\pi}{2}} & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{1}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} \left(a_k \cos(2\pi K f_0 t) + b_k \sin(2\pi K f_0 t) \right)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi K f_0 t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi K f_0 t)\, dt$$

$$x(t) = at + b \quad tq: \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow x(t) = 2t + 1$$

avec : $T = 1$, $f_0 = 1$

$$\int u.v' = u.v - \int u'.v$$

$$u = 2t+1 \Rightarrow u' = 2$$

$$v' = \cos(2\pi K t) \Rightarrow v = \frac{\sin(2\pi K t)}{2\pi K}$$

$$a_k = 2 \int_{-1/2}^{1/2} (2t+1) \cos(2\pi K t)\, dt$$

$$= 2 \left[(2t+1) \frac{\sin(2\pi K t)}{2\pi K} \Big/_{-1/2}^{1/2} - \int_{-1/2}^{1/2} 2 . \frac{\sin(2\pi K t)}{2\pi K} dt \right.$$

$$= 2 \frac{\sin(\pi K)}{\pi K} + 4 \frac{\cos(2\pi K t)}{(2\pi K)^2} \Big/_{-1/2}^{1/2} = 2 \frac{\sin(\pi K)}{\pi K} + 4 \cancel{\frac{\cos(\pi K)}{(2\pi K)^2}} - 4 \cancel{\frac{\cos(-\pi K)}{(2\pi K)^2}}$$

$$= 2 \frac{\cancel{\sin(\pi K)}^{0}}{\pi K} = 0 .$$

$$b_k = 2 \int_{-1/2}^{1/2} (2t+1) \sin(2\pi K t)\, dt = 2 \left[(2t+1) . \frac{-\cos(2\pi K t)}{2\pi K} \Big/_{-1/2}^{1/2} - \right.$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} 2 . \frac{(-\cos(2\pi K t))}{2\pi K} dt$$

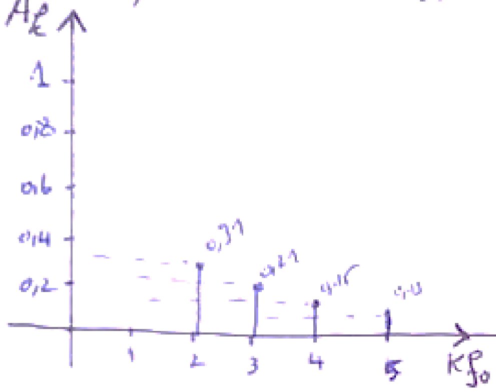
$$= -2 \frac{\cos(\pi K)}{\pi K} + 0 . \frac{\cos(-\pi K)}{\pi K} + 4 \frac{\sin(\pi K)}{(2\pi K)^2} - 4 \frac{\sin(-\pi K)}{(2\pi K)^2}$$

$$= 2 \frac{\cos(\pi K)}{\pi K} = -2 \frac{(\cos(\pi))^k}{\pi K} = -2 \frac{(-1)^k}{\pi K} = 2 . \frac{(-1)^{K+1}}{\pi K}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{1/2} x(t)\, dt = \int_{-1/2}^{1/2} (2t+1)\, dt = t^2 + t \Big/_{-1/2}^{1/2} = 1 \Rightarrow a_0 = 2$$

Donc : $x(t) = 1 + \sum_{K=1}^{+\infty} 2 . \frac{(-1)^{K+1}}{\pi K} \sin(2\pi K t)$

3°/ Spectre unilateral :



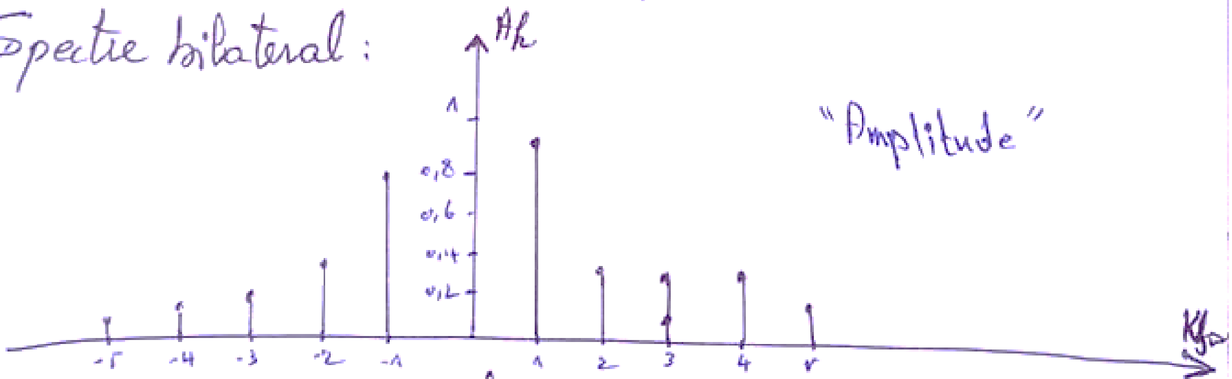
$A_k = 2|X(k)|$

« Amplitude »

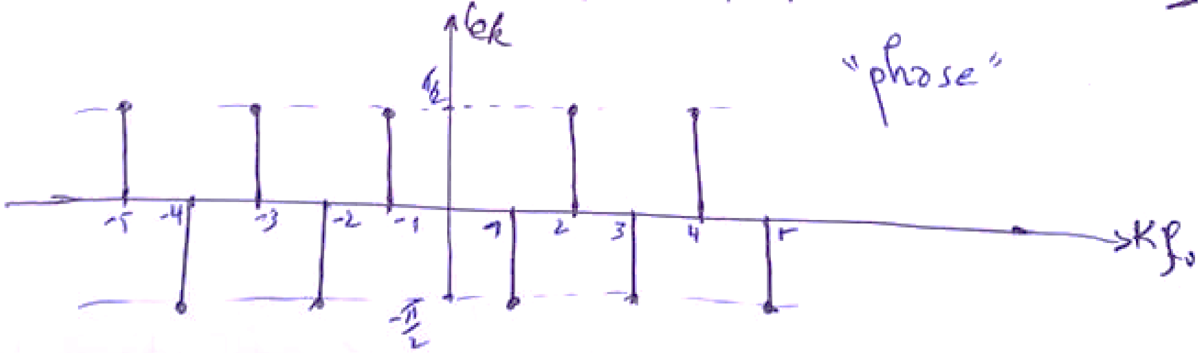
$\varphi_k = \begin{cases} \pi/2 & \text{si K est pair} \\ -\pi/2 & \text{si K est impair} \end{cases}$

« phase »

Spectre bilateral :



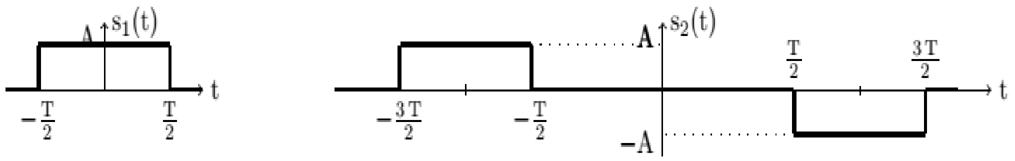
« Amplitude »



« phase »

Exercice 04:

1. Tracer les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.



2. Déterminer l'énergie et la puissance totales des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ et donner leurs type énergitique.

$$E_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2 \, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} A^2 \, dt = A^2 T \quad \text{energie finie}$$

$$P_{moy} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} A^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \times (\texttt{energie finie}) = 0. \quad P_{moy} = 0$$

Le signal $s_1(t)$ est à l'énergie finie et à puissance moyenne nulle.

- $s_2(t) = s(t+T) - s(t-T)$

$$E_{tot} = 2E_{tot}(s_1(t)) = 2A^2T \qquad P_{moy} = 0$$

3. Déterminer $S_1(\omega)$ la transformée de Fourrier du signal $s_1(t)$ et en déduire $S_2(\omega)$.

$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A e^{-j\omega t}\, dt = \frac{2A}{\omega} \frac{e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j} = AT\frac{\sin(\omega\frac{T}{2})}{\omega\frac{T}{2}}$$

En déduire la TF du signal $S_2(t) = s_1(t+T) - s_1(t-T)$, donc :

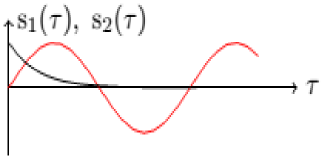
$$S_2(\omega) = S_1(\omega)e^{+j\omega T} - S_1(\omega)e^{-j\omega T} = \frac{2Aj}{\omega}\left(\cos(\frac{\omega T}{2} + j\sin(\frac{3\omega T}{2}))\right)$$

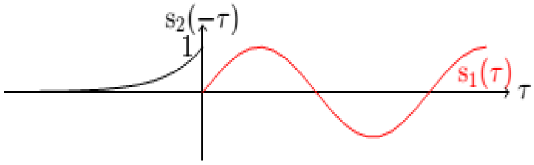
Exercice 05:

1. Produit de convolution des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t-\tau) s_2(\tau) d(\tau)$$

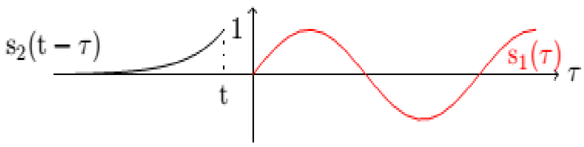
Donc on a besoin des signaux suivants :Signaux avec variable de temps τ :





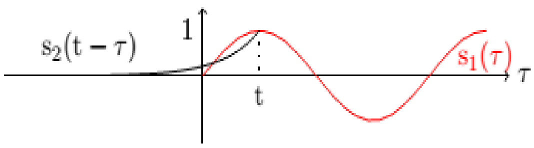
Deux cas peuvent se présenter :

$t < 0$:



Dans ce cas le produit $s_1(\tau) s_2(t-\tau) = 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d(\tau) = 0$.

$t > 0$:



Dans ce cas $s_1(\tau) s_2(t-\tau) \neq 0$ donc :

$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t \sin(\tau)\, e^{-(t-\tau)} d\tau$.

Donc : $e^{-t} \int_0^t \sin(\tau)\, e^{\tau} d\tau$.

Cette intégration se fait par partie on pose $V = e^{\tau}$, et $dU = \sin(\tau) d\tau$:

$\int_0^t \sin(\tau) e^{\tau} d\tau = [-\cos(\tau) e^{\tau}]_0^t + \int_0^t \cos(\tau)\, e^{\tau} d\tau$.

ET :

on pose $V = e^{\tau}$, et $dU = \cos(\tau) d\tau$:

$\int_0^t \cos(\tau)\, e^{\tau} d\tau = [\sin(\tau) e^{\tau}]_0^t - \int_0^t \sin(\tau)\, e^{\tau} d\tau$.

Donc :

$\int_0^t \sin(\tau)\, e^{\tau} d\tau = [-\cos(\tau) e^{\tau}]_0^t + [\sin(\tau) e^{\tau}]_0^t - \int_0^t \sin(\tau)\, e^{\tau} d\tau$.

$\int_0^t s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} e^{-t} (\sin(t) e^t - \cos(t) e^t + 1) = \frac{1}{2} (e^{-t} + \sin(t) - \cos(t)) u(t)$.

Exercice 06:

Soit tri(t) l'impulsion triangulaire unitaire, $\delta(t)$ est l'mpulsion de Dirac et $\delta_{T_0}(t)$ est le peigne de Dirac.

1. L'équation mathématique de tri(t), $\delta(t)$ et $\delta_{T_0}(t)$.

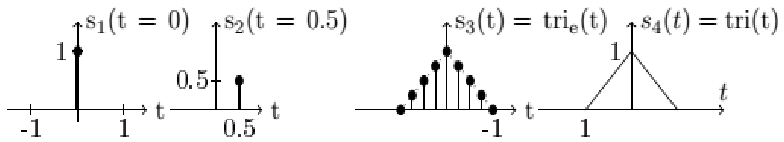
$$\mathrm{tri}(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{Si } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \qquad \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1 \qquad \delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

2. Valeur et traçage les signaux suivants :

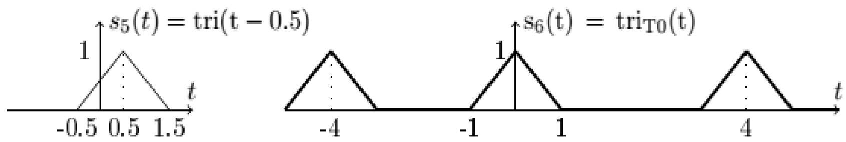
- $s_1(t) = \mathrm{tri}(t)\,.\,\delta(t) = \mathrm{tri}(0)\,.\,\delta(t) = \delta(t)$, avec $\mathrm{tri}(0) = 1$.
- $s_2(t) = \mathrm{tri}(t)\,.\,\delta(t-t_0) = \mathrm{tri}(t_0 = 0.5)\,.\,\delta(t-t_0) = 0.5\,.\,\delta(t-0.5)$, avec $\mathrm{tri}(0.50) = 0.5$.
- $s_3(t) = \mathrm{tri}(t)\,.\,\delta_{T_0}(t) = \mathrm{tri}(t)\,.\,\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \mathrm{tri}(n\,T_0 = n\,0.25)\,.\,\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$,avec $(n = -4 : +4)$.

- $s_4(t) = \mathrm{tri}(t) * \delta(t)$, $\delta(t)$ est l'élément neutre pour le produit de convolution.
  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}(\tau)\,\delta(t-\tau))\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}(t)\,\delta(t-\tau))\,d\tau$, tri(t) est constante par rapport à τ :
  $\mathrm{tri}(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau))\,d\tau}_{=1} = \mathrm{tri}(t)\,.$
- $s_5(t) = \mathrm{tri}(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}(\tau)\,\delta(t+t_0-\tau))\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}(t-t_0)\,\delta(t+t_0-\tau))\,d\tau$.
  $\mathrm{tri}(t-t_0)$ est constante par rapport à τ :
  $\mathrm{tri}(t-t_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+t_0-\tau))\,d\tau}_{=1} = \mathrm{tri}(t-t_0)\,.$
- $s_6(t) = \mathrm{tri}(t) * \delta_{T_0}(t)$, avec$T_0 = 4$.
  $\mathrm{tri}(t) * \delta_{T0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}(\tau)\,\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau+n\,T_0))\,d\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}(t-nT_0)\,\delta(t-\tau+n\,T_0))d\tau$.
  $\mathrm{tri}(t-nT_0)$ est constante par rapport à τ Alors :
  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}(t-nT_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau+n\,T_0))\,d\tau}_{=1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}(t-nT_0) = \mathrm{tri}_{T0}(t)$.
  On obtient alors un signal triangulaire périodique de période T_0.

Les signaux sont donnés par :



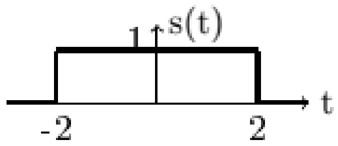
Et



3. Que représente chaque signal.
   $s_1(t)$: est la valeur du signal triangulaire à l'instant $t = 0$, $s_2(t)$: est la valeur du signal triangulaire à l'instant $t_0 = 0.5$, $s_3(t)$: représente l'échantillonnage du signal triangulaire avec une période $T_0 = 0.25$, $s_4(t)$: représente le signal lui même, $s_5(t)$: représente le décalage du signal ,$s_6(t)$: représente la périodisation du signal triangulaire avec une période de $T_0 = 4$.

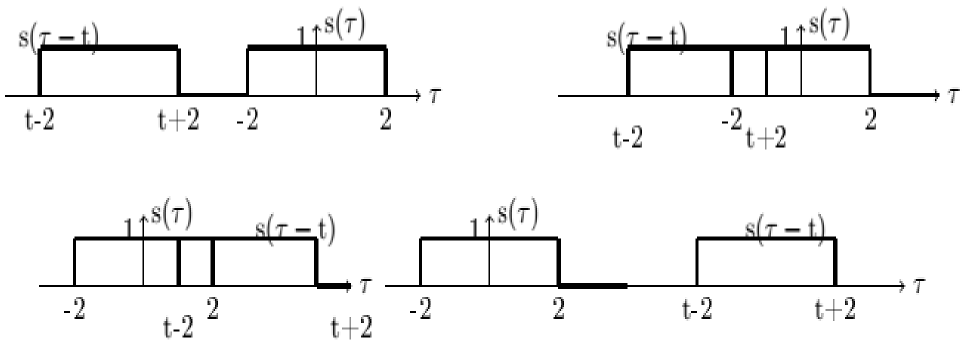
Exercice 07:

Soit $s(t)$ un signal défini par :



1. Calculer et tracer la fonction d'autocorrélation $C_s(t)$.

$$C_s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\, s(\tau - t)\, d(\tau)$$



Quatre cas peuvent se présenter :

— $t \leq -4$: Dans ce cas $s(\tau)s(\tau - t) = 0$ donc $C_s(t) = 0$

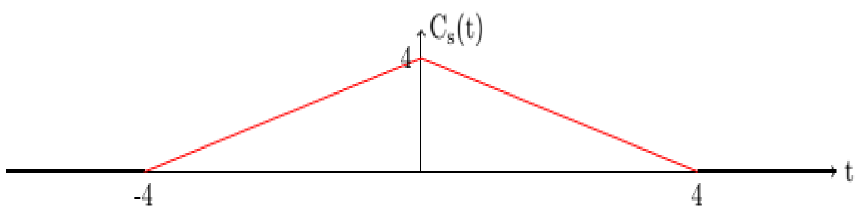
— $-4 \leq t \leq 0$: $C_s(t) = \int_{-2}^{t+2} 1\,dt = t + 4.$

— $0 \leq t \leq 4$: $C_s(t)) = \int_{t-2}^{+2} 1\,dt = t - 4.$

— $t > 4$: Dans ce cas $s(\tau)s(\tau - t) = 0$ donc $C_s(t) = 0$

Donc :

$$C_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad < t < -4 \\ t + 4 & \text{Si} \quad -4 < t < 0 \\ 4 - t & \text{Si} \quad 0 < t < 4 \\ 0 & \text{Si}\, t > 4 \end{cases}$$



Exercice 08:

Calculer la fonction d'intercorrélation des signaux causaux définis par :

— $s_1(t) = \sin(t)$, $s_2(t) = \cos(t)$.

Les signaux $s_1(t)$, $s_2(t)$ sont périodiques de période $\frac{2\pi}{T} = 1$ donc à puissance moyenne finie :

$C_{s1s2}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\tau)\cos(\tau - t)\, d\tau = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\tau)\left(\cos(\tau)\cos(t) + \sin(\tau)\sin(t)\right) d\tau$.

$C_{s1s2}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\cos(t) \int_0^T \sin(\tau)\cos(\tau)\, d\tau + \sin(t) \int_0^T \sin(\tau)\sin(\tau)\, d\tau\right)$.

Calculant :

$$1.\ \int_0^T \sin(\tau)\cos(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}\int_0^T \sin(2\tau)\, d\tau = -\frac{1}{4}\cos(2\tau)|_0^T = -\frac{1}{4}\underbrace{\cos(2T)}_{=1} + \frac{1}{4} = 0.$$

$$2.\ \int_0^T \sin(\tau)^2\, d\tau = \int_0^T \frac{1-\cos(2\tau)}{2}\, d\tau = \frac{\tau}{2} - \frac{\sin(2\tau)}{4}|_0^T = \frac{T}{2} - \underbrace{\frac{\sin(2T)}{4}}_{=0} = \frac{T}{2}.$$

$$C_{s1s2}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sin(t)\frac{T}{2} = \frac{\sin(t)}{2}u(t)$$

Exercice 09:

1. L' équation mathématique, la nature et le type énergitique de chaque signal.

- Le signal $s(t)$:

$$s(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & \text{Si } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

Le signal $s(t)$ est un signal à durée finie, à énergie finie et à puissance moyenne nulle.

- Le signal $s_{2T}(t)$ est la périodisation de période $2T$ de $s(t)$ donc :

$$s_{2T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t - 2nT)$$

Signal $s_{2T}(t)$ est périodique, à énergie infinie et à puissance moyenne non nulle.

2. Déterminer la transformée de Fourier du signal $s(t)$.

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{2A}{\omega}\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j} = AT\frac{\sin(\omega\frac{T}{2})}{\omega\frac{T}{2}}$$

Exercice 10:

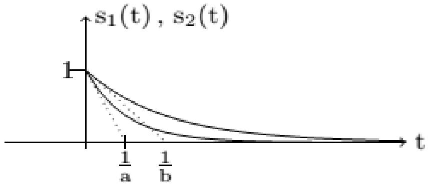
Soit les signaux suivants :

1. $s_1(t) = e^{-a\,t}\,u(t)$.
2. $s_2(t) = e^{-b\,t}\,u(t)$.

Avec a , b des constantes positives.

Calculer et tracer la fonction d'intercorrélation $C_{s1s2}(t)$.

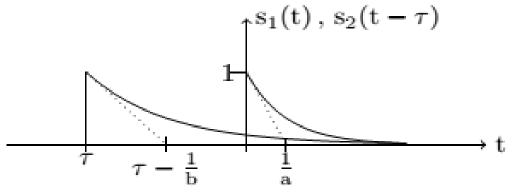
$C_{s1s2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)\,.\,s_2(t-\tau)$



$C_{s1s2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\,t}\,e^{-b\,(t-\tau)}\,dt.$

Deux cas peuvent se présenter :

— $\tau \leq 0$:



On a : $\int_{0}^{+\infty} e^{-a\,t}\,e^{-b\,(t-\tau)}\,dt = e^{b\,\tau}\int_{0}^{+\infty} e^{-\,(a+b)\,t}\,dt = \frac{e^{b\,\tau}}{a\,+\,b}.$

— $\tau > 0$:

Exercice 11:

1. Équation mathématique, eénergie puissance :

$$s(t) = \begin{cases} -\pi & \text{Si} \quad -\frac{3}{2} < t < -\frac{1}{2} \\ \pi & \text{Si} \quad -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ -\pi & \text{Si} \quad \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$W_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2\,dt = \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} \pi^2\,dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pi^2\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \pi^2\,dt = 3\,\pi^2 \quad \text{energie finie}$$

$$P_{moy} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\,dt}_{=3\,\pi^2} == \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \times (3\,\pi^2) = 0. \quad \text{Puissance moyenne nulle}$$

Le signal s(t) est à énergie finie et à puissance moyenne nulle.

2. $s(t) = -\pi\,\mathrm{rect}(t+1) + \pi\,\mathrm{rect}(t) - \pi\,\mathrm{rect}(t-1)$.

La transformée de Fourrier de rect(t)

$TF(rect(t) = RECT(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} rect(t)e^{-j\,\omega t}dt$

$$RECT(\omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\,\omega t}dt = \frac{1}{-j\omega}(e^{-j\,\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}) = \frac{2}{\omega}\frac{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\,\frac{\omega}{2}}}{2j} = \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}} = sinc(\frac{\omega}{2})$$

D'aprés les propriètées de la transformée de Fourrier, $TF(s_1(t-t_0)) = S_1(\omega)\,e^{-j\,\omega t_0}$ et le principe de la linéarité on :

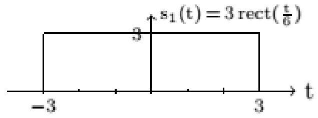
$S(\omega) = -\pi\;sinc(\frac{\omega}{2})\,e^{j\,\omega} + \pi\;sinc(\frac{\omega}{2}) - \pi\;sinc(\frac{\omega}{2})\,e^{-j\,\omega}$

$= \pi\;sinc(\frac{\omega}{2})(-e^{j\,\omega} + 1 - e^{-j\,\omega}) = \pi\;sinc(\frac{\omega}{2})\,(1 - 2\,\cos\omega).$

Exercice 12:

- Soit un signal défini par $s_1(t) = \begin{cases} 3 & \text{Si } |t| < 3, \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$

1. Tracer le signal $s_1(t)$ et déterminer sa transformée de Fourier $S_1(\omega)$.



La transformée de Fourier de $s_1(t) = 3\,\mathrm{rect}(\frac{t}{6})$

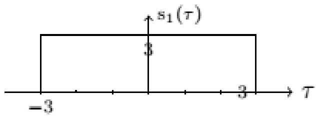
$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$$S_1(\omega) = \int_{-3}^{+3} 3\, e^{-j\omega t} dt = \frac{3}{-j\omega}(e^{-j3\omega} - e^{j3\omega}) = \frac{6}{\omega}\sin(3\omega) = 18\,\mathrm{sinc}(3\,\omega).$$

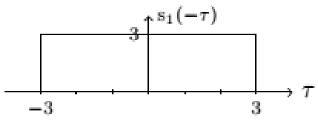
2. Déterminer $s(t) = s_1(t) * s_1(t)$ avec $*$ signifie le produit de convolution.

$$s(t) = s_1(t) * s_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)\, s_1(t - \tau)\, d\tau$$

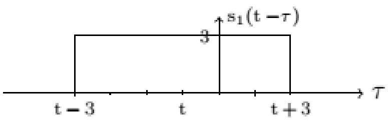
— Tracer le signal $s_1(\tau)$.



— Tracer le signal $s_1(-\tau) = s_1(\tau)$, un signal paire.

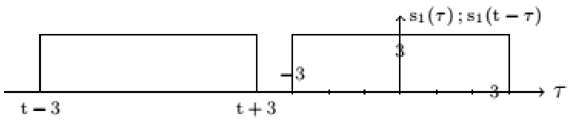


— Tracer le signal $s_1(t - \tau)$.



— Tracer les signaux $s_1(\tau)$ et $s_1(t - \tau)$ sur le même axe.

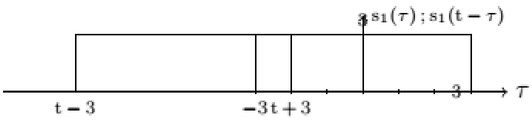
- $t + 3 < -3 \rightarrow t < -6$.



Il n'ya pas de chauvauchement entre $, s_1(\tau)$, $s_1(t - \tau)$, alors le produit de $, s_1(\tau) . s_1(t - \tau)$ est nul :

$$s(t) = s_1(t) * s_1(t) = 0$$

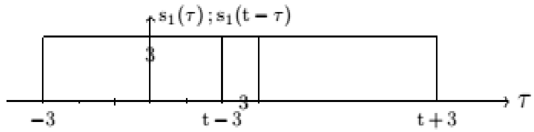
- $-3 < t - 3 < +3 \rightarrow -6 < t < 0$.



Le produit de $, s_1(\tau) . s_1(t - \tau)$ n'est pas nul :

$$s(t) = s_1(t) * s_1(t) = \int_{-3}^{t+3} 3 * 3\, d\tau = \tau]_{-3}^{t+3} = 54\,(1 + \frac{t}{6})$$

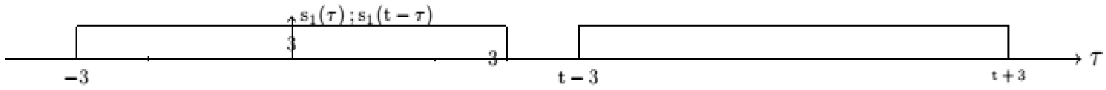
- $-3 < t - 3 < +3 \rightarrow 0 < t < +6.$



Le produit de $,s_1(\tau).s_1(t - \tau)$ n'est pas nul :

$$s(t) = s_1(t) * s_1(t) = \int_{t-3}^{+3} 3\,3\,d\tau = \tau\Big]_{t-3}^{+3} = 54\,(1 - \frac{t}{6})$$

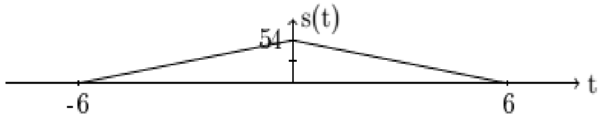
- $-3 < t - 3 < +3 \rightarrow 0 < t < +6.$



Il n'ya pas de chauvauchement entre $s_1(\tau)$, $s_1(t - \tau)$, alors le produit de $,s_1(\tau).s_1(t - \tau)$ est nul : $s(t) = s_1(t) * s_1(t) = 0$

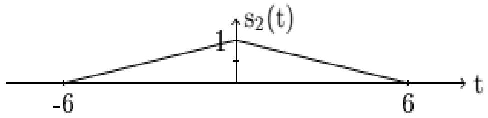
— Tracer le signal résultant.

$$\boxed{s(t) = \begin{cases} 0 & t < -6, \\ 54\,(1 + \frac{t}{6}) & -6 \le t \le 0, \\ 54\,(1 - \frac{t}{6}) & 0 \le t \le 6, \\ 0 & t > 6. \end{cases}}$$



- Soit un signal défini par : $s_2(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{6} & \text{Si } |t| < 6, \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$

1. Tracer le signal $s_2(t)$,donner $s_2(t)$ fonction de $s(t)$:



$$s_2(t) = \frac{1}{54}\,s(t) = \frac{1}{54}\,s_1(t) * s_1(t)$$

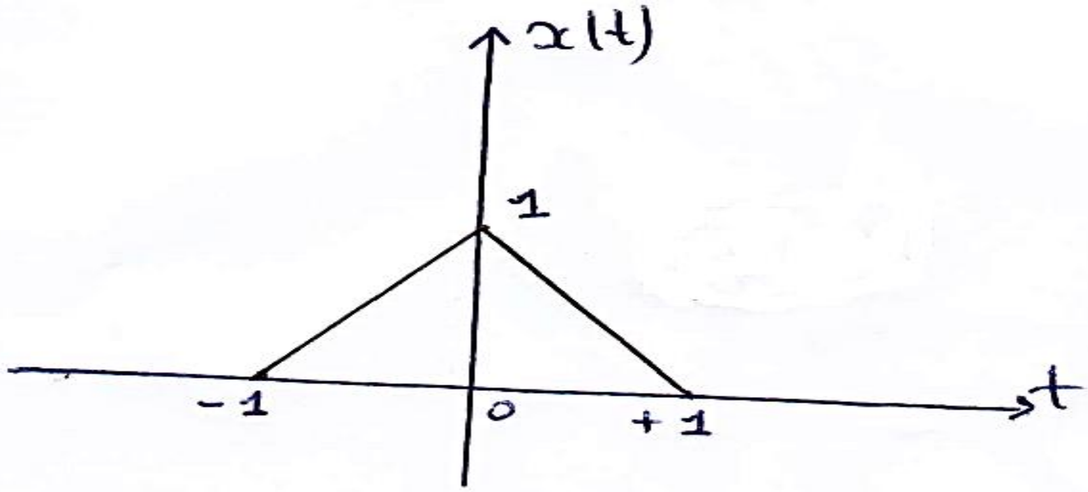
2. et en déduire sa transformée de Fourier $S_2(\omega)$.
   $S_1(\omega) = 18\,\text{sinc}(3\,\omega)$.
   D'aprés le premier théorème de Plancherell $x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{TF} X_1(\omega).X_2(\omega)$,
   soit : $s_2(t) = \frac{1}{54}\,s_1(t) * s_1(t)$.
   $S_2(\omega) = \frac{1}{54}\,S_1(\omega).S_1(\omega) = \frac{1}{54}\,18\,\text{sinc}^2(3\,\omega) = \frac{1}{3}\,\text{sinc}^2(3\,\omega)$.

Exercice 13:

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

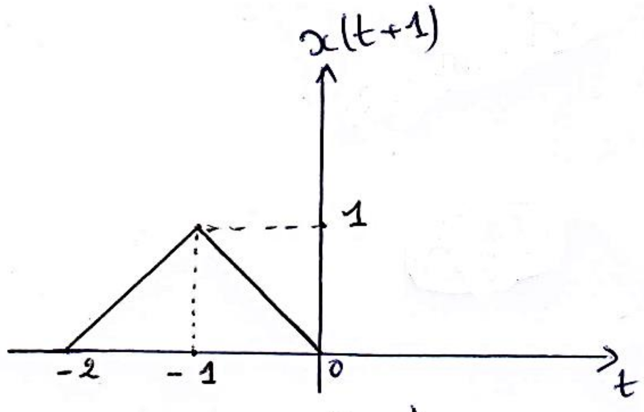
(1) → Représentation de $x(t)$:

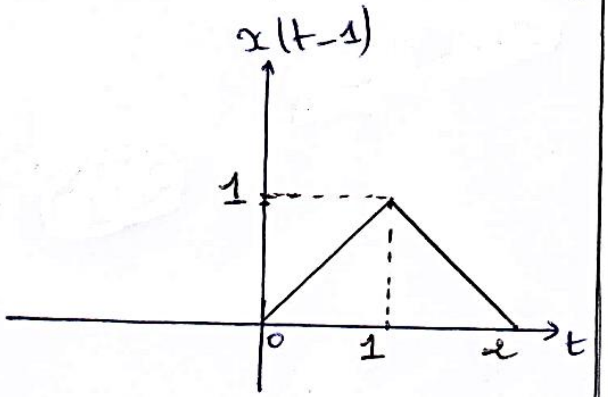
On a : $$x(t) = \begin{cases} 1 + t & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ 1 - t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

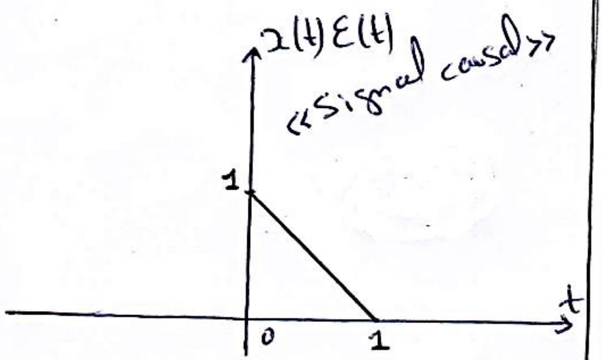


(2) → $x(t)$ est un signal traingulaire, c'est un signal déterministe et périodique de période $T = 2$.

(3) → Représentation des signaux suivant : $x(t+1)$, $x(t-1)$ et $x(t)\,\varepsilon(t)$:







④→ La transformée de Fourier des signaux suivants:

⊛ $TF\{x(t-\frac{1}{2})\} = ?$

Dans ce cas, on applique la propriété de translation;

$$TF\{x(t-a)\} = X(f)\, e^{-j2\pi a f}$$

alors: $a = \frac{1}{2}$

On sait que: $x(t) = tri(t)$

alors: $X(f) = sinc^2(f)$ (voir la table de la TF)

donc:

$$TF\{x(t-\tfrac{1}{2})\} = sinc^2(f)\, e^{-j2\pi(\frac{1}{2})f}$$

$$\boxed{TF\{x(t-\tfrac{1}{2})\} = sinc^2(f)\, e^{-j\pi f}}$$

⊛⊛ $TF\{x(2t)\} = ?$

Dans ce cas, on applique la propriété de similitude;

$$TF\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

alors: $a = 2$

donc:

$$TF\{x(2t)\} = \frac{1}{2} X\left(\frac{f}{2}\right)$$

$$\boxed{TF\{x(2t)\} = \frac{1}{2} sinc^2\left(\frac{f}{2}\right)}$$

⊛⊛⊛ $TF\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = ?$

Dans ce cas, on applique la propriété de la Dérivation/t.

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (j2\pi f)^n X(f)$$

alors: $n = 2$ (La deuxième dérivée)

$$TF\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = (j2\pi f)^2 sinc^2(f)$$

donc:

$$\boxed{TF\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = (-4\pi^2 f^2)\, sinc^2(f)}$$