<u>برنامج التحليل 4 :</u>

- التوابع ذات عدة متغيرات: النهايات ، الاستمرار
- الحساب التفاضلي : المشتقات الجزئية ،

التدرج ، التفاضلية، المصفوفة اليعقوبية ،

التوابع من الصنف C^K، نظرية شوارتز ،

نظرية التزايدات المنتهية ، نشر تايلور، القيم

الحدية الحرة والمقيدة، نظرية العكس المحلي ،

نظرية التوابع الضمنية .

- التكاملات الثنائية والثلاثية .

الفصل الأول

1. تذكير بالفضاءات الشعاعية النظيمية

1.1-فضاءات شعاعية نظيمية :

1.1.1 تعريف النظيم :

ليكن E فضاء شعاعي على الجسم K (K يمثل $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$)

نسمي نظيم على E كل تطبيق N من E نحو $\mathbb{R}_+$ الذي يحقق الشروط التالية :

(C1) $N(x) = 0, x= 0_E$

(C2) $N(\alpha x) = |\alpha| N(x) \quad \forall\ x \in E \quad \forall\ \alpha \in K$

(C3) $N(x+y) \leq N(x) + N(y) \quad \forall\ (x, y) \in E^2$

يسمى$N(x)$ نظيم العنصر x

2.1.1 تعريف فضاء شعاعي نظيمي:

نسمي فضاء شعاعي نظيمي الثنائية (E,N) المكونة من الفضاء الشعاعي E والنظيم N على E .

ملاحظة:

1- في كل ما يلي: $\| x \|$ يرمز الى نظيم العنصر x من E

2- لتبسيط الكتابة نستعمل الاختصار E ف. ش. ن الذي يقصد به الفضاء الشعاعي النظيمي .

3.1.1 خواص:

الخاصية 1:

$$N(-x) = N(-1x) = |-1|\ N(x) = N(x)$$

ومنه الخاصية:

$$\boxed{\forall\ x \in E \qquad N(-x) = N(x)}$$

الخاصية 2:

$$0 = N(x-x) \leqslant N(x) + N(-x) = 2N(x)$$

$$\boxed{\forall x \in E \quad : \quad N(x) \geq 0}$$

4.1.1 أمثلة:

1- اذا كان $E = K$ نستنتج من خواص القيمة المطلقة (حالة $K = \mathbb{R}$) أو الطويلة (حالة $K = \mathbb{C}$) أن:

$$N : K \to \mathbb{R}$$
$$x \to |x|$$

نظيم على K

2- يمكن تزويد القضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ بعدة نظم والنظم المألوفة التي يزود بها هي :

$$N_\infty : x \to \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$N2 : x \to \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} xi^2\right)^{1/2}$$

$$N1 : x \to \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |xi|$$

حيث $x = (x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

5.1.1 تعريف نظم متكافئة :

ليكن النظيمان N_1 و N_2 المعرفان على نفس الفضاء الشعاعي E.

نقول أن N_1 و N_2 متكافئين اذا وجد عددان حقيقيان موجبان تماما α و β

حيث : $\forall x \in E \qquad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$

6.1.1 تعريف المسافة الاقليدية على $\mathbb{R}^n$:

نسمي المسافة الاقليدية على $\mathbb{R}$ الدالة $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to d(x,y)$$

المعرف بـ :

$$d(x,y) = \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) \right]^{1/2}$$

حيث $x = (x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n)$

و $y = (y_1, \ldots\ldots\ldots, y_n)$

هذه المسافة تعمم على $\mathbb{R}^n$ المسافة المألوفة في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ لهذا تسمى المسافة الاقليدية. وحسب هذا التعريف المسافة بين x و y هي أكبر كلما كان الفرق $|x_k - y_k|$ كبير من أجل كل k.

7.1.1 خواص المسافة d:

1) $d(x,y) \geq 0 \quad . \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$

2) $d(x,y) = 0 \quad , x=y$

3) $d(y,x) = d(x,y) \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$

4) $d(\lambda\, x, \lambda\, y) = |\lambda|\ d(x,y) \quad , \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \quad , \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$

5) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad , \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}^n$

6) $d(x+z\, ,\, y+z) = d(x,z) \qquad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}^n$

ملاحظة : كل هذه الخواص تستنتج بسهولة من التعريف ما عدا الخاصية (5) التي يعتمد برهانها على متباينة كوشي شفارتز (*Chauchy – Schwartz*)

8.1.1 قضية : [متباينة كوشي شفارتز]

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}^n$ فان :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k \leq \left[\sum_{k=1}^{n} a^2{}_k \right]^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{n} b^2{}_k \right]^{1/2}$$

البرهان : من المتباينة الشهيرة

$$(a^k - b^k)^2 = a^2{}_k + b^2{}_k - 2x_k b_k \geq 0$$

نستنتج المتباينة :

$$a_k b_k \leq \frac{a^2{}_k + b^2{}_k}{2}$$

وبتعويض a_k بـ λa_k و b_k بـ $\lambda^{-1} b_k$ نجد :

$$a_k b_k \leq \frac{\lambda^2 a_k^2 + \lambda^{-2} b_k^2}{2} \qquad \forall \lambda \rangle 0$$

و بالجمع نجد: $\forall \lambda \rangle 0$ $\quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \dfrac{\lambda^2 A^2 + \lambda^{-2} B^2}{2}$

حيث :

$$\begin{cases} A = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} \\ B = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2} \end{cases}$$

(بفرض أن $0 \langle A$)، القيمة الصغرى للدالة $\lambda \to \dfrac{\lambda^2 A^2 + \lambda^{-2} B^2}{2}$:على $]0 \,, +\infty[$ هي عند النقطة $\lambda_0 = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

وعليه (بفرض أيضا أن $0 \langle B$) نجد: $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\lambda^2 A^2 + \lambda_0^{-2} B^2}{2} = AB$ $\leq$ $a_k\, b_k$ وهي المتباينة المذكورة.

أما حالة $A=0$ و $B=0$ فإنها لا تدرج أية صعوبة لأنه لدينا $a_k\, b_k = 0$ من أجل كل $k=1,2,\ldots\ldots,n$

برهان الخاصية 5: (المسماة المتباينة المثلثية)

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \qquad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}^n$$

بالرفع الى القوة 2 البرهان على الخاصية 5 هو نفسه البرهان على:

$$d(x,y)^2 \leq d(x,z)^2 + d(z,y)^2 + 2d(x,z)\, d(z,y)$$

أي

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2 + \sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2 + \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2\right]^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2\right]^{1/2}$$

بما أن :

$$x_k - y_k = (x_k - z_k) + (z_k - y_k)$$

فلدينا

$$\sum (x_k - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left[(x_k - z_k)^2 + (z_k - y_k)^2 + 2(x_k - z_k)(z_k - y_k)\right]$$

ولهذا الكل راجع الى اثبات أن

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)(z_k - y_k) \leq \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2\right]^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2\right]^{1/2}$$

وما هي الا متباينة كوشي شفارتز المطبقة على $a=x-z$ و $b=z-y$

الخاصية 5 تبين أن المسافة بين x و y تتعلق بـ $x-y$:

$$d(x,y) = d(x-y,0)$$

وهذا ما يجسد الدور الهام الذي تلعبه الدالة $x \to d(x,0)$ التي تسمى أيضا نظيم x أي $\| x \|$

و النظيم الاقليدي المعرف على $\mathbb{R}^n$ هو $x \to \| x \|$ المعرف بـ $\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$

وهذا ما رمزنا له سابقا بالرمز $\| x \|_2$

وتعريفا لدينا $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n \quad d(x,y) = \| x-y \|$ و $\| x \|$ يمثل طول ا لشعاع x

خواص المسافة (1) (2) (4) (5) المذكورة سابقا هى مماثلة لخواص النظيم التالية:

(1) $\|x\| \geq 0 \qquad \forall \; x \in \mathbb{R}^n$

(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall \; x,y \in \mathbb{R}^n$

(4) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \qquad \forall \; \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \; x \in \mathbb{R}^n$

وهنا أيضا الخاصية (3) فقط التي ليست بديهية وتتعلق بالمتابينة المثلثية ،على الشكل التالى:

$$\|x+y\| = d(x+y,0) = d(x,-y) \leq d(x,0) + d(0,-y) = \|x\| + \|y\|$$

9.1.1 نظرية:

كل النظم المعرفة على $\mathbb{R}^n$ متكافئة.

البرهان:

للتبسيط نثبت النظرية بالنسبة للنظم المألوفة فقط.

• N_1 و N_2

ليكن k_0 حيث $\|x\|_\infty = |x_{ko}|$

وعليه $|x_{k0}| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

أي $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$

وبما أن $|x_k| \leq |x_{k0}|$ $\forall \; k \in \{1,\ldots\ldots,n\}$ لدينا $\sum |x_k| \leq n|x_{k0}|$ أي $\|x\|_1 = n\|x\|_\infty$

$$\boxed{\forall \; x \in \mathbb{R}^n \qquad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \, \|x\|_\infty}$$

• N_1 و N_2

نذكر أنه اذا $a_n,\ldots\ldots\ldots,a_1$ اعداد حقيقية موجبة فان :

$$\sqrt{a + \ldots. + a_n} \leq \sqrt{a_1} + \ldots\ldots\ldots + \sqrt{a_n}$$

نستنتج أن $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots. + x_n^2} \langle \sqrt{x_1^2} + \ldots. + \sqrt{x_n^2} = |x_1| + \ldots\ldots + |x_p| = \|x\|_1$

و بما أن حسب متباينة كوشي شفارتز لدينا :

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|\times 1 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \quad \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2}$$

فان :

$$||x||_1 \leq \sqrt{n} \quad ||x||_2$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq \sqrt{n} \quad ||x||_2$$

• **N_2 و N_∞**

كما في الاعلى ليكن i_{ko} حيث $||x||_\infty = | x_{ko} |$

$$x_{ko}^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x^2_k$$

و منه $||x||_\infty \leq ||x||_2$

و من المتباينة $x^2_k \leq x^2_{k0}$ الصحيحة من اجل كل $k \in \{ 1, ...,n \}$

نستنتج أن

$$\sum_{k=1}^{n} x^2_k \leq n \ |x^2_{k0}|$$

أي $||x||_2 \leq ||x||_\infty \sqrt{n}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad \sqrt{n}\, ||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \quad ||x||_\infty$$

2.1 توبولوجيا الفضاءات الشعاعية النظيمية :

1.2.1 تعاريف:

-1 نسمي كرة مفتوحة (أو كرة مغلقة) لـ ف ، ش ، ن E ذات المركز $a \in$ E ونصف القطر $r \in \mathrm{R}^*_+$ المجموعة المرمز اليها بـ B(a,r) (أو $\overline{\mathrm{B}}(a,r)$) المعرفة بـ :

$$\mathrm{B}(a,r) = \{ x \in \mathrm{E} \ / \ ||x-a|| \langle r \}$$

أو $(\overline{\mathrm{B}} (a,r) = \{ x \in \mathrm{E} \ / \ ||x-a|| \leq r \})$

ملاحظة1: تتعلق الكرة بالنظيم المختار على E

-2 نقول أن الجزء V من ف ، ش ، ن E جوار للنقطة $a \in E$ اذا V يشمل كرة مفتوحة تشمل a .

اذا رمزنا الى مجموعة جوارات a بالرمز $\mathcal{V}(a)$ فان :

$$V \in \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow \exists (x_0, r) \in E \times \mathbb{R}_+^* : B(x_0, r) \subset V \text{ و } a \in B(x_0, r)$$

ملاحظة2 : كل جوار لـ a يشمل حتما a .

مثال : كرة مفتوحة أو مغلقة ذات المركز a هي جوار له.

-3 ليكن $A \subset C$ و $a \in E$.

نقول أن a داخل A اذا كان A جوار لـ a .

مجموعة النقط داخل A تسمى داخل A ونرمز لها بالرمز Å.

$$a \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists (x_0, r) \in E \times \mathbb{R}^*_+ , \quad B(x_0, r) \subset A \text{ و } a \in B(x_0, r)$$

ملاحظة3: كل نقطة داخل A تنتمي الى A أي $\mathring{A} \subset A$

-4 ليكن $A \subset C$ و $a \in E$

نقول أن a ملاصقة لـ A اذا كان كل جوار لـ a يلتقي مع A.

مجموعة النقط الملاصقة لـ A تسمى ملاصقة A ونرمز لها بالرمز $\overline{A}$.

$$a \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(a), \quad V \cap A \neq \varnothing$$

ملاحظة4 : كل نقطة من A ملاصقة لـ A أي

$$A \subset \overline{A}$$

-5 $A \subset E$ و $a \in E$

نقول أن a نقطة تراكم لـ A اذا كان كل جوار لـ a يلتقي A في نقطة غير a :

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \qquad V \cap A \setminus \{a\} \neq \varnothing$$

ملاحظة5: كل نقطة تراكم هي حتما نقطة ملاصقة لـ A والعكس عامة خطأ.

-6 نقطة a التي ليست نقطة تراكم تسمى نقطة منعزلة.

$$\forall \quad V\in \mathcal{V}(A) \qquad\qquad \forall \cap \ A = \{a\}$$

2.2.1 جزء مفتوح ، جزء مغلق:

* نقول أن الجزءA من E جزء مفتوح أو مفتوح، اذا كانت كل نقطةA $a\in$ مركز لكرة مفتوحة محتواة في A أي بصيغة اخرى A جوار لكل نقطة من نقاطه .

اذا رمزنا بـ $\mathcal{O}$ ألي مجموعة المفتوحات لـ E ، فان:

$$\boxed{A\in\mathcal{O} \iff \forall\, a\in A\ ,\ \exists\, r>0\ ,\ B(a,r)\subset A}$$

وباستعمال مفهوم الداخلي، لدينا

$$\boxed{A\in\mathcal{O} \iff \mathring{A} = A}$$

قضية: في $\mathbb{R}^n$ ، اذا كان A مفتوح بالنسبة للنظيم N_1 فان A مفتوح بالنسبة لكل نظيم آخر N_2المعرف على $\mathbb{R}^n$.

البرهان: بما أن:

$$\forall\, a\in A\ ,\ \exists\, r>0\ ,\ B(a,r)\subset A$$

فان:

$$\forall\, a\in A\ ,\ \exists r>0\ ,\ \forall\, x\in E\ ,\ N_1(x-a)<r \Rightarrow x\in A$$

ومن جهة اخرى نعام أنه يوجد $\alpha > 0$ حيث $N_1(x-a) \leq \alpha\, N_2(x-a)$

ومنه لدينا الاستلزام:

$$\alpha\, N_2(x-a) < r \Rightarrow x\in A$$

الشعاع a هو، بالنسبة للنظيم N_2، مركز الكرة المفتوحة ذات نصف القطر $\dfrac{r}{\alpha}$ المحتواة في A .

مثال مهم لمفتوح:

كل كرة مفتوحة هي مفتوح لـ E .

الخواص الرئيسية للمفتوحات:

(O_1) $\varnothing \in \mathcal{O}$ et $E \in \mathcal{O}$ (E و المجموعة الخالية مفتوحتين)

(O_2) $\forall\, i \in I\,,\ A_i \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}$ (كل اتحاد مفتوحات مفترح)

(O_3) $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}\quad A_i \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcap_{1\le i\le n} A_i \in \mathcal{O}$ كل تقاطع منته لمفتوحات مفتوح

* نقول أن الجزء A منE جزء مغلق أو مغلق اذا كان متممة لمفتوح.

اذا كانت $\mathcal{F}$ ترمز الى مجموعة المغلقات ، لدينا:

$$A \in \mathcal{F} \ \Leftrightarrow\ A^C \in \mathcal{O}$$

باستعمال مفهوم الملاصق لدينا:

$$A \in \mathcal{F} \ \Leftrightarrow\ \overline{A} = A$$

مثال: كل كرة مغلقة هي مغلق لـ E .

ملاحظة: رأينا أن في $\mathbb{R}^n$ مفهوم المفتوح لا يتعلق بالنظيم المختار والشيء نفسه بالنسبة لمفهوم المغلق.

الخواص الرئيسية للمغلوقات:

(F1) $\varnothing \in \mathcal{F}$ et $E \in \mathcal{F}$ (E و $\varnothing$ مغلقان)

(F2) $\forall\ i \in I\,,\ A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$ (كل تقاطع مغلقات مغلق)

(F3) $\forall\ i \in \{1,\ldots,n\}\,,\ A_i \in \mathcal{F}$ (كل اتحاد منته لمغلقات مغلق)

3.2.1 جزء متراص من $\mathbb{R}^n$:

ليكن A جزء من $\mathbb{R}^n$

نقول أن A جزء محدود من $\mathbb{R}^n$ (او محدود من $\mathbb{R}^n$)، اذا كان:

$$\exists r > 0\ ,\ \forall x \in A \qquad \|x\| \le r$$

ملاحظة: من تكافؤ النظم في $\mathbb{R}^n$ ، نستنتج أن هذا المفهوم مستقل عن النظيم المختار .

قضية: كل كرة (مفتوحة أو مغلقة) محدودة في $\mathbb{R}^n$.

البرهان: لتكن الكرة ذات المركز a ونصف القطر r .

لنثبت أن:

$$B(a,r) \subset \bar{B}(a,r) \subset \bar{B}(o, r + \|a\|)$$

نلاحظ أن المحتواة الاولى بديهية.

لدينا:

$$x \in \bar{B}(a,r) \Leftrightarrow \|x-a\| \leq r$$
$$\Rightarrow \|x\| - \|a\| \leq r$$
$$\Rightarrow \|x\| \leq r + \|a\|$$

نقول ان الجزء A من $\mathbb{R}^n$ متراص من $\mathbb{R}^n$ اذا كانت A مغلقة ومحدود في الوقت نفسه.

ملاحظة: كل كرة مغلقة من $\mathbb{R}^n$ متراص من $\mathbb{R}^n$.

3.1. استمرارية التطبيقات من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}^p$

ليكن U مفتوح من $\mathbb{R}^n$ ، $a = (a_1, \ldots, a_n)$ نقطة من U و f تطبيق من U نحو $\mathbb{R}^p$.

بما أن $f(x) \in R^p$ من أجل كل $x \in U$ فمن الطبيعي كتابة

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \quad \forall x \in U$$

حيث f_i ، $i=1,..p$ تطبيق من U نحو $\mathbb{R}$ ولهذا نكتب $f = (f_1, \ldots, f_p)$.

1.3.1 تعريف استمرارية تطبيق:

نقول أن f تطبيق مستمر عند النقطة a اذا كانت احدى الشروط الاربعة المتكافئة التالية محققة:

1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad : \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| < \varepsilon$

2) $\forall B_p(f(a),\varepsilon) \;,\; \exists B_n(a,\delta) : f(B_n(a,\delta)) \subset B_p(f(a),\varepsilon)$

3) $\forall i \in \{1,\ldots,p\} \;,\; \forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists \delta > 0 : \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f_i(x)-f_i(a)\| < \varepsilon$

4) من أجل كل $i \in \{1,\ldots,p\}$ التطبيق f_i مستمر عند a

2.3.1 ملاحظات وخواص:

1- الاستمرارية عند a لتطبيق مجموعة وصوله $\mathbb{R}^p$ تكافيء الاستمرارية عند a لـ p تطبيق مجموعة وصوله $\mathbb{R}$. ولهذا السبب نقتصر عموما، على دراسة التطبيقات من U نحو $\mathbb{R}$.

2- لدينا العلاقتين التاليتين:

$$f_r = \mathrm{P}_r \circ f \qquad , \qquad r = 1,\dots,p$$

$$f = \sum_{r=1}^{p} i_r \circ f_r$$

حيث $\mathrm{P}_r : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$$(x_1,\dots,x_p) \to \mathrm{P}_r(x) = x_r$$

$$i_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$$

$$t \to i_r(t) = (0,\dots,0,t,0,\dots,0)$$

كل المركبات معدومة ما عدا الموجودة في الرتبة r .

$\mathrm{P_r}$ و $\mathrm{i_r}$ هما على الترتيب الاسقاط النموذجي r والتباين النموذجي r ، $r = 1,\dots,p$

التطبيق P_r خطي ومنه فهو مستمر من $\mathbb{R}^p$ نحو $\mathbb{R}$ والشيء نفسه بالنسبة لـ i_r ومنه فهو مستمر من $\mathbb{R}^p$ نحو $\mathbb{R}$.

3 - الشروط الاربعة السابقة الذكر مستعملة بواسطة نظم لكنها مستقلة عن النظيم المختار لأن في الفضاء ذو بعد منته كل النظم متكافئة كما وضحنا ذلك في $\mathbb{R}^n$.

4-لاثبات أن f مستمرة ، لا يكفي اثبات أن f مستمرة بالنسبة الى كل مركبة من مركبات المتغير.

وبوضوح اذا عرفنا الدوال العددية g_i بـ $i = 1,\dots,n$ $\quad g_i(t) = f(a_1,\dots,a_{i-1}, t, a_{i+1},\dots,a_n)$

حيث $a = (a_1,\dots,a_n)$ معطى و t ينتمي الى مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ ذو مركز a_i ، فان :

f مستمرة عند a يعني g_i مستمرة عند a_i من أجل كل i . لكن العكس غير صحيح أي اذا كانت g_i مستمرة عند a_i من اجل كل i فهذا لا يعني حتما أن f مستمرة عند a كما يوضحه المثال الموالي:

مثال:

ليكن التطبيق f من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$ المعرف بـ :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0\\ 0 & (x,y)=0\end{cases}$$

نأخذ $a=(a_1,a_2)=(0,0)$

فلدينا من أجل $t\in\mathbb{R}$ $g_1(t)=f(t,0)=0$ و $g_2(t)=f(0,t)=0$

ومنه g_1 و g_2 مستمرين عند 0 لكن f ليست مستمرة عند $(0\,,0)$ لانه مثلا

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=0.5\neq f(0,0)$$

5- ليكن D جزء غير خال من E ، نفرض أن f من U نحو $\mathbb{R}$ معرفة بـ

$$f(x,y)=\begin{cases}g(x) & x\in D\\ h(x) & x\in U\setminus D\end{cases}$$

لدراسة استمرارية f عند نقطة $a\in U$ يجب التمييز بين الحالات الثلاثية التالية:

الحالة1: اذا كان $a\in D$ و D جوار لـ a فان استمرارية f عند a تكافؤ استمرارية g عند a .

الحالة2 : اذا كان : $a\in U\setminus D$ و$U\setminus D$ جوار لـ a فان استمرارية f عند a تكافؤ استمرارية h عند a .

الحالة3: اذا لم يكن D جوار لـ a و $U\setminus D$ كذلك فان لدراسة استمرارية f عند a يجب دراسة كل g و h في جوار a .

6- اذا كانت$(x_1,\dots,x_n)$ φ علاقة (تربط بين المركبات $x_n,\dots,x_1$ للمتغير x) ليست متناقضة مع المعطيات (x يؤول الى a) فان :

....

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \Rightarrow \lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)=0}} f(x)=f(a)$$

لكن الاستلزام الغير مباشر خاطئ ، وهدا يعنى انه لإثبات استمرارية f عند a يجب إثبات ان f تؤول الى $f(a)$ بدون اى شرط حول الكيفية التي يؤول بها x الى a .

هده الملاحظة مهمة و مستعملة خاصة عندما نثبت أن f ليست مستمرة عند a. و عليه فى هده الحالة يجب إيجاد علاقة : $\varphi(x)=0$ حيث: $\lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)=0}} f(x)\neq f(a)$

مثال: التطبيق f من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$ المعرف ب :

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ليس مستمر عند$(0,0)$ لأنها إذا أخدنا العلاقة : $\varphi(x,y)=x+y^2=0$ (وهي ليست متناقصة مع المعطيات (x,y) يؤول الى $(0,0)$)

نلاحظ جيدا أن:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \varphi(x)=0}} f(x)=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$$

3.3.1 استمرارية التطبيقات المركبة:

نظرية: ليكن U و V مفتوحان من $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^p$ على الترتيب و $f:U\to V$ و $g:V\to\mathbb{R}^q$ تطبيقان. اذا كانت f مستمرة عند a من U و g مستمرة عند $f(a)$ من V فان التطبيق المركب $g\circ f$ مستمر عند a .

ملاحظة: استمرارية $g\circ f$ لا تستلزم حتما استمرارية كل f و g .

4.3.1 الاستمرارية على مجموعة:

نقول أن f مستمرة على U اذا كانت f مستمرة عند كل نقطة a من U .

4.1 استمرارية التطبيقات الخطية :

فى هذه الفقرة، E و F يعتبران فضاءين شعاعيين على نفس الجسم K.

نذكر ان تطبيق u من E نحو F يكون خطيا اذا تحقق ما يلى:

$$u(\alpha x+\beta y) = \alpha u(x) +\beta u(y) \quad \forall\, x,y \in E \;,\; \forall\; \alpha , \beta \in K$$

1.4.1 نظرية : اذا كان u تطبيق خطى من E نحو F فان الشروط التالية متكافئة :

(1) u مستمرة على E

(2) u مستمرة عند المبدأ .

(3) u محدودة على كرة الوحدة المغلقة لـ E .

(4) u محدودة على سطح كرة الوحدة لـ E .

(5) يوجد ثابت موجب M حيث :

$$\forall\; x \in E : \quad \|u(x)\|_F \le M \|x\|_E$$

ملاحظة:

1. فى الادعاء (2) للنظرية السابقة نستطيع تعويض الاستمرارية عند المبدأ بالاستمرارية عند أي نقطة أخرى من E.
2. فى الادعاء(3) نستطيع تعويض كرة الوحدة المغلقة بكرة مغلقة ذات نصف القطر $r > 0$
3. فى الادعاء(4) نستطيع تعويض سطح كرة الوحدة بسطح كرة ذات نصف القطر $r > 0$.

2.4.1 نظرية:

1). مجموعة التطبيقات الخطية المستمرة من E نحو F والتى نرمز لها بالرمز $L(E , F)$ فضاء شعاعى على K .

2).التطبيق $u \to \| u \| = \sup\limits_{\|x\|_E =1} \|u(x)\|_F$ نظيم على $L(E , F)$

••••

ملاحظة:

من اجل $u \in L(E,F)$ لدينا :

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \le 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x \in E-\{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

$$\boxed{\|u(x)\|_F \le \|u\| . \|x\|_E \qquad \forall\ x \in E}$$

$\|u\|$ هي أصغر ثابت يحقق المتباينة السابقة .

3.4.1 حالة بعد منته:

قضية: اذا كان بعد E منته، فان كل تطبيق خطي من E نحو F مستمر (مهما كان بعد F).

5.1 تمارين:

تمرين 1: بين أن التطبيق N من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$ المعرف بـ $N(x,y) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$

نظيم على $\mathbb{R}^2$.

تمرين 2: ادرس استمرارية الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}^2$ بـ :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x - y} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

تمرين 3: لتكن الدالة f من $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}$ المعرفة بـ :

$$f(x,y) = \frac{xyz}{x+y+z}$$

احسب نهاية الدالة f (ان وجدت) عند النقطة $a = (0,0,0)$

تمرين 4: ليكن E و F ف،ش،ن حقيقيين و f تطبيق مستمر من E نحو F يحقق العلاقة :

$$(*) \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall\, x,y \in \mathrm{E}$$

اثبت أن f تطبيق خطي .

6.1 الحلول:

حل التمرين 1:

-1 لدينا $N(0,0) = 0$ و

$$N(x,y) = 0 \Rightarrow \forall\, t \in [0,1] \quad x + ty = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (t = 0) \\ x+y = 0 & (t = 1) \end{cases}$$

و منه $(x,y) = (0,0)$

-2 $$N(\lambda(x+y)) = N(\lambda x\,,\, \lambda y) = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda x\,,\, \lambda t y\,| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |x+ty| = |\lambda|\, N(x,y)$$

-3 $$N((x,y) + (x', y')) = \sup_{t\in[0,1]} |x+x'+t(y+y')|$$

التطبيق الذي يرفق الى $t\in[0,1]$ العدد $|x+x'+t(y+y')|$ مستمر على $[0,1]$ (وهذا من أجل كل x, x', y , y') وعليه فهو محدود ويأخذ حديه أي:

$$\exists\, t_0 \in [0,1] \quad N((x,y) + (x', y')) = |x+x'+t_0(y+y')|$$

$$\leq |x+t_0+y| + |x'+t_0y'|$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} |x+ty| + \sup_{t\in[0,1]} |x'+ty|$$

ومنه النظيم N نظيم على $\mathbb{R}^2$.

حل التمرين :2

1- f مستمرة على $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ لانها دالة ناطقة .

بالمرور الى الحداثيات القطبية ، لدينا :

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \left| \frac{r^3}{r^2} \cos^2\theta \sin\theta \right| \leq r$$

وعليه $$|f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \;|$$

وبالتالي f مستمرة على $\mathbb{R}^2$.

3- بنفس الطريقة السابقة نثبت أن :

$$|g(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

وعليه $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

ومنه g مستمرة عند $(0,0)$ ومنه على $\mathbb{R}^2$ ، لانها دالة ناطقة على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

حل التمرين :3

لدينا : من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(x,x,x^3 - 2x) = x^2 - 2 \quad \text{و} \quad f(x,0,0) = 0$$

ومنه $$\lim_{x\to 0} f(x,x,x^3 - 2x) = -2 \neq 0$$

وبالتالي f لا تقبل نهاية عند $(0,0,0)$.

حل التمرين :4

يجب فقط اثبات أنه:

$$(1) \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x) \qquad \forall (\lambda,x) \in \mathbb{R}\times E$$

من العلاقة (*) نستنتج بسهولة أن

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-x) = -f(x) \qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}\times E \\ f(nx) = nf(x) \end{cases}$$

و منه : $$nf\left(\frac{x}{n}\right) = f\left(n\frac{x}{n}\right) = f(x) \quad \forall (n,x) \in \mathbb{Z}^* \times E$$

و بالتالي :

$$f\left(\frac{n}{m}x\right)=f\left(n\frac{x}{m}\right)=nf\left(\frac{x}{m}\right)=\frac{n}{m}f(x)\quad \forall(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{*} \qquad (2)$$

وعليه فالعلاقة (1) صحيحة من أجل كل $\lambda\in\mathbb{Q}$ وكل $x\in E$. من جهة أخرى ، $\mathbb{Q}$ كثيف في $\mathbb{R}$. اذا كان $\lambda\in\mathbb{R}$ ، يوجد متتالية أعداد صماء (λ_n) حيث $\lim_n \lambda_n=\lambda$.

باستعمال استمرارية f والعلاقة (2) نجد من أجل كل $x\in E$.

$$f(\lambda x)=f(\lim_n \lambda_n \,.\, x)=f(\lim_n(\lambda_n x))=\lim_n f(\lambda_n x)=\lim_n \lambda_n f(x)=\lambda f(x)$$

العلاقة (1) اذن محققة . نستنتج خطية f.

الفصل الثاني

2. التفاضلية الأولى

في هذا الفصل نعتبر $E=\mathbb{R}^n$ ، $F=\mathbb{R}^p$ و $K=\mathbb{R}$.

1.2 تعاريف :

ليكن U مفتوح غير خالي من $\mathbb{R}^n$ ، a عنصر من U و f تطبيق من U نحو $\mathbb{R}^p$.

المجموعة $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ هى مجموعة التطبيقات الخطية المستمرة من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}^p$.

1.1.2 تفاضلية تطبيق:

نقول ان التطبيق f من U نحو $\mathbb{R}^p$ قابل للمفاضلة عند a ، اذا وجد تطبيق $g_a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ يحقق العلاقة :

$$\boxed{f(a+h) - f(a) = g_a(h) + o(h)}$$

حيث o(h) عنصر من $\mathbb{R}^p$ يحقق:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0$$

التطبيق g_a يسمى التفاضلية (الاولى) لـ f عند a ، نرمز له بالرمز $Df(a)$.

نقول ان التطبيق f من U نحو $\mathbb{R}^p$ قابل للمفاضلة على U اذا كان قابل للمفاضلة عند كل نقطة من U.

اذا كان f قابل للمفاضلة عند a فان f مستمرة عند a .

- **المساواة** : $f(a+h) - f(a) = g(h) + o(h)$ مكافئة لكل علاقة من العلاقات التالية :

$$(1)\quad \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (\in \mathbb{R})$$

$$(2)\quad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)}{\|h\|} = 0 \quad (\in \mathbb{R}^p)$$

(3) $f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)=\|h\|\,\varepsilon(h)$.

حيث ε تطبيق من V_o (جوار للمبدأ فى R^n) نحو R^p ويحقق : $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

(4) $f(x+h)-f(a)-Df(a)(x-a)=\|x-a\|\,\rho(x)$

حيث ρ تطبيق من V_a (جوار a) نحو R^p ويحقق : $\lim_{x\to a} \varepsilon(h) = 0$

2.1.2 التطبيقات من الصنف C^1 :

اذا كان التطبيق f من U نحو R^p قابل للمفاضلة على U فان من أجل كل $a\in U$ ، تفاضلية f عند a وحيدة بمعنى آخر اذا كانت التفاضلية موجودة فانها وحيدة . وعليه التطبيق :

$$Df: \quad U \to L(R^n, R^p)$$
$$x \to Df(x)$$

يسمى تفاضل الدالة f . واذا كان Df مستمر على U نقول ان f قابل للمفاضلة باستمرار أو f من الصنف C^1 على U ونكتب $f\in C^1(U, R^p)$ حيث $C^1(U, R^p)$ مجموعة التطبيقات من U نحو R^p القابلة للمفاضلة باستمرار واذا لم يكن هناك أي خلط نرمز لها بالرمز $C^1(U)$.

خاصية: مجموعة التطبيقات المعرفة على U والقابلة للمفاضلة عند a فضاء شعاعي وعليه. اذا كانت f و g قابلتين للمفاضلة عند a فان:

(1) $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$

(2) $D(\lambda f)(a) = \lambda\ Df(a) \quad \forall\ \lambda\in R$

3.1.2 أمثلة: ليكن f تطبيق من R^n نحو R^p فلدينا ما يلى :

(1) اذا كان f تطبيق خطى مستمر فان $f\in C^1(R^n)$ و

$$\boxed{\forall\ x \in R^n :\quad Df(x) = f}$$

ينتج عن هذا ، أن التفاضلية $Df : R^n \to L(R^n, R^p)$ **ثابتة** .

••••

(2) إذا كان f تطبيق **تالفي مستمر** اى $f = g + c$ حيث $g \in L(R^n, R^p)$ و c عنصر ثابت من R^p

فان $f \in C^1(R^n)$ و لدينا :

$$\boxed{\forall \ x \in R^n: \quad Df(x) = g}$$

(3) اذا كانت f **ثابتة** فان

$$\boxed{\forall \ x \in R^n: \quad Df(x) = 0}$$

(4) اذا كان $n=2$ و f تطبيق **خطى مستمر** على R^2 (نقول أيضا **ثنائية الخطية**) فان :

$$\boxed{\forall \ x = (x_1, x_2) \in R^2 ; \quad \forall \ h = (h_1, h_2) \in R^2 : Df(x)(h) = f(x_1, h_2) + f(x_2, h_1)}$$

2.2 حالات خاصة و المصفوفة اليعقوبية:

1.2.2 حالة $n = p = 1$

فى هذه الحالة لدينا f من U نحو R و(U مفتوح من R) .

نظرية :

f **قابلة للمفاضلة** عند$a \in U$ اذا وفقط اذا كانت f **قابلة للاشتقاق** عند a وأيضا :

$$\boxed{\forall \ h \in R: \quad Df(a)(h) = f'(a).h}$$

البرهان : يكفى الرجوع الى قابلية اشتقاق دالة عددية عند $a \in U$ (السنة الأولى).

2.2.2 حالة $n = 1$ و p كيفي :

لدينا U مفتوح من R و $f: \quad U \to R^p$

$$t \to f(t) = (f_1(t), \ldots f_p(t))$$

نظرية: نقول ان f قابلة للمفاضلة عند $a\in \mathrm{U}$ اذا وفقط اذا كانت p دوال المركبة لـf قابلة للاشتقاق عند a ، وايضا :

$$\boxed{\forall h\in \mathbb{R}: \quad \mathrm{D}f(a)(h) = (f_1'(a)h,\ldots,f_p'(a)h)}$$

البرهان: اذا كانت كل دالة $f_i(1\leq i\leq p)$ قابلة للاشتقاق عند $a\in \mathrm{U}$ فان:

$$f(a+h) = (f_1(a+h),\ldots,f_p(a+h))$$

$$= (f_1(a)+f_1'(a)h+|h|\varepsilon_1(h),\ldots,f_p(a)+f_p'(a)h+|h|\,\varepsilon_p(h))$$

$$= f(a)+(f_1'(a)h,\ldots,f_p'(a)h)+|h|\,(\varepsilon_1(h),\ldots,\varepsilon_p(h))$$

و $$\lim_{h\to 0}(\varepsilon_1(h),\ldots,\varepsilon_p(h)) = (0,..,0) = 0_p$$

وعكسيا نفرض ان f قابلة للمفاضلة عند a .

بما ان $\mathrm{D}f(a)$ تطبيق خطي أي $(\mathrm{D}f(a)\in \mathrm{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p))$ ، يوجد p عدد حقيقي $l_p,\ldots,l_1$ حيث:

$$\forall h\in \mathbb{R} \quad \mathrm{D}f(a)(h) = (l_1h,\ldots,l_ph)$$

نرمز الى مركبات التطبيق ε بـ $\varepsilon p,\ldots,\varepsilon_1$ فنجد:

$$f_i(a+h) = f_1(a) + l_ih+|h|\,\varepsilon_i(h) \qquad 1\leq i\leq p$$

و $$\lim_{h\to 0}\varepsilon_i(h) = 0$$

و عليه كل مركبة قابلة للاشتقاق عند a و $f_i'(a)=l_i$ أي :

$$\mathrm{D}f(a)(h) = (f_1'(a)h,\ldots,f_p'(a)h)$$

3.2.2 حالة n كيفي و $p=1$:

أي $$f:\mathrm{U}\to \mathbb{R}$$

$$(x_1,\ldots,x_n)\to f(x_1,\ldots,x_p)$$

تعريف المشتقة الجزئية:

ليكن $a=(a_1,\ldots,a_n)$ ، اذا كان التطبيق للمتغير الحقيقي الذي يرفق بـ t العنصر

$f(a_1,\ldots,a_{i-1},t,a_{i+1},\ldots,a_n)$ المعرف في جوار a_i ، قابل للاشتقاق عند a_i ، نرمز الى مشتقته عند a_i بالرمز $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. العدد $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ يسمى المشتقة الجزئية للدالة f عند a بالنسبة للمركبة i.

نظرية 1: اذا كانت f قابلة للمفاضلة a فان f تقبل مشتقات جزئية بالنسبة لكل مركبات a ولدينا:

$$\boxed{\mathrm{D}f(a)(h)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ h_i\ ,\quad \forall\ h=(h_1,\ldots,h_n)\in \mathbb{R}^n}$$

البرهان:

بما ان $\mathrm{D}f(a)$ عبارة خطية في $\mathbb{R}^n$ ، فانه يوجد n اعداد حقيقية $\propto_1,\ldots\ldots,\propto_n$ حيث :

$$\forall\ h=(h_1,\ldots,h_n)\in \mathbb{R}^n\quad :\quad \mathrm{D}f(a)(h)=\sum_{i=1}^{n}\propto_i h_i=\propto_1 h_1+\ldots.+\propto_n h_n$$

اذا كان $1\le i\le n$ فان :

$$f(a_1,..,a_{i-1},a_i+h_i,a_{i+1},..,a_n)=f(a_1,..,a_i,..,a_n)+\mathrm{D}f(a)(0,..,h_i,..,0)+|h_i|\varepsilon(0,..,h_i,..0)$$

$$=f(a_1,..,a_i,..,a_n)+\propto_i h_i+|h_i|\varepsilon_i(h_i)$$

مع : $\lim\limits_{h_i\to 0}\varepsilon_i(h_i)=0$

وهذا يعنى أن المشتقة الجزئية للدالة f عند a *بالنسبة للمركبة* i موجودة و $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\propto_i$

ملاحظة : النظرية العكسية خاطئة ،أي اذا كانت f تقبل n مشتق جزئى عند a فانها ليست حتما قابلة للمفاضالة عند a .

مثال : ليكن التطبيق f من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$ المعرف بـ :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

••••

• اذا كان $(x,y) \neq (0,0)$ لدينا : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)= \frac{y(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

• اذا كان $(x,y) = (0,0)$ لدينا:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,o) - f(0,0)}{h} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

أي f تقبل مشتقات جزئية عند $(0,0)$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \right)$$

لكن بما انها ليست مستمرة عند $(0,0)$ (انظر الفصل الاول) لا يمكنها ان تكون قابلة للمفاضلة عند $(0,0)$

.

<u>نظرية</u> 2: اذا كانت f تقبل n مشتق جزئي كلهم مستمرين عند a فان f قابلة للمفاضلة عند a و:

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^n \qquad Df(a)(h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i$$

4.2.2 <u>حالة n و p كيفيين:</u>

أي

$$f : U \to \mathbb{R}^p$$

$$(x_1,\ldots,x_n) \to f(x_1,\ldots,x_n)$$

....

مع U مفتوح من ^{n} ، نسمي $f_1, f_2, \ldots, f_p$ الدوال المركبة لـ f أي اذا كان $(x_1,\ldots,x_n)\in U$ فان

$f(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_p(x_1,\ldots,x_n))$.

نظرية: f قابلة للمفاضلة عند a اذا وفقط اذا كانت $f_1,\ldots,f_p$ دوال المركبات قابلة للمفاضلة عند a و:

$$\boxed{\forall h\in R^n \qquad Df(a)(h) = (Df_1(a)(h),\ldots,Df_p(a)(h))}$$

البرهان: نكتب $Df(a)(h)$ و h على شكل شعاع عمود:

$$\boxed{Df(a)(h) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} h_i \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_i} \\ \\ \sum_{i=1}^{n} h_i \dfrac{\partial f_p(a)}{\partial x_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} h_n \\ \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n} h_n \end{pmatrix}}$$

نفرض أن f قابلة للمفاضلة عند a ، فان :

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \|h\|\, \varepsilon(h_i)$$

ومنه بالنسبة لكل مركبة :

$$f_i(a+h) = f_i(a) + \varphi_i(h) + \|h\|\, \varepsilon_i(h)$$

φ_i هى عبارة خطية على R^n و $\lim_{h\to 0_n} \varepsilon_i(h) = 0$

وهدا ما يثبت ان كل مركبة قابلة للمفاضلة عند a و $Df_i(a)(h) = \varphi_i(h)$. وبالعكس اذا كانت كل مركبة f_i قابلة للمفاضلة عند a فانه اذا كانت $l \in L(R^n, R^p)$ معرفة بـ :

$$l(h) = (Df_1(a)(h), \ldots, Df_p(a)(h))$$

تحقق بسهولة ان هذا التطبيق هو تفاضلية f عند a .

5.2.2 المصفوفة اليعقوبية: [Matrice Jacobienne]

اذا كانت f قابلة للمفاضلة عند a نسمي مصفوفة يعقوبية لـ f عند a ، المصفوفة المرمز لها بـ $J_f(a)$ المعرفة بـ :

$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \qquad 1 \le i \le n \quad \text{و} \quad 1 \le j \le p$$

أي :

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \ldots\ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) \ldots\ldots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

ولدينا اذن، اذا كان $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$:

$$Df(a)(h) = J_f(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

3.2 تفاضلية التركيب:

تقدم في هذه الفقرة النظرية التالية بدون برهان.

1.3.2 <u>النظرية</u> : لتكن f من U نحو $\mathbb{R}^n$ و g من V نحو $\mathbb{R}^q$ ، U و V مفتوحتين من $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^p$ على الترتيب، حيث $f(U)\subset V$

1- اذا كانت f قابلة للمفاضلة عند a و g قابلة للمفاضلة عند $f(a)$ فان gof قابلة للمفاضلة عند a و:

$$\boxed{D(gof)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)}$$

او

$$\boxed{J_{gof}(a) = J_g(f(a)) \,.\, J_f(a)}$$

2- اذا كانت f قابلة للمفاضلة على U و g على V فان gof قابلة للمفاضلة على U.

3- اذا كانت f من الصنف $C^1(U)$ و g من الصنف $C^1(V)$ فان gof من الصنف $C^1(U)$.

2.3.2 <u>حالة خاصة:</u> $\boldsymbol{n = p = q = 1}$

فان : $\forall h\in \mathbb{R}\, ,\ (gof)'(a)h = g'(f(a))\, f'(a)h$

ونتحصل على نظرية اشتقاق تركيب دالتين:

$$\boxed{(gof)'(a) = g'(f(a))\,.\, f'(a)}$$

4.2 <u>تمارين:</u>

<u>التمرين</u> 1: لتكن f من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$ المعرفة بـ :

$$f(x,y) = \begin{cases} x.y\ \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

بين ان f قابلة للمفاضلة عند $(0,0)$ ثم احسب $Df(0,0)$.

<u>التمرين</u> 2: نعتبر على R^2 الدالة f المعرفة بـ :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

اثبت أن f من الصنف $C^1(R^2)$

<u>التمرين</u> 3: نعطي n دالة:

$x_1,..,x_n$ n دوال معرفة وقابلة للاشتقاق على U مفتوح من R وذات القيم في R^n .

اثبت ان الدالة $d : U \to R$

$$t \to det\,(x_1(t),\ldots,x_n(t))$$

قابلة للاشتقاق واحسب المشتقة d' .

$det\,(x_1(t),\ldots,x_n(t))$ هو المحدد ذو رتبة n للمصفوفة التي اعمدتها مكونة من مركبات الاشعة $x_1(t),\ldots\ldots,x_n(t)$.

التمرين 4: ليكن التطبيق f من R_+^* نحو R معطى و F التطبيق من R^2 نحو R^2 المعرف بـ :

$$F(x,y) = \begin{cases} (x,y) & x \le 0 \\ (x,y+f(x)) & y \rangle 0 \end{cases}$$

ما هي الشروط حول f حتى تكون F

1- مستمرة على R^2 .

2- قابلة للمفاضلة على R^2 .

5.2 الحلول:

حل التمرين 1: اذا كانت f قابلة للمفاضلة عند $(0,0)$ فانها تقبل عند هذه النقطة مشتقات جزئية ويكون لدينا :

$$Df(0,0)(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)k$$

لدينا $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$ ومنه $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

بالمثل: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

ندرس:

$$\frac{|f(x,y)-f(0,0)|}{\|(x,y)\|_2} \le \frac{\left|x,y \quad \sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \sqrt{x^2+y^2}$$

وعليه:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - x\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) - y\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right|}{\|(x,y)\|_2} = 0$$

ومنه f قابلة للمفاضلة عند $(0,0)$ و $Df(0,0) : R^2 \to R$

$(h,k) \to 0$

<u>حل التمرين 2:</u>

اذا كان $(x,y) \neq (0,0)$ فان $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

و $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$ يستلزم ان $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

استمرارية $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ عند (0,0) :

لدينا : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right| = \dfrac{2r^5}{r^4}\,|\cos\theta|\sin^4\theta \leq 2r$

ومنه $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$

وبالطريقة نفسها نجد:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x^3(x^2+2y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

....

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \qquad و$$

بما أن المشتقات الجزئية الأولى مستمرة على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

<u>حل التمرين 3</u>: نقوم بالتركيب التالي:

$$d : U \longrightarrow R^n \times,\ldots\ldots,\times R^n$$

$$t \longrightarrow (x_1(t),\ldots..,x_n(t)) \xrightarrow{g} d(t) = d \text{ et } (x_1(t),\ldots,x_n(t))$$

بطريقة تكون $d = gof$ f قابلة للاشتقاق لان كل مركباتها قابلات للاشتقاق و :

$$\forall t\in R: \ f(t) = (x_1'(t),\ldots..,x_n'(t))$$

g تطبيق متعدد الخطية معرف عى فضاء بعده منته ، فهو اذن قابل للمفاضلة و :

$$Dg(x_1,\ldots,x_n)(h_1,\ldots.,h_n) = \sum_{i=1}^{n} \ d \text{ et } (x_1,\ldots.,x_{i-1},\ldots,h_1,x_{i+1},\ldots.,x_n)$$

$$\forall x_i\in R^n, i=1,\ldots.,n \quad و \quad \forall h_i \in R^n \qquad i = 1,\ldots,n$$

وبالتالي d قابل للمفاضلة على U و :

$$d'(t) = Dg(f(t)) \,.\, f'(t) \qquad \forall t\in R$$

$$= Dg(x_1(t),\ldots..,x_n(t))(x^1{}_n(t),\ldots.,x'_n(t))$$

<u>حل التمرين 4</u>:

نضع $F=(F_1,F_2)$ حيث $F_1(x,y)=x$ و :

$$F_2(x,y) = \begin{cases} y & x \le 0 \\ y+f(x) & x \rangle 0 \end{cases}$$

....

F مستمرة (قابلة للمفاضلة)(من الصنف C^1) على R^2 اذا وفقط اذا كانت F_1 و F_2 مستمرتين(قابلتين للمفاضلة)،(من الصنف C^1) على R^2 .

من الواضح ان F_1 من الصنف C^∞ على R^2 مهما كانت f تبقى F_2 في مجال الدراسة :

1- استمرارية F_2 :

* على المجموعة $A = \{(x,y) \in R^2 : x \langle 0\}$ ، F_2 مستمرة من اجل كل f.

* على المجموعة $B = \{(x,y) \in R^2 : x \rangle 0\}$ ، F_2 مستمرة اذا وفقط اذا كانت f مستمرة على R^*_+ .

* استمرارية F_2 على المجموعة $C = \{(0,y) , y \in R\}$: يجب ايجاد الشرط (على f) الذي يضمن :

$\lim\limits_{x \to 0^+} F_2(x,y) = F_2(0,y_0)$ من اجل كل (x,y_0) معين في C .

هذه العلاقة محققة اذا وفقط اذا كانت $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$. وأخيرا:

F مستمرة على R^2 $\Leftrightarrow$ f مستمرة على R^*_+ و $\lim\limits_{x \to 0^+} (x) = 0$.

2- مفاضلة F_2 :

F_2 من الصنف C^∞ على A و F قابلة للمفاضلة على B اذا وفقط اذا كانت f قابلة للانشقاق على R^*_+ .

بقيت دراسة قابلية مفاضلة F_2 على C : من اجل هذا ندرس وجود المشتقات الجزئية لـ F_2 على C .

ليكن $(o,y) \in C$ ، لدينا :

$$\frac{F_2(h,y) - F_2(0,y)}{h} = \begin{cases} 0 & h \leq 0 \\ \dfrac{f(h)}{h} & h \rangle 0 \end{cases}$$

وهو ما يبين أن $\frac{\partial F_2}{\partial x}(0,y)$ موجودة اذا وفقط اذا كانت :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\partial F}{\partial h} = 0$. ولدينا $\frac{\partial F_2}{\partial y}(0,y) = 1$

وعليه اذا كانت F_2 قابلة للمفاضلة عند $(0,0)$ ، تفاضليتها معطاة بـ :

$$DF_2(0,y)(h,k) = k \qquad \forall\ (h,k)\in R^2$$

ليكن :

$$B(h,k) = \frac{F_2(h, y+k) - F_2(o, y) - k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

تعريفا ، F_2 قابلة للمفاضلة عند $(0,y)$ اذا كانت :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} B(h,k) = 0$$

لدينا :

$$B(h,k) = \begin{cases} 0 & , \quad h \le 0 \\ \frac{f(h)}{\sqrt{h^2+k^2}} & , \quad h \rangle 0 \end{cases}$$

شرط لازم وكافي حتى تكون F_2 قابلة للمفاضلة عند $(0,y)$ هو اذن $\lim\limits_{k\to 0^+} \frac{f(h)}{h}$ او ايضا $f(h) = o(h)$

اخيرا ، F_2 قابل للمفاضلة على R^2 اذا وفقط اذا كانت f قابلة للاشتقاق على R^*_+ و $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h}$.

الفصل الثالث

3. نظرية المتوسط

في هذا الفصل نعتبر $K = R$ ، و E و F فضاءين شعاعيين حقيقيين .

1.3 نظرية التزايدات المنتهية :

1.1.3 تذكير : نذكر فيما يلي نظرية التزايدات المنتهية بالنسبة لدالة عددية ذات متغير حقيقي .

النظرية 1: اذا كان f تطبيق من المتراص $[a,b]$ في R نحو R ، مستمرة على $[a,b]$ ، وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ ، فانه يوجد على الاقل نقطة c من $]a,b[$ حيث:

$$f(b) - f(a) = (b\text{-}a)\, f'(c)$$

هذه النتيجة تعمم بالنسبة لدالة عددية ذات متغير شعاعي وقبل اعطاء هذه التعميم ، ندرج بعض التعاريف.

2.1.3 تعاريف :

1- ليكن E فضاء شعاعي ، a و b عنصرين من E.

نسمي قطعة مغلقة (مفتوحة) طرفيها a و b ، المجموعة المرمز لها بـ $[a,b]$ ($]a,b[$) التي عناصرها من E وعلى الشكل $(1\text{-}t)a+tb$ حيث t يتغير في $[0,1]$ ($]0,1[$) .

2- نقول ان جزء من E محدب اذا كان كلما شمل عنصرين a و b فانه يشمل القطعة $[a,b]$.

امثلة:

1- اذا كان E فضاء شعاعي ، كل قطعة من E محدب، وكل فضاؤ جزئي من E محدب.

2- اذا كان E ف ، ش ، ن . الكرات (المغلقة او المفتوحة) محدبة ، تقاطع الكرات غير منفصلة ، مجموعة محدبة لكن سطوح الكرات ليست محدبة . اتحاد كرات ليس دائما محدبا .

3.1.3 نظرية التزايدات المنتهية : (بالنسبة لدوال ذات متغيرات شعاعية)

النظرية : ليكن التطبيق f من U (مفتوح لـ R^n) نحو R ، a و b نقطتين من U .

اذا كانت القطعة $[a,b]$ محتواة في U واذا كانت f قابلة للمفاضلة عند كل نقطة من $[a,b]$ ، فانه يوجد $c\in]a,b[$ حيث :

$$\boxed{f(b) = f(a) + Df(c)\,(b-a)} \qquad (1)$$

او ايضا : يوضع $b = a+h$ ، يوجد $\theta \in]0,1[$ يحقق :

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + Df(a+\theta h)(h)} \qquad (2)$$

نلاحظ انه إذا كان $n=1$ نتحصل على النظرية الموجودة في الفقرة 1.1.3 .

باخذ عبارة تفاضلية دالة عددية معرفة على مفتوح من R^n فان الصيغتين (1) و (2) تكتبان كما يلي:

$$\boxed{f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\ \frac{\partial f}{\partial x_i}\ (c)}$$

أو :

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i\ \frac{\partial f}{\partial x_i}\ (a + \theta h)}$$

البرهان : لإثبات هذه النظرية ، نعتبر الدالة F المعرفة بـ :

$$F : [0,1] \to R\ \mathrm{R}$$

$$t \ \to f(a+t(b-a))$$

بما ان التطبيق $t \ \to f(a+t(b-a))$ تآلفي فهو قابل للاشتقاق و :

$$\boxed{\forall\ t\in [0,1] \quad F'(\mathrm{t}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x}\quad (a+t(b-a)(b_i\text{-}ai))}$$

نستنتج (التركيب) ان F قابلة للمفاضلة على $[0,1]$. نستطيع تطبيق نظرية التزايدات المنتهية بالنسبة لدوال عددية ذات متغير حقيقي ونجد :

$$\exists\,\theta \in]0,1[\qquad F(1) = F(0) + F'(\mathrm{o})$$

أي

$$\exists\ c\in]a,b[: \quad f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\ (c)(b_i - c_i)$$

ملاحظة: اذا عوضنا في النظرية السابقة R بـ ف ، ش ، ن (بعد 0〈1) ، ممكن ان تصبح الصيغة (1) خاطئة كما يبينه المثال المضاد التالي :

....

مثال: $f_n : R \to R^2$

$x \to (x^n , x^{n+1})$

من اجل $[a,b] = [-1,1]$ ، الدالة f_n لا تحقق الصيغة (1) وهذا بالنسبة لكل n .

ولهذا فيما يلي ستعمم نظرية التزايدات المنتهية بالنسبة لدوال شعاعية .

2.3 نظرية المتوسط :

2.2.3 نظرية رئيسية:

ليكن $[a,b]$ مجال متراص من R ، F ف ، ش ، ن و f تطبيق مستمر من $[a,b]$ نحو f و φ تطبيق

مستمر من $[a,b]$ نحو R .

نفرض انه من اجل كل x من $]a,b[$ f و g يقبلان مشتقتين $f'(x)$ و $\varphi'(x)$ تحققان $\|f'(x)\|$.....(1)

فانه لدينا :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \varphi(b) - \varphi(a)......(2)$$

البرهان: نثبت اولا الحالة الخاصة : $F = R$

نثبت $\varepsilon \rangle 0$ كيفي :

بما ان $\forall\ x \in [a,b[\ ,\ |f'(x)| \langle\ \varphi'(x) - \varepsilon$

فانه $\forall\ x \in [a,b]\ ,\ \exists\ h \rangle 0\ \ |f(x+h) - f(x)| \langle\ \varphi(x+h) - \varphi(x) + \varepsilon h......(3)$

نعتبر المجموعة :

$$E_\varepsilon = \{x \in [a,b]\ /\ |f(x) - f(a)| \leq \varphi(x) - \varphi(a) + \varepsilon(x-a)\}$$

نلاحظ ان $E_\varepsilon \neq \emptyset$ لان $a \in E_\varepsilon$ ، ليكن $c = \text{Sup } E_\varepsilon$ من (3) لدينا $c \rangle a$ ، نفرض الآن ان $c \notin E_\varepsilon$

أي: $|f(c) - f(a)| \rangle\ \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon(c-a)$

وبما ان $|f|$ و φ مستمرين فانه يوجد $\delta \rangle 0$ بحيث :

$$\forall\, x\in [c-\delta\,,\, c] : |f(x) - f(a)| \rangle\, \varphi(x) - \varphi(a) + \varepsilon(x-a)$$

وهذا تناقص مع $c = \operatorname{Sup} E_\varepsilon$ ومنه E_ε $c\in E$

وبفرض ان $c < b$ فان $c\in [a,b[$ ، يوجد اذن حسب العلاقة (3) $h > 0$ بحيث : $c+h\in [a,b]$ و:

$$|f(-h) - f(c)| \leq \varphi(c+h) - \varphi(c) + \varepsilon\, h$$

$$\begin{aligned}
|\, f(c+h) - f(a)\, | &\leq |\, f(c+h) - f(c)\, | + |\, f(c) - f(a)\, | \\
&\leq \varphi(c+h) - \varphi(c) + \varepsilon h + \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon\,(c-a) \\
&\leq \varphi(c+h) - \varphi(a) + \varepsilon(c+h-a)
\end{aligned}$$

أي E_ε $c+h\in$ خلافا للمساواة $\operatorname{Sup} E_\varepsilon = c$ ومنه $c = b$ ويجعل ε يؤول الى 0 نجد نتيجة النظرية .

وفي الحالة العامة بدلا من إثبات (2) نثبت ان :

$$\forall\, \varepsilon \rangle 0\,,\ \forall x\in [a,b]\ \ \|f(x) - f(a)\| \leq \varphi(x) - \varphi(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon \ \ldots\ldots\ldots.(4)$$

من اجل هذا نعتبر المجموعة :

$$U = \{x\in [a,b] \,/\, \|f(x) - f(a)\| \rangle\, \varphi(x) - \varphi(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon\}$$

ثم نضع :

$$g(x) = \|f(x) - f(a)\| - \varphi(x) - \varphi(a) - \varepsilon(x-a) - \varepsilon$$

نلاحظ ان :

$$U = \{x\in [a,b] \,/\, g(x) \rangle 0\}$$

بما ان g مستمرة فان U مفتوح .

نفرض الآن ان $U \neq \emptyset$

$$\forall x \in U \ , \ x \geq a \ \Rightarrow \exists \ c = \inf \ U$$

c يحقق ما يلي:

$c > a$ و $c \notin U$ (لان U مفتوح) و $c < b$ (والا $U=\{b\}$ وبالتالي فهو غير مفتوح)

وبما ان $a < c < b$ فانه يحقق المتباينة (1) أي $\|f'(c)\| \leq \varphi'(c)$

وعليه يوجد مجال $c \leq x \leq c+n$ مع $(n > 0)$ حيث :

$$\|f'(c)\| \geq \left\| \frac{f(x) - f(c)}{x-c} \right\|$$

و $$\varphi'(c) \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} + \frac{\varepsilon}{2}$$

هاتين المتباينتين والمتباينة (3) تؤدي الى :

$$\| f(x) - f(c) \| \leq \varphi(x) - \varphi(c) + \varepsilon(x-c) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ولكن راينا ان $c \notin U$ أي:

$$f(c) - f(x) \leq \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

من (5) و (6) نستنتج انه من اجل كل $c \leq x \leq c+n$ لدينا :

$$\| f(x) - f(a) \| \leq \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\|$$
$$\leq \varphi(x) - \varphi(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon$$

أي (4) محققة من اجل كل $c \leq x \leq c+n$ ومنه الحد الادنى لـ U اكبر او يساوي $c+n$ ومنه التناقص.

3.2.3 **<u>لازمة:</u>** اذا كانت $f:[a,b] \rightarrow F$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ و:

$$\exists k \in R_+' \ \|f'(x)\| \leq k \qquad \forall x \in]a,b[$$

فان $\|f(b) - f(a)\| \leq k(b-a)$

وبصفة عامة:

$$\forall\, x_1,x_2 \in\ ]a,b[\ \|f(x_2) - f(x_1)\| \leq k(x_2-x_1)$$

البرهان: نستعمل النظرية السابقة وذلك بأخذ $\varphi(x) = kx$ وعليه $\varphi'(x)=k$ أي:

$$\forall\, x\in\ ]a,b[\quad \|f'(x)\| \leq g'(x)$$
$$\leq k$$

فان : $\|f(b) - f(a)\| \leq kb - ka$

$\leq k(b-a)$

وبصفة عامة ناخذ $x_2 = b$ و $x_1 = a$

4.2.3 نظرية التزايدات المنتهية :

U مفتوح محدب من E $\quad f : U\to F$ قابلة للمفاضلة وتحقق :

$$\forall\, x\in U \quad \|Df(x)\| \leq k \quad / \quad k\in \mathbb{R}_+$$

اذن : ....(*)

$$\boxed{\forall\, x_1,x_2 \in U \quad \|f(x_2) - f(x_1)\| \leq k\ \|x_2-x_1\|}$$

ملاحظة: اذا كانت f تحقق العلاقة (*) نقول ان f ليبشيتزية على U و k ثابت ليشيتز.

من اجل البرهان على هذه النظرية نحتاج الى الخاصية التالية:

خاصية1: لتكن $f : U\to F$ قابلة للمفاضلة إذن $\|f(b) - f(a)\| \leq \|b-a\| \sup\limits_{t\in[0,1]} Df[(1-t)a+tb]$

البرهان: نستعمل اللازمة ونعتبر $h(t) = f((1\text{-}t)a+tb)$:

$$h : [0,1] \to \mathrm{U} \to \mathrm{F}$$

$$t \to (1\text{-}t)a+tb \to f((1\text{-}t)a+tb)$$

h هي تركيب تطبيقين قابلين للاشتقاق ومنه فهس قابلة للاشتقاق و :

$$\mathrm{D}h(t) = \mathrm{D}f\,((1\text{-}t)a+tb)(b\text{-}a)$$

$$\leq \ \|\mathrm{D}f((1\text{-}t)a+tb)\| \ \|\mathrm{D}f((1\text{-}t)a+tb)\|$$

$$\leq \ \|b\text{-}a\| \ \sup_{t\in[0,1]} \ \|\mathrm{D}f((1\text{-}t)a+tb)\|$$

يوضع $k = \|b\text{-}a\| \ \sup_{t\in[0,1]} \ \|\mathrm{D}f((1\text{-}t)a+tb)\| \longleftarrow$

h تحقق شروط اللازمة ومنه : $\|h(1)\text{-}h(0)\| \leq k(0,1)$

وبما ان $h(0) = f(a)$ و $h(1) = h(b)$ نتحصل على $\|f(b) - f(a)\| \leq k$

ومنه $\|f(b)\text{-}f(a)\| \leq \|b\text{-}a\| \ \mathrm{Sup} \ \|\mathrm{D}f((1\text{-}t)a+tb)\|$

برهان نظرية 1:

باستعمال الخاصية السابقة : x_1 و x_2 عنصرين من U وبما ان U محدب فان $[x_1,x_2] \subset \mathrm{U}$

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \|x_2\text{-}x_1\| \ \sup_{t\in[0,1]} \ \|\mathrm{D}f((1\text{-}t)a+tb)\|$$

لازمة2 : تحت فرضيات النظرية 1 اذا مانت $k = 0$ أي $\forall x \in \mathrm{U} \quad \mathrm{D}f(x) = 0$

فان f ثابتة على U .

البرهان : فعلا اذا كانت $k = 0$ فان:

$$\forall\, x_1,x_2 \in \mathrm{U} \qquad \|f(x_2) - f(x_1)\| \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \ f(x2) - f(x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ f(x_2) = f(x_1)$$

ومنه f ثابتة على U

3.3 تمارين :

التمرين 1 : لتكن f دالة عددية معرفة مستمرة على المجال $[a,b]$ من R وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ حيث :

1- اثبت ان $|f(b) - f(a)| \geq \alpha\ (b-a)$

2- اثبت ان المشتقة $f'(x_0)$ ، x_0 عنصر من $]a,b[$ نقطة لاصقة لـ $f'(x)$ عندما x يؤول الى x_0

3- بين ان هذه النتيجة ليست صحيحة بالنسبة لدالة شعاعية في ف ش ن ذو بعد $\rangle$ 1.

ناخذ $f = (f_1, f_2)$ مع :

$$f_1(x) = x^2 \sin \frac{1}{2} \quad / \quad x \neq 0 \ ، f_1(0) = 0$$

$$f_2(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} \quad / \quad x \neq 0 \ ، f_2(0) = 0$$

التمرين 2 : ليكن U مفتوح من R^n ، E ف ش ن و f تطبيق من U نحو E مشتقات جزئية $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} , i=1,..,n \right)$ محدودة بين f مستمرة على U .

التمرين 3 : ليكن E ، F فضاءين شعاعين نظيمين U مفتوح من E و f تطبيق قابل للمفاضلة من U نحو F .

1) نفرض ان f k – ليبشيتزي على U ، بين اذن ان $\sup_{x \in U} \|Df(x)\| \leq k$

2) نفرض ان : $\sup \|Df(x)\| \leq k$

بين اذن ان f k – ليبشيتزي على كل محدب محتوى في U .

4.3 حل التمارين :

حل التمرين 1 :

1) لدينا نظرية التزايدات المنتهية .

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad / \quad c \in \,]a,b[$$

وعليه :
$$\frac{|f(b)-f(a)|}{b-a} = |f'(c)| \geq \alpha$$

و
$$|f(b)-f(a)| \geq \alpha\,(b-a)$$

2) نستعمل استدلال بالخلف (f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$، مستمرة على $[a,b]$) . نفرض ان $f'(x_0)$ ليست نقطة لاصقة لـ $f'(x)$ عندما x يؤول الى x_0 . يوجد $0 \rangle \varepsilon$ و $0 \rangle n$ حيث من اجل $\|x-x_0\| \leq n$ لدينا $|f'(x)-f'(x_0)| \geq \varepsilon$ فاذن يوضع $g(x) = f(x)-(x-x_0)f'(x_0)$ نجد $g'(x) = f'(x)-f'(x_0)$ وبالتالي : $|g'(x)| = \varepsilon$ من اجل $|x-x_0| \leq n$

اذن $|g(x)-g(x_0)| \geq \varepsilon|x-x_0|$ من اجل $|x-x_0| \leq n$

أي $|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)| \geq \varepsilon|x-x_0|$ من اجل $|x-x_0| \leq n$.

وهذا ما يناقص $f'(x_0)$ مشتقة f عند x_0 .

3) لدينا من اجل $x \neq 0$

$$f'_1(x) = 2x\,\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$$f_2'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$$

نزود R^2 بالنظيم الاقليدي ، نجد اذن :

$$\|f'(x)\|^2 = f_1'(x)_2 = 1+4x^2 \rangle 1$$

ومن جهة اخرى :

$$F1'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

$$F2'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x \cos\frac{1}{x} = 0$$

• • • •

ومنه : $\|f'(0)\|^2 = 0$

وعليه $f'(0)$ نقطة معزولة لان من اجل $x \neq 0$ $f'(x)$ تبقى خارج الدائرة ذات المركز $f'(0)$ ونصف القطر 1 .

<u>حل التمرين 2</u> :

نثبت ان f مستمرة عن كل نقطة من U :

بما ان $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ محدودة من اجل $i = 1,..,n$ بضع

$$M = \max \sup_{x \in U} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|$$

ليكن $a = (a_1,\dots,a_n)$ منبت في U و B كرة (بالنسبة للنظيم max) مفتوحة ذات مركز a ، محتواة في U (U مفتوح).

من جهة اخرى ليكن $x = (x_1,\dots,x_n)$ عنصر كيفي من B نضع $X_1=a$ ، $X_{n+1}=x$ و $X_k(x_1,\dots,x_{k-1},a_k,\dots,a_n)$ محتواة من B لان :

$$\|X_k-a\| = \max_{2\leq i\leq k-1} |x_i-a_i| \leq \|x-a\|_\infty \quad , \quad \forall k = 2,\dots\dots,n-1$$

لدينا :

$$f(x)-f(a) = \sum_{k=1}^{n} [f(X_{k+1}) - f(X_k)] \qquad (*)$$

نظرية المتوسط تسمح لنا بكتابة :

$$\|f(X_{k+1}) - f(X_k)\| \leq \sup_{t\in[X_{k+1},X_k]} \|D_k f(t)\| \ |x_k - a_k| \leq M|x_k - a_k| \qquad (**)$$

باستعمال العلاقتين (*) و (**) نتحصل على :

$$\|f(x) - f(a)\| \leq M \sum_{k=1}^{n} |x_k - a_k| = M \ \|x-a\|_\infty$$

وعليه : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

وهذا ما يوضح استمرارية f عند كل نقطة a من U .

حل التمرين 3 :

1) ليكن a مثبت في U .

اذا كانت f k - ليشيتزية على U فانه :

من اجل كل t صغير كفاية :

$$\boxed{\|f(x)-f(x+ty)\| \leq k\|ty\| \qquad \forall\, y \in E} \qquad (*)$$

باستعمال المتباينة (*) وتفاضلية f ، نتحصل على :

$$\mathrm{Lim}\ \left\|\frac{f(x)-f(x+ty)}{t}\right\| \leq k\|y\| \qquad \forall\, y \in E$$

او ايضا :

$$\boxed{\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(y)\right\| = \|Df(x)(y)\| \leq k\|y\| \qquad \forall\, y \in E}$$

وبما ان $Df(x) \in L(E,F)$ ، العلاقة (**) تستلزم : $\|Df(x)\| \leq k$

ومنه: $\sup_{x \in U} \|Df(x)\| \leq k$

2) ليكن D محدب محتوى في U :

من اجل x و y في D ، لدينا $[x,y] \subset D$ ، نظرية المتوسط تسمح لنا بكتابة :

$$\|f(x)-f(y)\| \leq \sup_{t \in [x,y]} \|Df(t)\| \,,\ \|x-y\| \leq k\|x-y\|$$

وعليه من اجل كل محدب D محتوى في U ، لدينا :

$$\|f(x)-f(y)\| \leq k\|x-y\| \qquad \forall\, (x,y) \in D^2$$

....

1. التفاضليات من رتب عليا

ليكن E و F ف ش ن على R و U مفتوح غير خالي من E و a عنصر من U .

1.1 التفاضليات الثانية :

1.1.1 تعاريف : ليكن $f: U \to F$ تطبيق قابل للمفاضلة (مرة واحدة) على U

-1 نقول أن f قابلة للمفاضلة مرتين عند a إذا كان التطبيق $Df : U \to L(E,F)$ قابل للمفاضلة عند a ، نسمي تفاضلية Df عند a التفاضلية الثانية لـ f عند a ونرمز لها بالرمز $D^2 f(a)$.

2 - نقول أن f قابلة للمفاضلة مرتين على U إذا كانت قابلة للمفاضلة مرتين عند كل عنصر a من U .

-3 إذا كان التطبيق :
$$D^2 f : U \to L(E, L(E,F))$$
$$x \to D^2 f(x)$$
مستمر على U ، نقول ان f من الصنف C^2 على U و نكتب $f \in C^2(U)$

2.1.1 ملاحظات :

1 - بما ان $D^2 f(a) \in L(E, L(E,F))$ لدينا :

$$\forall h \in E: \qquad D^2 f(a)(h) \in L(E,F)$$

$$\forall (h,k) \in E \times E \qquad D^2 f(a)(h)(k) \in F \;\; ; \;\; D^2 f(a)(k)(h) \in F$$

2 - الفضاء L(E,L(E,F) متشاكل تقابليا مع $L_2(E,F)$ وهذا ما يسمح بمطابقة $D^2 f(a)$ بعنصر من $L_2(E,F)$ أي بتطبيق ثنائي الخطية مستمر من $E \times E$ نحو F ، وعليه نكتب :

....

$$\forall (h,k)\in E\times E: \qquad D^2 f(a)(h)(k)=D^2 f(a)(h,k)$$
$$D^2 f(a)(k)(h)=D^2 f(a)(k,h)$$

2.1 التفاضليات المتتابعة :

نعرف بالتراجع على n التفاضلية من الرتبة $n\in \mathbb{N}^*$

نفرض أن التطبيق : $f:U\to F$ قابل للمفاضلة (n-1) مرة على U و

$D^{n-1}f(x)$

التفاضلية من الرتبة (n-1) لـ f عند النقطة x من U ، لدينا :

$$\forall x\in U \qquad D^{n-1}f(x)\in L_{n-1}(E,F)$$

1.2.1 تعاريف :

1- نقول أن f قابل للمفاضلة n مرة عند a من U اذا كان التطبيق
$x\to D^{n-1}f(x)$
قابل للمفاضلة عند a . والتفاضلية من الرتبة n لـ f عند a تكتب $D^n f(a)$ وعليه :

$$D^n f(a)=D(D^{n-1}f)(a) \quad \in \quad L(E,L_{n-1}(E,F))$$

2- بما أن $L(E,L_{n-1}(E,F))$ متشاكل تقابلي مع $L_n(E,F)$ فإننا نطابق $D^n f(a)$ بعنصر من و لهذا التفاضلية من الرتبة n لـ f عند a تطبيق n– خطي مستمر من E^n نحو F .

3- نقول إن f قابلة للمفاضلة n مرة على U اذا كان قابل للمفاضلة n مرة عند كل نقطة من U .

4- إذا كان التطبيق $D^n f:U\to L_n(E,F)$
$x\to D^n f(x)$

••••

مستمر على U ، نقول أن f من الصنف C^n على U ونكتب $f \in C^n(U)$.

5- إذا كان $f \in C^n(U)$ من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم ، نقول ان f قابل للمفاضلة بدون حد على U ونكتب $f \in C^\infty(U)$.

اصطلاحا : $C(U) = C^0(U)$

2.2.1 خواص :

1- مجموعة التطبيقات القابلة للمفاضلة n مرة فضاء إذا كان $f : U \to F$ و $g : U \to F$ تطبيقان قابلان للمفاضلة n مرة عند a فان :

* $f+g$ قال للمفاضلة n مرة عند a و :

$$D^n(f+g)(a) = D^n f(a) + D^n g(a)$$

*و من اجل كل عدد حقيقي λ ، التطبيق λf قابل للمفاضلة n مرة عند a و :

$$D^n(\lambda f)(a) = \lambda D^n f(a)$$

ملاحظة : الشيء نفسه بالنسبة لمجموعة التطبيقات من الصنف C^n على U .

2- التطبيق $f : U \to F$ قابل للمفاضلة n مرة $(n \geq 2)$ عند a إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

1) f قابل للمفاضلة $(n-1)$ مرة في جوار .

2) يوجد تطبيق n خطي مستمر $D^n f(a)$ يحقق :

$$D^{n-1} f(a+h) - D^{n-1} f(a) = D^n f(a)(h) + o(h)$$

3.1 المشتقات الجزئية من رتب عليا :

نفرض أن $E=\mathbb{R}^n$ و $F=\mathbb{R}$ وان التطبيق $f:U\to F$ يقبل عند كل نقطة x من U مشتقات جزئية (من الرتبة الأولى) بالنسبة للمركبة i أي $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ موجودة.

1.3.1 المشتقات الجزئية الثانية :

1- نقول أن f يقبل مشتقات جزئية ثانية (من الرتبة 2) بالنسبة للمركبتين j و i عند a إذا كان التطبيق الجزئي $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ يقبل مشتق جزئي بالنسبة للمركبة j .

نرمز للمشتقات الجزئية الثانية للدالة f بالنسبة للمركبتين j و i بالرمز $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

وعليه :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$$

ملاحظة :

إذا كان $i=j$ فإننا نكتب :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(a)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$$

2.3.1المشتقات الجزئية من رتب عليا :

المشتقات الجزئية من رتب اكبر من 2 معرفة بالتراجع بالطريقة نفسها التي عرفت المشتقات الجزئية الثانية .

••••

إذا كان $i_1,...,i_p$ أعداد محصورة بين 1 و n فان العدد الحقيقي

$\frac{\partial f^p}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}.....\partial x_{i_p}}(a)$ هو $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2}...\partial x_{i_p}}\right)(a)$ أي المشتق الجزئي عند a

بالنسبة للمركبة x_{i_1} للدالة $\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2}...\partial x_{i_p}}$.

3.3.1 الدوال من الصنف C^p :

إذا كانت $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ من الصنف C^p فان كل المشتقات الجزئية من الرتبة 1 إلى p موجودة و مستمرة .

مثال : لتكن $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالة معرفة بـ $f(x,y) = x \sin xy$ فانه من اجل كل $(x,y)\in \mathbb{R}^2$ لدينا :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin xy + xy\cos xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cos xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y\cos xy - xy^2\sin xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^3\sin xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 2x\cos xy - x^2 y\sin xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = 2\cos xy - x^2 y\sin xy$$

ملاحظة :

من المثال السابق لا يجب استنتاج المساواة $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ محققة دائما ، و هذا ما يوضحه المثال التالي :

المثال : بالنسبة للدالة : $f:R^2 \to R$ المعرفة بـ :

••••

$$\begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

فان $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0$

ملاحظة:

في حالة ما إذا كانت الدالتين مستمرتين $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ مستمرتين عند النقطة a فإنهما متساويتين عند هذه النقطة .

4.3.1 نظرية شفارتز [Schwartz]

إذا كانت $f:U\subset E\to F$ تطبيق قابل للمفاضلة n مرّة عند نقطة $a\in U$ فان $D^n f(a)$ تطبيق n خطى، مستمر و متناظر من E^n نحو F.

ملاحظة :

هذه النظرية تعمم النتيجة التالية :

إذا كان f تطبيق عددي لمتغيرين حقيقيين x و y و قابل للمفاضلة مرتين عند a

فان : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a)$

و بصفة عامة ، إذا كان f تطبيق ذو n متغير حقيقي و p مرّة قابل للمفاضلة عند a

فان : $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_p}}(a)=\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{\sigma(i_1)}\dots\partial x_{\sigma(i_p)}}(a)$

حيث σ عنصر كيفي من زمرة تباديل المجموعة $\{i_1\dots i_p\}$.

5.3.1 تفاضلية دالة ذات قيم في فضاء الجداء:

....

قضية :

لتكن $f : U \to F_1 \times \ldots \times F_m$ حيث $f = (f_1 \ldots f_m)$

أ)إذا كانت f_1 ،....، f_m قابلة للمفاضلة p مرة عند a من U فان f قابلة للمفاضلة p مرة عند a ولدينا من اجل كل $(u_1 \ldots u_p)$ من E^p :

$$D^p f(a)(u_1, \ldots, u_p) = \left(D^p f_1(a)(u_1, \ldots, u_p), \ldots, D^p f_m(a)(u_1, \ldots, u_p)\right)$$

ب) إذا كانت f_1 ،....، f_m من الصنف C^p على U فان f من الصنف C^p على U .

البرهان:

أ) بالتراجع على p : من اجل p=1 الخاصية صحيحة (النظرية 2.2.2 من الإرسال الأول) .

بفرض أن الخاصية صحيحة حتى الرتبة (p-1) لدينا في جوار a :

$$D^{p-1} f = (D^{p-1} f_1, \ldots, D^{p-1} f_m)$$

بما أن الدوال $D^{p-1} f_1$ ،....، $D^{p-1} f_m$ قابلة للمفاضلة عند a وباستعمال النظرية 2.2.2 من جديد نجد أن f قابلة للمفاضلة p مرة و:

$$D^p f(a) = \left(D^p f_1(a), \ldots, D^p f_m(a)\right)$$

ب) البرهان مماثل

6.3.1 نظرية التركيب :

ليكن E ، F ، G ف ش ن و U،V مفتوحين غير خاليين من E و F على الترتيب.

ليكن التطبيقين $f : U \to V$ و $g : V \to G$.

••••

(1) إذا كان f و g قابلين للمفاضلة n مرة عند $a \in U$ و $f(a) \in V$ على الترتيب فان التطبيق $g o f$ قابل للمفاضلة n مرة عند a .

(2) إذا كان $f \in C^n(V)$ و $g \in C^n(V)$ فان $h = g o f \in C^n(U)$

البرهان:

النظرية صحيحة من اجل $n=1$ (الفصل الثاني من الإرسال 01 النظرية 1.3.2)

$$Dh(x) = Dg(f(x)) o Df(x) \quad (*)$$

نبرهن (1) و (2) بالتراجع على n ، نفرض أنهما صحيحين من أجل $n-1$ (مع $n \geq 2$).

نثبت الخاصية (2) و البرهان نفسه بالنسبة للخاصية (1).

نريد إثبات أن $h \in C^n$ أو $Dh \in C^{n-1}$.

العلاقة (*) توضح أن Dh تركيب تطبيقين هما:

أ) التطبيق $x \mapsto (Dg(f(x), Df(x))$ وهو من U نحو $L(F,G) \times L(E,F)$

ب) التطبيق $(v,u) \mapsto v o u$ وهو من $L(F,G) \times L(E,F)$ نحو $L(E,G)$

التطبيق الثاني مستمر و ثنائي الخطية فهو إذن من الصنف C^∞

والتطبيق الأول، يأخذ قيمة في فضاء الجداء ومركبتيه هما

$x \mapsto Dg(f(x))$

و $x \mapsto Df(x)$

وحسب المعطيات، المركبة الثانية من الصنف C^{n-1} أما الأولى فهي

التركيب $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{Dg} L(F,G)$

....

f من الصنف C^{n-1} (أو بالأحرى C^{n})، Dg أيضا من الصنف C^{n-1}

ومنه حسب فرضية التراجع التركيب $(Dg)of$ من الصنف C^{n-1}، و عليه التطبيق(أ)

من الصنف C^{n-1} (لان مركبتيه من الصنف C^{n-1})

التطبيق (ب) ايضا من الصنف (C^{n-1}وهو C^{∞})

(نستعمل فرضية التراجع مرة ثانية).

تركيب التطبيقين (أ) و (ب) من الصنف C^{n-1} وهذا التركيب هو Dh

ومنه البرهان.

7.3.1 أمثلة :

1) كل تطبيق f ثابت من الصنف C^{∞} و $\forall p \in N^{*} : D^{p} f = 0$

2) إذا كان f تطبيق خطي مستمر من E نحو F فان f من الصنف C^{∞}

على E ولدينا $\quad \forall x \in E \qquad Df(x) = f$

$$D^{p} f(x) = 0 \qquad \forall x \in E, \forall p \geq 2$$

3) التطبيقات المتعددة الخطية :

كل تطبيق $n-$خطي و مستمر من الجداء $\overset{n}{\underset{i=1}{\pi}} E_i$ نحو F، من الصنف C^{∞} ومن اجل

كل $p \geq n$: $\qquad D^{p} f(x) = 0, \forall x \in \overset{n}{\underset{i=1}{\pi}} E_i$

4) ليكن E و F فضاءي بناخ، فان التطبيق $I : u \mapsto u^{-1}$ من $Isom(E,F)$

نحو $Isom(F,U)$ من الصنف C^{∞} ولدينا:

$$D^{p} I(u)(h_1, ..., h_p) = (-1)^{p} \sum_{\sigma \in S_p} u^{-1} o h_{\sigma(1)} o u^{-1} o .... o u^{-1} o h_{\sigma(p)} o u^{-1}$$

حيث S_p هي زمرة تبديلات الأعداد الطبيعية $\{1, ..., p\}$

••••

حالة $p=2$ ، نجد:

$$D^p I(u)(h_1,h_2)=u^{-1}oh_1ou^{-1}oh_2ou^{-1}+u^{-1}oh_2ou^{-1}oh_1ou^{-1}$$

4.1 الدوال المحدبة:

تطبيقا للتفاضلية الثانية، سنميز الآن تحدب الدوال القابلة للمفاضلة مرتين.

1.4.1 تعريف:

نقول أن $f:U\to R$ معرفة على مفتوح محدب U من ف.ش.ن ، محددبة إذا كان من اجل كل x و y من U ، ومن اجل كل t من $[0,1]$

$$f(ty+(1-t)x)\le tf(y)+(1-t)f(x)$$

2.4.1 نظرية :

لتكن $f:U\to R$ معرفة من U مفتوح محدب من ف ش E.

نفرض أن f قابلة للمفاضلة مرتين على U إذن f محدبة إذا وفقط إذا كانت من اجل كل x من U و u من E

$$D^2 f(x)(u,u)\ge 0$$

البرهان: نفرض أن f محدبة وليكن $x,y\in U$ و $t\in]0,1]$ لدينا

$$f(x+t(y-x))\le tf(y)+(1-t)f(x)$$

ومنه :

$$\frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t}\le f(y)-f(x)$$

وهذا ما يعطي عندما يؤول t الى0

$$Df(x)(y-x)\le f(y)-f(x)$$

وعليه

$$Df(y)(x-y)\le f(x)-f(y)$$

ومنه بالجمع:

••••

$$(Df(y)-Df(x))(y-x)\geq 0 \qquad \forall x,y\in U$$

نضع من اجل $x\in U$ و $u\in E$ الدالة $\varphi(t)=Df(x+tu)(u)$ معرفة من اجل كل t في جوار 0

من اجل $0\leq t$ لدينا

$$(Df(x+tu)-Df(x))(tu)\geq 0$$

ومنه : $\varphi(t)\geq\varphi(0)$. نستنتج إذن، أن $\varphi(0)\geq 0$. وعليه: $D^2f(x)(u,u)\geq 0$

وبالعكس، نفرض أن: $D^2f(x)(u,u)\geq 0 \quad \forall x\in U,\forall u\in E$.

من اجل كل x,y من U و t من $[0,1]$ نضع:

$$\psi(t)=f(x+t(y-x)-Df(x)(x+t(y-x)$$

لدينا إذن:

$$\psi'(t)=(Df(x+t(y-x))-Df(x))(y-x)$$

و $$\psi''(t)=D^2f(x+t(y-x))(y-x,y-x)\geq 0$$

وعليه نجد: $\psi'(t)\geq\psi'(0)=0$

ومنه: $\psi(1)\geq\psi(0)$ ، وبالتالي نجد من اجل كل x,y من U

$$f(y)-f(x)\geq Df(x)(y-x)$$

نضع : $x_t=x+t(y-x)$ ، $t\in[0,1]$ ، نجد:

$$f(y)\geq f(x_t)+(1-t)Df(x_t)(y-x)$$

و $$f(x)\geq f(x_t)+tDf(x_t)(y-x)$$

بضرب المتباينة الأولى في t والثانية في $(1-t)$ وبالجمع نجد:

$$tf(y)+(1-t)f(x)\geq f(x_t)$$

إذن f محدبة.

••••

5.1 تمارين:

تمرين1.5.1

لتكن $f : R^2 \to R$ و $g : R^3 \to R$ دالتين معرفتين بـ :

$$f(x,y) = x^2y^3 - 2x^4 + y^2$$

$$g(x,y,z) = xy^2z^3$$

احسب المشتقات الجزئية الثانية لكل من f و g

تمرين 2.5.1

ليكن E فضاء بناخ و B كرة الوحدة المفتوحة من $L(E)$

بين أن التطبيق

$$f : B \to Isom(E)$$
$$u \mapsto (Id_E - u)^{-1}$$

من الصنف C^∞ على B واحسب Df.

تمرين 3.5.1

باستعمال مشتقة التركيب احسب $\frac{dw}{dt}$ حيث

$$\begin{cases} w = \sqrt{x} + \dfrac{y^2}{z} \\ x = e^{2t} \\ y = t^3 + 4t \\ z = t^2 - 4 \end{cases}$$

6.1 حل التمارين

حل التمرين 1.5.1

بعد حساب المشتقات الجزئية الأولى للدالتين f و g يمكن للطالب أن يحسب المشتقات الجزئية الثانية ويتأكد أن :

بالنسبة للدالة f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 - 24x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2 y + 2$$

أما بالنسبة للدالة g :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,z) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y^2}(x,y,z) = 2xz^3$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x,y,z) = 6xy^2 z$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y,z) = 2yz^3$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial z \partial x}(x,y,z) = 3y^2 z^2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}(x,y,z) = 6xyz^2$$

حل التمرين 2.5.1 :

إذا كان $u \in B$ ، $\|u\| < 1$ و $Id_E - u$ قابل للعكس ، فان f معرفة جيدا على B .

نستطيع تحليل f على الشكل التالي:

••••

$$f : B \to Isom(E) \to Isom(E)$$

$$u \xrightarrow{l} Id_E - u \xrightarrow{g} (Id_E - u)^{-1}$$

l من الصنف C^{∞} على B (لأنها تقليص تطبيق تآلفي) و

$$Dl(u)h = -h \qquad \forall u \in B, \forall h \in L(E)$$

أو نستطيع الكتابي كالآتي : $Dl(u) = -Id_E$

نعلم أيضا أن g من الصنف C^{∞} على $Isom(E)$ و :

$$Dg(v)h = -v^{-1}ohov^{-1} \qquad \forall v \in Isom(E) \quad \forall h \in L(E)$$

وعليه $f = gol$ من الصنف C^{∞} على B و

$$Df(u)h = Dg(l(u))(Dl(u)h) = (Id_E - u)^{-1} oho (Id_E - u)^{-1}$$

أي

$$Df(u)h = (Id_E - u)^{-1} oho (Id_E - u)^{-1} \qquad \forall u \in B, \forall h \in L(E)$$

ومن اجل $E = R$ ،نجد القانون المعروف :

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \forall x \neq 1$$

حل التمرين 3.5.1

يمكن للطالب التأكد أن :

$$\frac{dw}{dt} = e^t + 2\left(\frac{y}{z}\right)(3t^2 + 4) - 2t\left(\frac{y^2}{z^2}\right)$$

• • • •

2. نظريات تايلور و القيم الحدية

1.2 نظريات تايلور:

نبدأ بالبرهان على النتيجة التالية.

1.1.2 قضية: ليكن I مجال مفتوح ، G،F،E فضاءات شعاعية نظيمية

، $f:I\to E$ و $g:I\to F$ دالتين قابلتين للاشتقاق $(p+1)$ مرة .

وليكن $[.,.]:E\times F\longrightarrow F$ تطبيق ثنائي الخطية و مستمر.

لدينا اذن :

$$\left[f,g^{(p+1)}\right]-(-1)^{(p+1)}\left[f^{(p+1)},g\right]=\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i}\left[f^{(i)},g^{(p-i)}\right]\right)'$$

البرهان: بالتراجع على p .

من اجل $p=0$ ، القاعدة تصبح :

$$[f,g']+[f',g]=([f,g])'$$

هي نتيجة القاعدة التي تعطى تفاضلية تطبيق ثنائي الخطية ومشتقة التركيب.

نفرض أن القاعدة صحيحة حتى الرتبة p-1 .لدينا:

$$\left(\sum_{i=0}^{p}\ (-1)^{i}\left[f^{(i)},g^{(p-1)}\right]\right)'=\left(\sum_{p=0}^{p-1}(-1)^{i}\left[f^{(i)},h^{(p-1-i)}\right]+(-1)^{(p)}\left[f^{p},g\right]\right)'$$

مع $h=g'$.و بتطبيق فرضية التراجع ، نجد

$$\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i}\left[f^{(i)},g^{(p-i)}\right]\right)'=\left[f,h^{(p)}\right]-(-1)^{p}\left[f^{(p)},h\right]+(-1)^{p}\left[f^{(p+1)},g\right]+(-1)^{p}\left[f^{(p)},h\right]$$

ومنه: $\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i}\left[f^{(i)},g^{(p-i)}\right]\right)'=\left[f,g^{(p+1)}\right]-(-1)^{p+1}\left[f^{(p+1)},g\right]$

....

نستنتج نظريات تايلور التالية.

2.1.2 قاعدة تايلور مع باقي التكامل:

ليكن I مجال مفتوح من R ، f تطبيق من I نحو E (E فضاء بناخ) .

بفرض أن f من الصنف C^{p+1} على I .

فان من اجل كل a و t من I لدينا :

$$f(t)=\sum_{i=0}^{p}\frac{(t-a)^i}{i!}f^{(i)}(a)+\int_a^t\frac{(t-s)^p}{p!}f^{(p+1)}(s)ds$$

3.1.2 قاعدة تايلور لاغرونج Taylor-Lagrange :

إذا فرضنا فقط أن f ، $(p+1)$ قابلة للاشتقاق على I وان :

$$\sup_{s\in I}\left\|f^{(p+1)}(s)\right\|\le M<\infty$$

فان: $$\left\|f(t)-\sum_{i=0}^{p}\frac{(t-a)^i}{i!}f^{(i)}(a)\right\|\le\frac{|t-a|^{p+1}}{(p+1)!}M$$

البرهان:

أ) نطبق القضية 2.1.1 مع $g(s)=\frac{(t-s)^p}{p!}$ ، $F=R$ ، $G=E$ و $[x,t]=tx$

نلاحظ أن:

$$g^{(i)}(s)=(-1)^i\frac{(t-s)^{p-i}}{(p-i)!}\quad 0\le i\le p$$
$$g^{(p+1)}(s)\equiv 0$$

....

و عليه:

$$(-1)^i\left[f^{(i)},g^{(p-i)}\right]=(-1)^i(-1)^{p-i}\frac{(t-s)^i}{i!}f^{(i)}(s)=(-1)^p\frac{(t-s)^i}{i!}f^{(i)}(s)$$

ومنه بتطبيق القضية 2.1.1 نجد:

$$-(-1)^{p+1}\frac{(t-s)^p}{p!}f^{(p+1)}(s)=\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^p\frac{(t-s)^i}{i!}f^{(i)}(s)\right)'$$

إذن:

$$\frac{(t-s)^p}{p!}f^{(p+1)}(s)=\left(\sum_{i=0}^{p}\frac{(t-s)^i}{i!}f^{(i)}(s)\right)' \qquad (*)$$

بالمكاملة بين a و t نجد :

$$\int_a^t\frac{(t-s)^p}{p!}f^{(p+1)}(s)ds=f(t)-\sum_{i=0}^{p}\frac{(t-a)^i}{i!}f^{(i)}(a)$$

ومنه النتيجة.

ب) نضع $\psi(s)=\sum_{i=0}^{p}\frac{(t-s)^i}{i!}f^{(i)}(s)$ ومن (*) لدينا :

$$\psi'(s)=\frac{(t-s)^p}{p!}f^{(p+1)}(s)$$

نفرض أن $t\geq a$ و[حالة $(t\leq a)$ تدرس بالطريقة نفسها]

من اجل كل $s\in I$ لدينا: $\|\psi'(s)\|\leq M\frac{|t-s|^p}{p!}$

ومن هنا نستنتج انه من اجل $s\in[a,t]$

••••

$$\left\|\psi'(s)\right\| \le M\frac{(t-s)^p}{p!} = g'(s)$$

مع $g(s) = -M\dfrac{(t-s)^{p+1}}{(p+1)!}$

نطبق إذن نظرية التزايدات المنتهية ونجد

$$\left\|\psi(t)-\psi(a)\right\| \le g(t)-g(a)$$

ومنه النتيجة لان $\psi(t) = f(t)$ و $\psi(a) = \sum_{i=0}^{p}\dfrac{(t-s)^i}{i!}f^{(i)}(a)$

في حالة تطبيقات بين فضاءات نظيمية ، لدينا النظريات التالية :

4.1.2 نظرية تايلور مع باقي التكامل :

ليكن $f: U \to F$ تطبيق من الصنف $C^{(p+1)}$ على U مفتوح من E ف.ش.ن نحو F فضاء بناخ.

فانه من اجل كل $x \in U$ و $h \in E$ القطعة $[x,x+h]$ محتواة في U

و $f(x+h) = \sum_{i=0}^{p}\dfrac{1}{i!}D^i f(x)h^i + \int_0^1 \dfrac{(1-s)^p}{p!}D^{p+1}f(x+sh)h^{p+1}ds$

حيث: $h^i = (h,\dots,h) \in E^i$

البرهان :

نلاحظ انه يوجد $\eta > 0$ حيث: $x+sh \in U$ من اجل كل $s \in \left]-\eta,1+\eta\right[$.

نضع $g(s)=f(x+sh)$ ، إذن g هي من الصنف C^{p+1} على $\left]-\eta,1+\eta\right[$ ولدينا:

$$g^{(i)}(s) = D^i f(x+sh)h^i$$

نستعمل إذن النظرية 2.1.2 مع $a=0$ و $t=1$ ونجد النتيجة .

••••

5.1.2 نظرية تايلور لاغرونج:

لتكن $f:U\to F$ تطبيق قابل للمفاضلة $(p+1)$ مرة على مفتوح U من E نحو F

نفرض انه يوجد $M\geq 0$ حيث : $\left\|D^{p+1}f(z)\right\|\leq M$ من اجل كل $z\in U$.

فانه من اجل كل $x\in U$ و $h\in E$ بحيث القطعة $[x,x+h]$ محتواة في U لدينا :

$$\left\|f(x+h)-\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i!}D^{i}f(x)h^{i}\right\|\leq M\frac{\|h\|^{p+1}}{(p+1)!}$$

البرهان : نضع $g(t)=f(x+th)$ ، لدينا $g^{(i)}(t)=D^{i}f(x+th)h^{i}$ من اجل $1\leq i\leq p+1$ ومنه:

$$\sup_{t\in[0,1]}\left\|g^{(p+1)}(t)\right\|\leq M\|h\|^{p+1}$$

نطبق إذن النظرية 3.1.2 فنجد :

$$\left\|g(1)-\sum_{i=0}^{p}\frac{g^{(i)}(0)}{i!}\right\|\leq\frac{M\|h\|^{p+1}}{(p+1)!}$$

أي: $$\left\|f(x+h)-\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i!}D^{i}f(x)h^{i}\right\|\leq M\frac{\|h\|^{p+1}}{(p+1)!}$$

ومنه البرهان

بإمكاننا الحصول على نظريات تايلور تحت فرضيات اضعف.

6.1.2 نظرية تايلور يونغ (Taylor-Young)

ليكن التطبيق $f:U\to F$ معرف على مفتوح U من E ف.ش.ن نحو F ف.ش.ن

، وقابل للمفاضلة p مرة عند $a\in U$ ، إذن:

$$f(a+h)=\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i!}D^{i}f(a)h^{i}+\|h\|^{p}\varepsilon(h) \quad \text{مع} \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

••••

البرهان : نستعمل البرهان بالتراجع:

حالة $p=1$ هي بالضبط تعريف قابلية المفاضلة.

نفرض الخاصية صحيحة حتى الرتبة $p-1$.

نضع إذن: $g(z) = f(a+z) - \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} D^i f(a) z^i$

ثم نضع : $\varphi_i(z) = \frac{1}{i!} D^i f(a) z^i = \frac{1}{i!} (D^i f(a) oL)(z)$

مع $L(z) = (z, \dots z) \in E^i$

باستعمال حساب تفاضلية تطبيق مستمر و متعدد الخطية (الإرسال الأول)، نجد من أجل كل $u \in E$:

$$D\varphi_i(z)(u) = \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{i!} (D^i f(a))(z, \dots, u, \dots, z) = \frac{1}{(i-1)!} D^i f(a)(z^{i-1}, u)$$

لأن $D^i f(a)$ متناظر. لدينا إذن :

$$D^{i-1}(Df)(a)(z^{i-1}))(u) = D^i f(a)(z^{i-1}, u)$$

و منه : $D\varphi_i(z) = D^{i-1}(Df)(a)(z^{i-1}))(u)$

و منه ينتج أن :

$$Dg(z) = Df(a+z) - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} D^j (Df)(a)(z^j)$$

باستعمال فرضية التراجع على Df، من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، يوجد $\eta > 0$ حيث $\|z\| \le \eta$ يستلزم $\|Dg(z)\| \le \varepsilon \|z\|^{p-1}$

ليكن $\|h\| \le \eta$ و ليكن $\theta(t) = g(th)$ من أجل كل $t \in [0,1]$

لدينا إذن $\theta'(t) = Dg(th)h$ و منه

$$\|\theta'(t)\| \le \varepsilon \|h\|^{p-1} \|h\| = \varepsilon \|h\|^p$$

لدينا إذن حسب نظرية التزايدات المنتهية

$$\|g(h)\| = \|g(h) - g(0)\| = \|\theta(1) - \theta(0)\| \le \varepsilon \|h\|^p$$

••••

و منه البرهان .

ملاحظة:

1) في حالة دالة $f:U\to \mathbb{R}$ معرفة على U مفتوح من $\mathbb{R}^n$ و قابلة للمفاضلة مرتين عند a فان :

$$f(a)+Df(a)u+\frac{1}{2}D^2f(a)(u,u)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)u_i+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)(u_i)^2+2\sum_{1\le i\le j\le n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)u_iu_j\right)$$

2) إذا كانت f قابلة للمفاضلة ثلاث مرات عند a فنستطيع حساب $D^3f(a)(u,u,u)$ بالطريقة التالية :

نضع $$g(x)=D^2f(x)(u,u)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)u_iu_j$$

و لدينا : $D^3f(a)(u,u,u)=Dg(a)u$ أي :

$$D^3f(a)(u,u,u)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}(a)u_iu_ju_k$$

والتي تكتب على الشكل التالي:

$$D^3f(a)(u,u,u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_h^3}(a)u_i^3+3\sum_{1\le i<j\le n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2\partial x_j}(a)u_i^2u_j+$$

$$+6\sum_{1\le i<j<k\le n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}(a)u_iu_ju_k$$

••••

2.2 القيم الحدية :

1.2.2 تعاريف :

لتكن $f : U \to R$ دالة معرفة على U مفتوح من فضاء توبولوجى E.

(1) نقول أن f تقبل قيمة حدية محلية صغرى (كبرى) عند a من U إذا وجد جوار V لـ a حيث من أجل كل x من V : $f(x) \geq f(a)$ $\left(f(x) \leq f(a)\right)$

(2) إذا كان $f(x) > f(a)$ $\left(f(x) < f(a)\right)$ من أجل كل x من $V - \{a\}$ فان القيمة الحدية تامة .

(3) نقول أن القيمة الحدية شاملة إذا كانت المتباينة صحيحة من أجل كل قيم x من U.

2.2.2 نظرية :

أ) إذا كانت f تقبل قيمة حدية محلية عند a من U و كانت قابلة للمفاضلة عند a فان : $Df(a) = 0$

و إذا كانت f قابلة للمفاضلة مرتين عند a فانه من أجل كل h من E ، $D^2 f(a)(h,h)$ لها إشارة ثابتة (موجبة إذا كانت القيمة الحدية صغرى ،وسالبة إذا كانت القيمة الحدية كبرى)

ب) نفرض أن f قابلة للمفاضلة مرتين عند a من U، و أنه يوجد $\alpha > 0$ حيث :

$$D^2 f(a)(h,h) \geq \alpha \|h\|^2 \qquad \forall h \in E$$

و

$$Df(a) = 0$$

إذن f تقبل قيمة حدية محلية صغرى تامة عند a.

البرهان :

أ)نفرض أن f تقبل قيمة حدية محلية صغرى عند a.

••••

ليكن $h \in E$ ، من أجل كل $t \in R_+$ صغير كفاية ، فلدينا إذن :

$$f(a+th)-f(a) \geq 0$$

بالقسمة على t وبجعل t يؤول إلى 0 نجد : $Df(a) \geq 0$. بتبديل h بـ $-h$ ، نتحصل على $Df(a) \leq 0$ و منه : $Df(a)=0$

إذا كانت f قابلة للمفاضلة مرتين عند a ،فان :

$$\frac{t^2}{2} D^2 f(a)(h,h) + t^2 \varepsilon(t) = f(a+th)-f(a) \geq 0$$

بالقسمة على t^2 وبجعل t يؤول إلى 0 ، نجد:

$$D^2 f(a)(h,h) \geq 0$$

ب) حسب نظرية تايلور لدينا :

$$f(a+th)-f(a) = \frac{1}{2} D^2 f(a)(h,h) + \|h\| \varepsilon(h) \geq \frac{1}{2} \|h\|^2 (\alpha + \varepsilon(h))$$

مع : $$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

يوجد اذن $\eta > 0$ حيث $\|\varepsilon(h)\| \leq \alpha/4$ من أجل كل $\|h\| \leq \eta$

نحصل إذن من أجل $\|h\| \leq \eta$ على : $f(a+th)-f(a) \geq \frac{\alpha}{4} \|h\|^2$ ومنه البرهان .

ملاحظة :

بالنسبة لدالة محدبة $f : U \to R$ معرفة على مفتوح محدب ، لدينا شرط لازم و كافي لوجود القيمة الحدية الصغرى .

3.2.2 نظرية :

لتكن $f: U \to R$ دالة محدبة معرفة على مفتوح محدب من ف.ش.ن، إذن،إذا كانت f قابلة للمفاضلة عند a،الخاصيتين التاليتين متكافئتين .

(أ) $f(a) = \min_{x \in U} f(x)$

(ب) $Df(a) = 0$

البرهان :

يكفى إثبات أن : (ب) $\Leftarrow$ (أ)

من أجل كل $x \in U$ و كل $t \in]0,1]$ ، لدينا :

$$f(a + t(x-a)) \leq tf(x) + (1-t)f(a)$$

إذن : $\frac{f(a+t(x-a)) - f(a)}{t} \leq f(x) - f(a)$ و بجعل t يؤول إلى 0 ، نجد :

$\forall x \in U: \quad 0 = Df(a)(x-a) \leq f(x) - f(a)$ و منه المطلوب .

3.2 القيم الحدية لدوال ذات متغيرين :

1.3.2 شرط لازم لوجود قيم حدية محلية عندما تكون الدالة من الصنف C^1 :

نظرية :

لتكن f من الصنف C^1 على D مجال من R^2 ، نفرض أن D يحتوى على كرة مفتوحة ذات المركز $M_0 = (x_0, y_0)$.

إذا كانت لـ f قيمة حدية محلية عند M_0 فانه لدينا :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

••••

2.3.2 تعريف :

النقطة $M_0=(x_0,y_0)$ حيث $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$ تسمى نقطة حرجة للدالة f .

برهان النظرية:

نفرض أن f تقبل نقطة حدية محلية صغرى عند $M_0=(x_0,y_0)$ و نضع $B(M_0,\rho)$ الكرة ذات المركز M_0 ، نصف القطر ρ و محتواة في D حيث :

$$\forall(x,y)\in B(M_0,\rho) \qquad f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$$

لتكن $f_1\mapsto f(x,y_0)$ ، f_1 دالة ذات متغير واحد معرفة على المجال $]x_0-\rho,x_0+\rho[$ وتحقق :

$$\forall x\in\,]x_0-\rho,x_0+\rho[\qquad f_1(x)\geq f_1(x_0)$$

إذن $f_1'(x_0)=0$ أي $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$

بالمثل الدالة $f_2\mapsto f(x_0,y)$ معرفة على $]y_0-\rho,y_0+\rho[$ تقبل قيمة حدية محلية صغرى عند y_0 ومنه $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_2'(y_0)=0$.

البرهان نفسه إذا فرضنا أن f لها قيمة حدية عظمى .

2.3.2 شرط كافي لوجود قيم حدية محلية لدالة من الصنف C^2 :

لتكن f دالة من الصنف C^2 على مفتوح D. بما أن f من الصنف C^1 و حسب الفقرة 1.3.2 فإننا نبحث القيم الحدية المحلية عند النقط الحرجة لـ f .

لتكن إذن النقطة $M_0=(x_0,y_0)$ حيث : $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$

....

النشر المحدود من الرتبة 2 للدالة f عند M_0 يكتب إذن :

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)+hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$$

$$+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)+\left[\max(|h|,|k|)\right]^2\varepsilon(h,k)$$

مع $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$

نتبنى الآن رموز مونج (Notation de Monge) و نضع :

$$r_0=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \text{ ، } s_0=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) \text{ ، } t_0=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

النشر السابق يكتب :

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+r_0\frac{h^2}{2}+s_0hk+t_0\frac{k^2}{2}+\left[\max(|h|,|k|)\right]^2\varepsilon(h,k)$$

نعتبر أولا النقط (h,k) التي من أجلها $|k|=\max(|h|,|k|)$ الجزء التربيعى (من الدرجة2) للنشر يكتب $\frac{k^2}{2}\left[r_0\left(\frac{h}{k}\right)^2+2s_0\left(\frac{h}{k}\right)+t_0\right]$

نضع إذن $u=\frac{h}{k}$ ، النشر السابق يكتب :

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{k^2}{2}\left[r_0u^2+2s_0u+t_0\right]+k^2\varepsilon(h,k)$$

نفرض أن $r_0\neq 0$ و نكتب $r_0u^2+2s_0u+t_0$ على الشكل النموذجي :

$$r_0u^2+2s_0u+t_0=r_0\left[\left(u+\frac{s_0}{r_0}\right)^2+\frac{r_0t_0-s_0^2}{r_0{}^2}\right]$$

••••

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{k^2}{2}r_0\left[\left(u+\frac{s_0}{r_0}\right)^2+\frac{r_0t_0-s_0^2}{r_0{}^2}\right]+k^2\varepsilon(h,k)$$

نعتبر الآن حالة النقط (h,k) التي من أجلها $|h|=\max(|h|,|k|)$.

بفرض $t_0\neq 0$ و بوضع $v=\dfrac{k}{h}$ نجد :

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{h^2}{2}t_0\left[\left(v+\frac{s_0}{t_0}\right)^2+\frac{r_0t_0-s_0^2}{t_0{}^2}\right]+h^2\varepsilon(h,k)$$

<u>الحالة الأولى</u> : $r_0t_0-s_0^2>0$

r_0 و t_0 لهما نفس الإشارة لأن $r_0t_0>s_0^2\geq 0$.

(أ) نفرض أن $r_0>0$ و $t_0>0$، ثلاثيي الحدود : $\left(u+\dfrac{s_0}{r_0}\right)^2+\dfrac{r_0t_0-s_0^2}{r_0{}^2}$

و $\left(v+\dfrac{s_0}{t_0}\right)^2+\dfrac{r_0t_0-s_0^2}{t_0{}^2}$ لهما قيم صغرى $\dfrac{r_0t_0-s_0^2}{r_0{}^2}$ و $\dfrac{r_0t_0-s_0^2}{t_0{}^2}$ و منه

نجد: $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\geq\dfrac{k^2}{2}\left[r_0\left[\dfrac{r_0t_0-s_0^2}{r_0{}^2}\right]+2\varepsilon(h,k)\right]$

أو $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\geq\dfrac{h^2}{2}\left[t_0\left[\dfrac{r_0t_0-s_0^2}{t_0{}^2}\right]+2\varepsilon(h,k)\right]$

و هذا حسب الحالة .

••••

و عندما يكون (h,k) قريب كفاية من $(0,0)$ ،العامل $r_0\left[\frac{r_0t_0-s_0^2}{r_0{}^2}\right]+2\varepsilon(h,k)$ من

إشارة نهايته $r_0\left[\frac{r_0t_0-s_0^2}{r_0{}^2}\right]>0$

بالمثل العامل $t_0\left[\frac{r_0t_0-s_0^2}{t_0{}^2}\right]+2\varepsilon(h,k)$ له إشارة النهاية $t_0\left[\frac{r_0t_0-s_0^2}{t_0{}^2}\right]$ و نستنتج

إذن أن $f(x_0+h,y_0+k)>f(x_0,y_0)$ عندما (h,k) يقترب من $(0,0)$.

f تقبل اذن قيمة محلية صغرى (تامة) عند $M_0=(x_0,y_0)$

(ب) نفرض أن $r_0<0$ و $t_0<0$، بالطريقة السابقة نفسها نستنتج أنه من أجل (h,k) قريب من $(0,0)$ ، $f(x_0+h,y_0+k)>f(x_0,y_0)$ و عليه f تقبل قيمة محلية عظمى (تامة) عند $M_0=(x_0,y_0)$.

<u>الحالة الثانية</u> : $r_0t_0-s_0^2<0$

ثلاثيي الحدود : $\frac{r_0t_0-s_0^2}{r_0{}^2}+\left(u+\frac{s_0}{r_0}\right)^2$ و $\frac{r_0t_0-s_0^2}{t_0{}^2}+\left(v+\frac{s_0}{t_0}\right)^2$ يقبلان جذرين حقيقيين مختلفين u_1 ، u_2 بالنسبة للأول مع $u_1<u_2$ و v_1، v_2 بالنسبة للثاني مع $v_1<v_2$

- نثبت عدد حقيقي $u'\in\,]u_1,u_2[$ و نجعل (h,k) يؤول إلى $(0,0)$ بحيث $h=u'k$.

العبارة $\frac{r_0t_0-s_0^2}{r_0{}^2}+\left(u'+\frac{s_0}{r_0}\right)^2+\varepsilon(h,k)$ التي تؤول إلى $\frac{r_0t_0-s_0^2}{r_0{}^2}+\left(u'+\frac{s_0}{r_0}\right)^2$ تصبح من إشارة نهايتها أي (أصغر من صفر) (الثلاثي لديه إشارة معاكسة لإشارة معامل u^2)

• • • •

- نثبت فيما بعد $u'' > u_2$

الآن من أجل (h,k) يؤول إلى $(0,0)$ العبارة $\left(u''+\frac{s_0}{r_0}\right)^2+\frac{r_0t_0-s_0^2}{r_0{}^2}+\varepsilon(h,k)$

تصبح من إشارة نهايتها $\left(u''+\frac{s_0}{r_0}\right)^2+\frac{r_0t_0-s_0^2}{r_0{}^2}$ أي$(0<)$ (الثلاثي لديه

عند$]u_2,+\infty[\ni u''$ إشارة معامل u^2)

نستنتج أنه في كل كرة مفتوحة $B(M_0,\rho)$ يوجد نقط (x_0+h,y_0+k) من

أجلها$f(x_0+h,y_0+k)<f(x_0,y_0)$ و نقط (x_0+h,y_0+k) من أجلها

$f(x_0+h,y_0+k)>f(x_0,y_0)$.

f لا تقبل إذن قيم حدية .

الحسابات السابقة صحيحة إذا كان r_0 و t_0 غير معدومين معا .

إذا كان $r_0=t_0=0$ ، فان :

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=2hks_0+[\max(|h|+|k|)]^2\varepsilon(h,k)$$

نكتب: $2hks_0=\frac{s_0}{2}\left[(h+k)^2-(h-k)^2\right]$ ونعتبر نقطة (h,k) حيث :

$$|k|=\max(|h|+|k|)$$

نجد :

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{s_0}{2}\left[(h+k)^2-(h-k)^2\right]+k^2\varepsilon(h,k)$$

$$=k^2\left[\frac{s_0}{2}\left[(u+1)^2-(u-1)^2\right]+\varepsilon(h,k)\right]$$

••••

نثبت $u=1$

من أجل (h,k) قريب من $(0,0)$، العبارة $\frac{s_0}{2}\left[(u+1)^2-(u-1)^2\right]+\varepsilon(h,k)$ لها إشارة

نهايتها $\frac{s_0}{2}2^2=2s_0$

نثبت $u=-1$

من أجل (h,k) قريب من $(0,0)$، العبارة $\frac{s_0}{2}\left[(u+1)^2-(u-1)^2\right]+\varepsilon(h,k)$ لها إشارة

نهايتها $-\frac{s_0}{2}2^2=-2s_0$

الفرق $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ متغير الإشارة على كل الكرة المفتوحة ذات المركز $M_0=(x_0,y_0)$.

f لا تقبل إذن قيم حدية محلية عند $M_0=(x_0,y_0)$.

<u>الحالة الثالثة</u> : $r_0t_0-s_0^2=0$

النشر المحدود السابق لا يسمح بالاستنتاج كما يوضحه المثالان المواليين :

<u>مثال</u> 1 :

لتكن $f:(x,y)\mapsto x^4$

يمكن للقارئ التحقق من أن $O=(0,0)$ نقطة حرجة و أن :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0$$ أي $r_0=s_0=t_0=0$

من جهة أخرى ، $f(h,k)=h^4\geq 0=f(0,0)$ ، و f تقبل قيمة حدية صغرى عند O

••••

لتكن $f:(x,y)\mapsto x^3$

الحسابات مطابقة : O أيضا نقطة حرجة لـ f ، $r_0=s_0=t_0=0$ لكن هذه المرّة ،

نلاحظ أن : $f(x,0)=x^3>0=f(0,0)$ إذا كان $x>0$ و

$f(x,0)=x^3<0=f(0,0)$ إذا كان $x<0$

f لا تقبل قيمة حدية عند O.

ملاحظة: الدالتان الموجودتان في المثالين السابقين تحققان $r_0t_0-s_0^2=0$ لكن واحدة تقبل قيمة حدية عند O و الأخرى لا.

نلخص هذه الدراسة في النظرية التالية :

نظرية 2.3.2 :

لتكن f ،دالة من الصنف C^2 على مجال D من R^2.

لتكن $M_0=(x_0,y_0)$ ،نقطة حرجة للدالة f .

نضع : $t_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$ ، $s_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$ ، $r_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$

الحالة الأولى : إذا كان $r_0t_0-s_0^2>0$ فان f تقبل قيمة حدية محلية تامة عند $M_0=(x_0,y_0)$

*إذا كان $r_0>0$ و $t_0>0$ لدينا قيمة محلية صغرى تامة.

* إذا كان $r_0<0$ و $t_0<0$ لدينا قيمة محلية كبرى تامة .

الحالة الثانية : إذا كان $r_0t_0-s_0^2<0$ فان f لا تقبل قيمة حدية محلية عند $M_0=(x_0,y_0)$

الحالة الثالثة : إذا كان $r_0t_0-s_0^2=0$ فإننا لا نستطيع الاستنتاج .

••••

4.2 تمارين :

التمرين 1.4.2

عين القيم الحدية المحلية ان وجدت للدالتين التاليتين :

1) $f : R^2 \to R$

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - xy$$

2) $g : R^2 \to R$

$$(x, y) \mapsto x^3 + y^3 + 3xy$$

التمرين 2.4.2

ليكن $f : R^2 \to R$ المعرفة بـ : $f(x, y) = xe^{-y} + ye^{-x}$

1) بين أن نقطة حرجة $M_0 = (x_0, y_0)$ للدالة f تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} e^{-y_0} - y_0 e^{-x_0} = 0 \\ -x_0 e^{-y_0} + e^{-x_0} = 0 \end{cases}$$

2) استنتج أن x_0 حلا للمعادلة : $-x_0 e^{-1/x_0} + e^{-x_0} = 0$

3) بدراسة تغيرات الدالة $\varphi : x \mapsto -xe^{-1/x} + e^{-x}$ بين أنه ضروريا $x_0 = 1$ ثم $y_0 = 1$

4) بحساب المشتقات الجزئية الثانية :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$ هل f لها قيمة حدية محلية عند $M_0 = (1,1)$ ؟

••••

3.2 حل التمارين :

<u>حل التمرين 1.4.2</u>

1) نحسب المشتقات الجزئية الأولى لتعيين النقط الحرجة

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y-x$$

النقط الحرجة تحقق اذن الجملة التالية : $\begin{cases}2x-y=0\\2y-x=0\end{cases}$

و منه $x=y=0$

ثم نحسب المشتقات الجزئية الثانية، نجد:

$r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2$ ، $s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-1$ و $t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2$

و منه : $rt-s^2=3>0$

f تقبل إذن نقطة حدية محلية في $O=(0,0)$ ، و بما أن $r>0$ و $t>0$ فهي نقطة حدية محلية صغرى و عليه نستطيع القول أنه يوجد كرة مفتوحة $B(O,\rho)$ ذات المركز O، حيث :

$$\forall(x,y)\in B(O,\rho):\qquad f(x,y)\geq f(0,0)=0$$

2) $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=3x^2+3y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=3y^2+3x$$

النقط الحرجة تحقق إذن الجملة التالية : $\begin{cases}x^2+y=0\\y^2+x=0\end{cases}$

• • • •

من المعادلة الأولى نستنتج $y=-x^2$ نعوضها في الثانية، نجد $x^4+x=0$ و منه $x(x^3+1)=0$ و عليه $x=0$ أو $x=-1$ و القيم المقابلة لـ y هي على الترتيب $y=0$ أو $y=-1$

ثم نحسب المشتقات الجزئية الثانية، نجد:

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x \quad ، \quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=3 \quad و \quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6y$$

و منه : $\quad rt-s^2=36xy-9$

<u>الحالة1</u> $(x,y)=(0,0)$

$$rt-s^2=-9<0$$

g لا تقبل إذن نقطة حدية محلية في $O=(0,0)$

<u>الحالة2</u> $(x,y)=(-1,-1)$

$$rt-s^2=27>0$$

g تقبل إذن نقطة حدية محلية في $M_0=(-1,-1)$ و بما أن $r=-6<0$ و $t=-6<0$ فهي نقطة حدية محلية عظمى.

<u>حل التمرين2.4.2</u>

(1
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{-y}-ye^{-x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-xe^{-y}+e^{-x}$$

النقط الحرجة $M_0=(x_0,y_0)$ تحقق إذن الجملة التالية :

$$\begin{cases} e^{-y_0}-y_0e^{-x_0}=0 \\ -x_0e^{-y_0}+e^{-x_0}=0 \end{cases}$$

2) من هنا بضرب المعادلة الثانية في y_0 ، و بجمع المعادلتين نجد :

$(1-x_0y_0)e^{-y_0}=0$ ، ثم $x_0y_0=1$.

بالتعويض في المعادلة الثانية ، نحصل على: $-x_0e^{-1/x_0}+e^{-x_0}=0$

3) من الواضح أن المعادلة الأخيرة ليس لها حل في R_- ، لأنه إذا كان $x_0\le 0$ فان :

$$-x_0e^{-1/x_0}+e^{-x_0}>0$$

لتكن إذن φ الدالة المعرفة على R_+^* بـ :

$$\varphi(x)=-xe^{-1/x}+e^{-x}$$

$$\varphi'(x)=-e^{-1/x}x\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-1/x}-e^{-x}=-e^{-1/x}-\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}-e^{-x}<0$$

و منه جدول تغيرات الدالة φ:

x	0	α	$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	
φ	1 $\searrow$	0 $\searrow$	$-\infty$

فعلا عندما x يؤول إلى 0^+ ، $-\dfrac{1}{x}$ يؤول إلى $-\infty$ ، و $-xe^{-1/x}$ يؤول إلى 0، وهكذا $\varphi(x)$ تؤول إلى 0.

و عندما x يؤول إلى $+\infty$ ، $-\dfrac{1}{x}$ يؤول إلى 0 ، و $-xe^{-1/x}$ يؤول إلى $-\infty$.

••••

من جهة أخرى، e^{-x} تؤول إلى 0، وعليه $\varphi(x)$ تؤول إلى $-\infty$.

φ اذن تقابل مستمر و متناقص تماما من $]0,+\infty[$ نحو $]-\infty,1[$ ، يوجد إذن عدد حقيقي

وحيد $\alpha > 0$ حيث: $\varphi(\alpha) = 0$

نلاحظ أن $\varphi(1) = -e^{-1} + e^{-1} = 0$ فنستنتج أن $\alpha = 1$ ، و النقطة الحرجة الوحيدة

$M_0 = (x_0, y_0)$ للدالة f ، تحقق اذن $x_0 = \alpha = 1$ و $y_0 = \dfrac{1}{x_0} = 1$.

بنقل هاتين القيمتين في المشتقات الجزئية الأولى نجد:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

4) $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = ye^{-x}$ ، $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -e^{-y} - e^{-x}$ و

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = xe^{-y}$$

$$rt - s^2 = xye^{-(x+y)} - (e^{-x} + e^{-y})^2$$

من أجل $x = y = 1$ نحصل على $rt - s^2 = e^{-2} - 4e^{-2} = -3e^{-2} < 0$.

نستنتج أن الدالة f لا تقبل قيم حدية محلية عند M_0 .

••••

3. نظريات عامّة

1.3 نظريات الانعكاس :

نبدأ بإعطاء بعض التعاريف .

1.1.3 تعاريف:

أ) نقول أن التطبيق $f:E\to F$ حيث E و F فضاءين توبولوجيين،هوميومورفيزم إذا تحقق ما يلي:

1. f تقابلي
2. f و f^{-1} مستمرين

أو بصيغة أخرى : f هوميومورفيزم اذا وفقط اذا كانت :

1. f تقابلي
2. $f(U)$ مفتوح من F من أجل كل مفتوح U من E
3. $f^{-1}(V)$ مفتوح من E من أجل كل مفتوح V من F

ب) ليكن $U\subset E$ و $V\subset F$ مفتوحين من فضاءي بناخ E و F، نقول أن $f:U\to F$ ديفيومورفيزم اذا كانت f تقابلي و f و f^{-1} قابلين للمفاضلة.

ج)نقول أن f ، C^r ديفيومورفيزم اذا كانت f ديفيومورفيزم f و f^{-1} من الصنف C^r.

ملاحظة :

(1) نلاحظ من التعاريف أن كل ديفيومورفيزم ، هوميومورفيزم لكن العكس غير صحيح ، كما يوضحه المثال التالي :

• • • •

مثال : $f(x)=x^3$ هوميومورفيزم قابل للمفاضلة من R نحو R لكن

$f^{-1}(y)=y^{\frac{1}{3}}$ غير قابل للمفاضلة عند 0

(2) نلاحظ أيضا أنه إذا كان $f:U\to V$ ديفيومورفيزم فان :

$$\forall x\in U: \qquad Df(x)\in Isom(E,F)$$

و لدينا:
$$\begin{cases} fof^{-1}=Id_V \\ f^{-1}of=Id_U \end{cases}$$

2.1.3 نظرية النقطة الثابتة :

ليكن M جزء مغلق غير خالي من فضاء بناخ E و $f:M\to M$ تقليص أي :

$$\exists k\in]0,1[: \qquad \|f(x)-f(y)\|\le k\|x-y\| \qquad \forall(x,y)\in M\times M$$

التطبيق f له إذن نقطة ثابتة وحيدة في M أي: يوجد $x_0\in M$ وحيد و يحقق

$f(x_0)=x_0$.

3.1.3 نظرية الانعكاس المحلي :

ليكن $f:U\to F$ تطبيق معرف و قابل للمفاضلة من مفتوح U محتوى في فضاء

بناخ نحو فضاء بناخ F. نفرض أن Df مستمرة عند $a\in U$ و

$Df(a)\in Isom(E,F)$ فانه اذن :

(أ) يوجد جوارين U' لـ a و V' لـ $b=f(a)$ حيث تكون f

هوميومورفيزم من U' نحو V'.

(ب) f^{-1} k - ليبشيتزي علي V' و قابل للمفاضلة عند b ولدينا :

$$Df^{-1}(b)=(Df(a))^{-1}$$

....

البرهان :

نضع $\psi = \left(Df(a)\right)^{-1} \in Isom(F,E)$ و $r(x) = f(x) - b - Df(a)(x-a)$

نلاحظ أن من أجل $x \in U$ و $y \in F$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = b + Df(a)(x-a) + r(x)$$

$$\Leftrightarrow x = a + \psi(y - b - r(x))$$

$$\Leftrightarrow x = F_y(x)$$

حيث : $F_y(x) = a + \psi(y - b - r(x))$

نختار $\eta > 0$ حيث :

$$\forall x \in \overline{B}(a,\eta): \qquad \|Dr(x)\| = \|Df(x) - Df(a)\| \le \frac{1}{2\|\psi\|}$$

وعليه تصبح $r(\cdot)$ ، $\frac{1}{2\|\psi\|}$ ليبشيتزية علي $\overline{B}(a,\eta)$

ليكن الآن $y \in \overline{B}(b,\delta)$ مع $\delta = \frac{\eta}{2\|\psi\|}$

من أجل $x \in \overline{B}(a,\eta)$ لدينا : مع ملاحظة أن $r(a) = 0$ ،

$$\|F_y(x) - a\| \le \|\psi\|(\|y-b\| + \|r(x)\|) \le \|\psi\|\left(\frac{\eta}{2\|\psi\|} + \frac{1}{2\|\psi\|}\|x-a\|\right) \le \eta$$

لقد عرفنا إذن تطبيق $F_y : \overline{B}(a,\eta) \to \overline{B}(a,\eta)$ و من أجل كل x ، z من $\overline{B}(a,\eta)$ لدينا :

$$\|F_y(x) - F_y(z)\| \le \|\psi\|\|r(x) - r(z)\| \le \|\psi\|\frac{\eta}{2\|\psi\|}\|x-z\| \le \eta = \frac{\|x-z\|}{2}$$

حسب نظرية النقطة الثابتة، يوجد نقطة وحيدة $x \in \overline{B}(a,\eta)$ حيث $f(x) = y$ نرمز لها بالرمز $x = g(y)$.

••••

هذا ما يوضح وجود تطبيق $g:\overline{B}(b,\delta)\to\overline{B}(a,\eta)$ حيث من أجل كل $y\in\overline{B}(b,\delta)$ ، $f(g(y))=y$.

نضع : $g(b)=a$ لان $F_b(a)=a$ ومن أجل كل $y\in\overline{B}(b,\delta)$ ، $g(y)$ هو الوحيد x من $\overline{B}(a,\eta)$ حيث : $f(x)=y$.

و ينتج عن هذا أن f غامر من $\overline{B}(a,\eta)$ نحو $\overline{B}(b,\delta)$.

نعتبر الآن y و y' من $\overline{B}(b,\delta)$ لدينا :

$$\|g(y)-g(y')\|=\|F_y(g(y))-F_{y'}(g(y'))\|$$

$$\le\|F_y(g(y))-F_y(g(y'))\|+\|F_y(g(y'))-F_{y'}(g(y'))\|$$

$$\le\frac{1}{2}\|g(y)-g(y')\|+\|\psi(y-y')\|$$

و هذا ما يعطي : $\|g(y)-g(y')\|\le 2\|\psi\|\|y-y'\|$

و منه g ليبشيتزية إذن مستمرة على $\overline{B}(b,\delta)$ و:

$$\|g(y)-a\|=\|g(y)-g(b)\|<2\|\psi\|\delta=\eta$$

إذا كان $\|y-b\|<\delta$ أي $g(B(b,\delta))\subset B(a,\eta)$

نضع : $U'=g(B(b,\delta))\subset B(a,\eta)$ و $V'=B(b,\delta)$

من أجل كل $y\in B(b,\delta)$ لدينا $g(y)=f^{-1}(y)\cap B(a,\eta)$ و منه $U'=f^{-1}(B(b,\delta))\cap B(a,\eta)$ و هذا ما يوضح أن U' مفتوح .

نلاحظ أن $f(U')\subset V'$ و أن التطبيق $f:U'\to V'$ غامر و هو أيضا متابين لأن إذا كان x و x' عنصرين من U' يحققان $f(x)=f(x')=y$ ، لدينا $x\in B(a,\eta)$ إذن $g(y)=x$ و $g(y)=x'$ ومنه $x=x'$.

••••

أثبتنا إذن أن $f:U'\to V'$ هوميومورفيزم و أن $g=f^{-1}$ ليبشيتزية على V'.

بقي إثبات تفاضلية f^{-1} عند b.

ليكن $0<\varepsilon$ و $0<\alpha<\eta$ حيث : $\|Dr(x)\|\leq\dfrac{\varepsilon}{2\|\psi\|^{2}}$ و $r(\cdot)$، $\dfrac{\varepsilon}{2\|\psi\|^{2}}$ ليبشيتزية

علي $\overline{B}(a,\alpha)$.

نضع $\beta=\dfrac{\alpha}{2\|\psi\|}$، من أجل كل $y\in B(b,\beta)$ لدينا :

$$\|g(y)-a\|=\|g(y)-g(b)\|\leq 2\|\psi\|\|y-b\|\leq 2\|\psi\|\beta=\alpha$$

إذن : $$g(B(b,\beta))\subset B(a,\alpha)$$

ليكن $y\in B(b,\beta)$ ، لدينا : $g(y)=F_{y}(g(y))=a+\psi(y-b-r(g(y)))$ و منه:

$$g(y)-g(b)-\psi(y-b)=-\psi(r(g(y)))=\psi(r(g(b)))-\psi(r(g(y)))$$

نستنتج أن : $\|g(y)-g(b)-\psi(y-b)\|\leq\|\psi\|\|r(g(y))-r(g(b))\|$

بما أن $r(\cdot)$، $\dfrac{\varepsilon}{2\|\psi\|^{2}}$ ليبشيتزية على $B(a,\alpha)$ و أن $g(y)$ و $g(b)$ ينتميان إلى $B(a,\alpha)$ فانه :

$$\|r(g(y))-r(g(b))\|\leq\frac{\varepsilon}{2\|\psi\|^{2}}\|g(y)-g(b)\|$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2\|\psi\|^{2}}2\|\psi\|\|y-b\|\leq\frac{\varepsilon}{\|\psi\|}\|y-b\|$$

لدينا إذن، من أجل كل $y\in B(b,\beta)$:

$$\|g(y)-g(b)-\psi(y-b)\|\leq\|\psi\|\frac{\varepsilon}{\|\psi\|}\|y-b\|=\varepsilon\|y-b\|$$

••••

و هذا ما يوضح أن g أي f^{-1} قابلة للمفاضلة عند b مع $Df^{-1}(b)=(Df(a))^{-1}$.
من هذه النظرية نستنتج :

4.1.3 نظرية الديفيومورفيزم المحلي :

ليكن $f:U\to F$ تطبيق من الصنف C^r، $r\geq 1$ معرف على مفتوح Uمن فضاء بناخ Eنحو فضاء بناخ F، ليكن $a\in U$ حيث $Df(a)\in Isom(E,F)$. إذن يوجد جواران U' لـ a و V' لـ $b=f(a)$ حيث f ، C^r ديفيومورفيزم من U' نحو V'

البرهان :

بما أن $Df(a)$ عنصر من $Isom(E,F)$ الذي هو مفتوح من $L(E,F)$ و بما أن Df مستمر عند a، نستطيع (بتقليص U عند الحاجة) فرض أن $Df(x)\in Isom(E,F)$ من أجل كل $x\in U$. بتطبيق النظرية السابقة أي النظرية 3.1.3 فانه يوجد جواران مفتوحان U' لـ a و V' لـ $b=f(a)$ حيث f هوميومورفيزم من U' نحو V' و f^{-1} قابلة للمفاضلة عند $b=f(a)$ مع $Df^{-1}(b)=(Df(a))^{-1}$.

نطبق أيضا النظرية نفسها من أجل كل $x\in U$، نستنتج أنه من أجل كل $y\in V$، التطبيق f^{-1} قابل للمفاضلة عند y و $Df^{-1}(y)=(Df(x))^{-1}$.

التطبيق Df^{-1} مستمر على V' لأن : $Df^{-1}=\phi oDfof^{-1}$ مع :

$$\phi: Isom(E,F)\to Isom(F,E)$$
$$u\mapsto u^{-1}$$

علما أن f^{-1} ، Df مستمرين و أيضا ϕ من الصنف C^∞ فان f^{-1}من الصنف C^1 على V'.

••••

نفرض أننا أثبتنا أن f^{-1} من الصنف C^{s} ، كذلك Df و ϕ و منه حسب نظرية التركيب فان Df^{-1} من الصنف C^{s} على V' و منه f^{-1} من الصنف C^{s+1}.

و هذا هو البرهان .

النظرية الموالية هي نظرية شاملة للنظرية 3.1.3 .

5.1.3 **نظرية:**

ليكن $f:U\to F$ تطبيق معرف على مفتوح U من فضاء بناخ E نحو فضاء بناخ F، نفرض أن f من الصنف C^{r}. اذن حتى يكون f ، C^{r} ديفيومورفيزم من U نحو المفتوح $f(U)$، يجب و يكفي أن يكون f متباين ومن أجل كل $x\in U$ ، $Df(x)\in Isom(E,F)$.

البرهان:

1) نفرض أن f C^{r} ديفيومورفيزم من المفتوح U نحو المجموعة $V=f(U)$، نستنتج اذن أن $Df(x)\in Isom(E,F)$ من أجل كل $x\in U$.

لنبرهن أن $V=f(U)$ مفتوح.

ليكن $b=f(a)\in V$ مع $a\in U$ ، يوجد حسب النظرية 3.1.3 جواران $U'\subset U$ لـ a و V' لـ b حيث f هوميومورفيزم من U' نحو V' . لدينا اذن $V'\subset f(U)=V$.

2) و بالعكس، ليكن $f:U\to F$ تطبيق متابين من الصنف C^{r} حيث $Df(x)\in Isom(E,F)$ من أجل كل $x\in U$. نلاحظ أن f تقابلي من U نحو $f(U)$، و من جهة أخرى $f(U)$ مفتوح و f^{-1} مستمر على $f(U)$.

و منه اذا اعتبرنا $y=f(x)\in f(U)$ مع $x\in U$ ، يوجد حسب النظرية 3.1.3 جواران مفتوحان U' لـ x و V' لـ y . بحيث يكون f هوميومورفيزم من U' نحو V' . وهذا ما يستلزم ان $V'\subset f(U)$ وان f^{-1} مستمرة عند y .
التطبيق f إذن هوميومورفيزم من U نحو المفتوح $V=f(U)$ وزيادة على ذلك بما أن $Df(x)\in Isom(E,F)$ نستطيع تطبيق النظرية 4.1.3 التي تضمن لنا أن f^{-1} من الصنف C^r في جوار y . وعليه f C^r ديفيومورفيزم من U نحو $f(U)$ ’ومنه النتيجة المطلوبة .

2.3 نظرية الدوال الضمنية

1.2.3 نظرية : ليكن E، F، G فضاءات بناخ ، $U\subset E\times F$ مفتوح و $f:U\longrightarrow G$ تطبيق من الصنف C^r .

ليكن $(a,b)\in U$ حيث $f(a,b)=0$ والتفاضلية الجزئية $D_2f(a,b)\in Isom(F,G)$

إذن :

أ) يوجد جواران مفتوحان V لـ (a,b) و A ل a ويوجد تطبيق $\varphi:A\to F$ حيث ، من اجل كل $x\in A$: $f(x,\varphi(x))=0$

ب) $[(x,y)\in V$ و $x\in A$ $f(x,y)=0]\Leftrightarrow$ و $y=\varphi(x)]$ أو بصيغة أخرى :

$$S\cap V=\{(x,\varphi(x)):x\in A\}$$

مع $S=\{(x,y)\in U:f(x,y)=0\}$

ج) $\varphi(.)$ من الصنف C^r على A و $D\varphi(x)=-(D_2f(x,\varphi(x)))^{-1}oD_1f(x,\varphi(x))$

....

البرهان : بما أن $Isom(F,G)$ مفتوح من $L(F,G)$ و أن $D_2 f$ تطبيق مستمر ، فان $(D_2 f)^{-1}(Isom(F,G))$ مفتوح يشمل (a,b).

نستطيع إذن فرض أن من اجل كل $(x,y)\in U$ ، $D_2 f(x,y)\in Isom(F,G)$.

نعرف التطبيق :

$h:U\to E\times G$ بـ $h(x,y)=(x,f(x,y))$ من اجل كل $(x,y)\in U$.

التطبيق h من الصنف C^r لان $h=(h_1,h_2)$ مع h_2 و h_1 من الصنف C^r . لدينا

إذن ، من اجل كل $(u,v)\in E\times F$:

$$Dh(x,y)(u,v)=(u,Df(x,y)u+D_2 f(x,y)v)$$

نلاحظ أن $L=Dh(a,b)$ تقابلي لأنه إذا كان $(u,v)\in \ker L$ فان $u=0$ و $D_2 f(a,b)v=0$ وعليه $v=0$. بالإضافة إلى ذلك ، إذا اعتبرنا $(u,w)\in E\times G$، لدينا $L(u,v)=(u,w)$ حيث أننا وضعنا $v=(D_2 f(a,b))^{-1}(w-D_1 f(a,b)u)$

وهكذا قد بيّنا أن :

$$(Dh(a,b))^{-1}=(Id_E,D_2 f(a,b)o(Id_G-D_1 f(a,b)oId_E)$$

وهذا ما يستلزم أن $Dh(a,b)$ تشاكلي تقابلي .

نطبق إذن، النظرية 4.1.3 التي تسمح بإيجاد جوار V' لـ (a,b) حيث h C^r ديفيومورفيزم من V' نحو المفتوح $W'=h(V')$ الذي هو جوار لـ $h(a,b)=(a,0)$.

يوجد إذن جوار مفتوح A لـ a وجوار مفتوح B لـ0 في G حيث $A\times B\subset W'$.

نضع : $W=A\times B$ و $V=h^{-1}(W)$.

وعليه h C^r ديفيومورفيزم من V نحو W .

••••

من اجل كل $x \in A$ نضع : $\varphi(x) = (Id_F o h^{-1})(x,0)$ ، التطبيق $\varphi(.)$ من الصنف C^r لأنه تركيب ثلاث تطبيقات من هذا النوع.

من اجل كل $x \in A$ ، لدينا : $h^{-1}(x,0) = (x,\varphi(x))$ و عليه :

$(x,0) = h(x,\varphi(x)) = \left(x, f(x,\varphi(x)\right)$ و هذا ما يثبت أن $f(x,\varphi(x)) = 0$.

و إضافة إلى هذا، إذا كان $(x,y) \in V$ يحقق $f(x,y) = 0$ ، لدينا:

$h(x,y) = (x,0) = h(x,\varphi(x))$ و $(x,\varphi(x)) \in V$ و هذا ما يستلزم $y = \varphi(x)$

لأن h متباين على V.

بقي لنا حساب $D\varphi$.

نلاحظ أنه من أجل كل $x \in A$: $f(x,\varphi(x)) = 0$ و أن $fo\phi = 0$ مع : $\phi : A \to V$ معرفة بـ $\phi(x) = \left(x,\varphi(x)\right)$. نستنتج إذن، من أجل كل $x \in A$ و من أجل كل $u \in E$، أن : $D(fo\phi)(x)(u) = 0$ و منه :

$$D_1 f\left(x,\varphi(x)\right)(u) + D_2\left(f,\varphi(x)\right)\left(D\varphi(x)\right)(u) = 0$$

و عليه : $D\varphi(x)(u) = -\left(\left(D_2 f(x,\varphi(x))\right)^{-1} o D_1 f(x,\varphi(x))\right)(u)$

ملاحظة:

لقد برهنّا على نظرية الدوال الضمنية، باستعمال الديفيومورفيزم المحلي. نستطيع القيام بالعكس، أي إثبات الديفيومورفيزم المحلي، باستعمال الدوال الضمنية.

3.3 تمارين:

التمرين 1.3.3 :

لتكن الدالة $f : R^2 \to R^2$ المعرفة بـ

$$f(x,y) = (x^2 - xy, y - x)$$

••••

و المجموعة D المعرفة بـ

$$D = \{(x, y) \in R^2 : x - y > 0\}$$

1) بين أن f C^∞ ديفيومورفيزم من D نحو $f(D)$.

2) عين $f(D)$ ثم f_D^{-1} ، التطبيق العكسي لاقتصار f على D .

التمرين 2.3.3 :

لتكن U كرة الوحدة المفتوحة من R^n .

نعتبر التطبيق $f : U \to R^n$ المعرف بـ :

$$f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}$$

حيث $\|.\|$ هو النظيم الاقليدي .

1) عين $f(U)$ و بين أن f متباين.

2) بين أن f ديفيومورفيزم من U نحو $f(U)$.

التمرين 3.3.3 :

ليكن f و g تطبيقان من الصنف C^1 من R^2 نحو R.

بين أنه يوجد دالتين وحيدتين u و v من الصنف C^1 ، معرفتين في جوار مفتوح V للنقطة $(0,0)$ ، حيث:

(1) من أجل كل (x, y) من V، لدينا :

$$\begin{cases} u(x, y) - xf(u(x, y), v(x, y)) - 4 = 0 \\ v(x, y) - yg(u(x, y), v(x, y)) + 5 = 0 \end{cases}$$

(2) $u(0,0) = 4$ و $v(0,0) = -5$

....

4.3 حلول التمارين:

حل التمرين 1.3.3:

1) D مفتوح لأنه الصورة العكسية للمجال $]0,+\infty[$ ، وفق التطبيق المستمر $g:R^2 \to R$ المعرف بـ $g(x,y)=x-y$.

لكي يكون f C^∞ ديفيومورفيزم من D نحو $f(D)$ ، يكفي إثبات أن :

(أ) f من الصنف C^∞ على D .

(ب) من أجل كل (x,y) من D ، $Df(x,y)$ تشاكل تقابلي من R^2 نحو R^2 .

(ج) f متباين على D .

لدينا :

(أ) f من الصنف C^∞ لأن مركبتيها، كثيري حدود.

(ب) من أجل كل (x,y) من D :

$$\det(Jf(x,y))=\begin{vmatrix} 2x-y & -x \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = x-y>0$$

و هذا ما يبرهن (ب).

(ج) لتكن (x,y) و (x',y') عنصرين من D ، حيث $f(x,y)=f(x',y')$ ، أي :

$$\begin{cases} x(x-y)=x'(x'-y') \\ y-x=y'-x' \end{cases}$$

بتعويض المعادلة الثانية في الأولى نجد $x=x'$ ، ومنه $y=y'$. و عليه f متباين على D .

2) تعيين $f(D)$ و f_D^{-1} .

ليكن (u,v) عنصر من $f(D)$ ، يوجد إذن عنصر (x,y) من D ،حيث:

••••

$$\begin{cases} u = x^2 - xy \\ v = y - x \end{cases}$$

و من هنا، نستنتج أن $v < 0$ و $u = x(-v)$ ، و منه:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-u}{v} \\ y = v - \dfrac{u}{v} \end{cases}$$

و من جهة أخرى، نثبت بسهولة أن :

$$f\left(-\frac{u}{v}, v - \frac{u}{v}\right) = (u,v)$$

من أجل كل $(u,v) \in R^2$ مع $v < 0$ ، نستنتج أن:

$$f(D) = \{(u,v) \in R^2 : v < 0\}$$

و

$$f_D^{-1} : f(D) \longrightarrow R^2$$

$$(u,v) \mapsto \left(-\frac{u}{v}, v - \frac{u}{v}\right)$$

حل التمرين2.3.3:

1) * لدينا: $\|f(x)\| = \dfrac{\|x\|}{1+\|x\|} < \dfrac{1}{2}$ لأن $\|x\| < 1$.

و منه $f(U) \subset B(O,\frac{1}{2})$ ، حيث $B(O,\frac{1}{2})$ هي الكرة المفتوحة ذات المركز O و نصف القطر $\frac{1}{2}$.

ومن جهة أخرى، لدينا :

••••

إذا كان $y \in B(O,\frac{1}{2})$ ، فان العنصر $x = \frac{y}{1-\|y\|} \in U$ و $f(x) = y$ ، و منه:

$$f(U) = B(O,\frac{1}{2})$$

* f متباين لأن :

$$f(x) = f(x') \Rightarrow \frac{\|x\|}{1+\|x\|} = \frac{\|x'\|}{1+\|x'\|}$$

$$\Rightarrow \|x\| = \|x'\|$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+\|x\|} = \frac{x'}{1+\|x'\|}$$

$$\Rightarrow x = x'$$

2) بما أن f تقابل من U نحو $f(U)$ و $f(U)$ مفتوح، يكفي إثبات أن $f \in C^1(U)$ و $f^{-1} \in C^1(f(U))$ ، علما أن:

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-\|y\|}$$

نعلم أن النظيم الاقليدي $\|.\|$ من الصنف $C^1(R^n - \{0\})$ ، و منه

$f \in C^1(U - \{0\})$ و $f^{-1} \in C^1(f(U) - \{0\})$.

يبقى إثبات تفاضلية كل من f و f^{-1} عند النقطة 0

من اجل $x = (x_1,...,x_n) \in U$ نضع:

$$f_i(x) = \frac{x_i}{1+\|x\|}$$

حيث $f = (f_1,.....,f_n)$

••••

لدينا من اجل $x \neq 0$ و $i \neq j$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) = \frac{\|x\| + \|x\|^2 - x_i{}^2}{\|x\|(1+\|x\|)^2}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{-x_i x_j}{\|x\|(1+\|x\|)^2}$$

وإذن

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = 0 \end{cases}$$

من جهة أخرى :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(0) = \lim_{t\to 0}\frac{t}{t(1+|t|)} = 1$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0$$

نستنتج أن كل المشتقات $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ موجودة ومستمرة عند 0 وبالتالي $f \in C^1(U)$.

بالطريقة نفسها نبين أن $f^{-1} \in C^1(f(U))$

وعليه f ديفيومورفيزم من U نحو $f(U)$

••••

حل التمرين 3.3.3

نعتبر التطبيق

$$F : R^2 \times R^2 \longrightarrow R^2$$
$$((x,y),(u,v)) \mapsto (u - xf(u,v) - 4, v - yg(u,v) + 5)$$

F من الصنف C^1 و $F((0,0),(4,-5)) = 0$

$D_2F((0,0),(4,-5))$ ممثلة بالمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\det A = 1$ ومنه $D_2F((0,0),(4,-5))$ ينتمي إلى $Isom(R^2)$

نطبق نظرية الدوال الضمنية ونستنتج انه يوجد جواران مفتوحان U و W من R^2 للنقطتين $(0,0)$ و $(4,-5)$ على الترتيب ودالة وحيدة ϕ من الصنف C^1 من V نحو W حيث

$$F((x,y),\phi(x,y)) = 0 \qquad \forall (x,y) \in V$$
$$\phi(0,0) = (4,-5)$$

الدالتان u و v المطلوب البحث عنهما هما مركبتا الدالة ϕ ،

$$\phi(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) \qquad \forall (x,y) \in V$$

ومن جهة أخرى لدينا : $\forall (x,y) \in N$

$$D\phi(x,y) = -D_1F((x,y),\phi(x,y)) o \left(D_2F((x,y),\phi(x,y))\right)^{-1}$$

••••

4. القيم الحدية المقيدة

1.4 تمهيد:

في الفصل الثاني قد تمت دراسة مسألة البحث عن القيم الحدية المحلية لدالة عددية معرفة وقابلة للمفاضلة على مفتوح من ف.ش.ن. وهذا ما يسمى بالقيم الحدية الحرة. لكن يوجد مسائل أخرى نتطرق فيها إلى البحث عن القيم الحدية لدالة ، فمثلا بالنسبة إلى الدالة $f: R^n \to R$ و K متراص من R^n ، المسألتين هما إيجاد $\max\limits_{x\in K} f(x)$ و

$\min\limits_{x\in K} f(x)$

في حالة $n=1$ $\quad f(x)=x^2$ و $K=[2,3]$

فلدينا $\max\limits_{x\in K} f(x)=f(3)=9$ و $\min\limits_{x\in K} f(x)=f(2)=4$

القيمتين الحديتين العظمى والصغرى ليست عند نقط تعدم المشتقة كما في حالة القيم الحدية الحرة .

2.4 وضعية المسألة:

ليكن U مفتوح من ف.ش.ن E ذو بعد n ، p عدد طبيعي حيث $p \le n$ و

$f, g_1, ..., g_p$ ، $(p+1)$ دالة حقيقية معرفة وباستمرار قابلة للمفاضلة على U

نضع : $\qquad A=\{x\in U : g_i(x)=0, i=1,...,p\}$

المسألة إذن هي إيجاد القيم الحدية للدالة f_A حيث f_A مقصور الدالة f على A .

3.4 تعاريف:

1) نقول أن f_A يقبل قيمة حدية صغرى (أو عظمى) محلية عند $a\in A$ إذا وجد $\rho > 0$ حيث :

$$f(a) \leq f(x) \quad \left(f(a) \geq f(x)\right) \qquad \forall x \in B(a,\rho) \cap A$$

مع $B(a,\rho)$ الكرة المفتوحة ذات المركز a ونصف القطر ρ

2) كل قيمة حدية محلية لـ f_A تسمى قيمة حدية مقيدة لـ f تحت الشروط :

$$g_i(x) = 0, i = 1,...p$$

4.4 **نظرية لاغرنج** (LAGRANGE) (الشروط الازمة)

إذا كانت f تقبل قيمة حدية مقيدة عند $a \in A$ تحت الشروط :

$$g_i(x) = 0 \qquad i = 1,...., p$$

وإذا كانت الأشكال $Dg_1(a),....,Dg_p(a)$ مستقلة خطيا فانه يوجد p عدد حقيقي $\lambda_1,....,\lambda_p$ حيث

$$Df(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(a)$$

ملاحظة :

1) الأعداد $\lambda_1,....,\lambda_p$ تسمى ضارب لاغرنج.(multiplicateurs de Lagrange).

2) لم نعط برهان النظرية لأنه يتطلب إدراج بعض المفاهيم الهندسية (المنحنيات، فوق السطوح وفضاء المماس) .

3) نظرية لاغرنج ليست بنظرية وجود القيم الحدية المقيدة، وإنما تجزم فقط أنه في حالة ما إذا كانت الدالة f تقبل قيم حدية مقيدة، فهذه الأخيرة، يتم البحث عنها من بين حلول جملة ما.و هذا ما سنلخصه في ما يلي :

5.4 **طريقة ضارب لاغرنج:**

لايجاد القيم الحدية لدالة f تحت الشروط $g(x) = 0$ (باعتبارها موجودة)، نتبع ما يلي:

••••••

(1) نبحث عن كل القيم لـ x و λ حيث:

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

(2) نحسب قيمة f عند كل النقط x التي تم إيجادها في المرحلة (1). أكبر قيمة هي القيمة الحدية العظمى لـ f، و الأصغر هي القيمة الحدية الصغرى لها.

6.4 <u>مثال:</u>

عين القيم الحدية للدالة f المعرفة بـ : $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ على الدائرة $x^2 + y^2 = 1$.

<u>الحل:</u>

المطلوب هو البحث عن القيم الحدية للدالة f، تحت الشروط

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$، حسب طريقة ضارب لاغرنج، نحل المعادلات:

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{و} \quad g(x,y) = 0$$

التي تكتب :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$$
$$g(x,y) = 0$$

أي :

$$2x = 2x\lambda \qquad (1)$$
$$4y = 2y\lambda \qquad (2)$$
$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (3)$$

من المعادلة (1)، نجد $x = 0$ أو $\lambda = 1$

• • • • • •

عندما $x=0$ ، فان: المعادلة (3) تعطي $y=\pm 1$ ، و عندما $\lambda=1$ فان المعادلة (2) تعطي $y=0$ و منها نستنتج بفضل المعادلة (3)، أن $x=\pm 1$.

و هكذا نستخلص أنه يمكن لـ f أن تقبل قيما حدية عند النقط $(0,1)$ ، $(0,-1)$ ، $(1,0)$ و $(-1,0)$.

القيم التي تأخذها f عند كل واحدة من هذه النقط هي :

$f(0,1)=2$ ، $f(0,-1)=2$ ، $f(1,0)=1$ و $f(-1,0)=1$.

و عليه، القيم الحدية العظمى لـ f على الدائرة $x^2+y^2=1$ ، هي $f(0,\pm 1)=2$ ، أما القيم الحدية الصغرى ، فهي $f(\pm 1,0)=1$.

• • • • • •