Distributions et Analyse de Fourier **Série 1**

Exercice 1

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$. Montrer les propriétés suivantes :

1. $Supp f = \emptyset \Longleftrightarrow f = 0$
2. $Supp(fg) \subset Supp f \cap supp g$

Exercice 2

Soit φ la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{1-t}} & \text{si} \quad t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2. Déduire que la fonction réelle ψ définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\|x\|^2}{1-\|x\|^2}} & \text{si} \quad \|x\| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad \|x\| \geqslant 1 \end{cases}$

   appartient à $D(\mathbb{R}^n)$ et $Supp\psi = B_f(0,1)$.

Exercice 3

Soit $f \in D(\mathbb{R})$. Posons pour $n \in \mathbb{N}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = f(x + \frac{1}{n+1}) - f(x)$.

Montrer que (φ_n) converge vers zéro dans $D(\mathbb{R})$.

Exercice 4

Soient $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on pose $\varphi_t(x) = \frac{\varphi(x+th)-\varphi(x)}{t}$

1. Montrer que $\varphi_t \in D(\mathbb{R}^n)$ pour $t \neq 0$.
2. Montrer que lorsque t tend vers zéro, φ_t converge dans $D(\mathbb{R}^n)$ vers une fonction à déterminer.

Exercice 5

Montrer l'équivalence suivante : $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}) : f\varphi \in D(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Exercice 6

Montrer les assertions suivantes :

1. $\exists \theta \in D(\mathbb{R}) : \psi = \theta' \Longleftrightarrow \psi \in D(\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$
2. $\exists \theta \in D(\mathbb{R}) : \psi = x\theta \Longleftrightarrow \psi \in D(\mathbb{R})$ et $\psi(0) = 0$

Exercice 7

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ t.q $\forall \varphi \in D(\Omega) : \displaystyle\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0$
Montrer que $f = 0$ sur Ω.

(Notez qu'une généralisation de ce résultat dans le cas où $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est donnée par le Lemme de Dubois-Reymond.)