سلسلة 1

التمرين1 : اذكر صحة أو خطأ القضايا التالية ثم عين نفيها

$1-(\sqrt[3]{27}=2)\vee(\ln(2)>0.69)$ $2-(4!=12)\wedge(pgcd(45,12)=4$

$3-(\pi=3.14)\Rightarrow(ppcm(4,5)=20)$ $4-(\forall x\in\mathbb{Z},\forall y\in\mathbb{N}:x+3y>0)$

$5-(\forall x\geq -3,\exists y\geq 6:x+10=4y)$

$6-(\exists x\in\mathbb{Z},\exists y\in\mathbb{N}:x^{1440}=\sin(2018y))$

$7-(\exists x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{N}:x\leq y^{24}+|y|)$

التمرين2 : ليكن n عدد طبيعي برهن بالتراجع أن:

1) $\forall n\geq 1: 8+14+\cdots+(6n+2)=3n^2+5n$

2) $\forall n\geq 0: 1+2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$

التمرين3: لتكن المتتالية:

$$\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=U_0+\cdots+U_n; n\geq 0 \end{cases}$$

1- عين الحدين الثاني و الثالث

2- اثبت بالتراجع انه

$$\forall n\geq 1: U_n=2^{n-1}$$

التمرين4: مستخدما العكس النقيض أثبت أن:

1) $(x\neq 3)\wedge(y\neq 1)\Rightarrow(xy+3\neq x+3y)$

2) $(n^3 \text{ فردي})\Rightarrow(n \text{ فردي})$

التمرين5: بالخلف أثبت أن:

1) مستطيل مساحته $170m^2$ فان طوله $l\geq 13m$

2) $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

3) $\mathrm{a}\in\mathbb{Z},\mathrm{b}\in\mathbb{Z}:\mathrm{a}+\mathrm{b}\sqrt{2}=0\Rightarrow \mathrm{a}=\mathrm{b}=0$

4) $(n^2 \text{ فردي})\Rightarrow(n \text{ فردي})$

التمرين6: بفصل الحالات أثبت أنه:

1) $\forall \mathrm{x}\in\mathbb{R}:|\mathrm{x}-1|\leq \mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1$

2) $\forall n\in\mathbb{N}: 3^n-1=2k$

التمرين7: بمثال مضاد بين خطأ القضية التالية:

$\forall n\in\mathbb{N}:(n^2+n+41$ عدد أولي$)$

التمرين8 : لتكن المجموعة

$$E=\{-5,4,1,3\}$$

1- أوجد P(E) مجموعة أجزاء المجموعة E

2- أوجد المجموعتين

$$K=\{A\in P(E),4\in A\}, H=\{B\in P(E),3\notin B\}$$

3- حل في P(E) المعادلات التالية

$$X\cup\{1,3\}=\{1,-5,3\},\quad X\cap\{3,4\}=\{4\},\quad X-\{4,-5\}=\{3\}$$

التمرين9 :

$$A=\left\{-\frac{8\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\};\ B=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$$

بين أن $A\subset B$

التمرين10 : نعرف في $\mathbb{R}$ العلاقة $\mathcal{R}$ ب :

$$\mathrm{x}\mathcal{R}\mathrm{y}\Leftrightarrow \mathrm{x}^2-\mathrm{x}=\mathrm{y}^2-\mathrm{y}$$

1- بين ان $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ في $\mathbb{R}$

2- عين صنف تكافؤ 0 وصنف تكافؤ a

حيث $\mathrm{a}\in\mathbb{R}$

التمرين11 : نعرف في $\mathbb{Z}$ العلاقة $\mathcal{R}$ ب :

$$\mathrm{a}\mathcal{R}\mathrm{b}\Leftrightarrow \mathrm{a}-\mathrm{b}=4\mathrm{k}(\mathrm{k}\in\mathbb{Z})$$

1- بين ان $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ في $\mathbb{Z}$

2- عين صنف تكافؤ 0 و1

3- عين مجموعة حاصل قسمة $\mathbb{Z}$ على $\mathcal{R}$

التمرين12 : نعرف في $\mathbb{N}^*$ العلاقة $\mathcal{R}$ ب :

$$\mathrm{x}\mathcal{R}\mathrm{y}\Leftrightarrow \mathrm{y}=\mathrm{x}^{\mathrm{n}}(\mathrm{n}\in\mathbb{N}^*)$$

1- عين ثلاث عناصر y من $\mathbb{N}^*$ لها علاقة ب x=3

2- بين ان $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب في $\mathbb{N}^*$ ثم عين نوعه

التمرين13 : نعرف في $\mathbb{N}^*$ العلاقة $\mathcal{R}$ ب :

$$\mathrm{x}\mathcal{R}\mathrm{y}\Leftrightarrow \mathrm{y}=\mathrm{kx}\quad(\mathrm{k}\in\mathbb{N}^*)$$

1- عين ثلاث عناصر y من $\mathbb{N}^*$ لها علاقة ب x=2

2- بين ان $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب في $\mathbb{N}^*$ ثم عين نوعه

التمرين14 : A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ عين في حالة الوجود :

Sup(A) ; inf(A) ; Max(A) ; Min(A)

1) $A=\left\{y=1-\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}^*\right\}$ 2) $A=\{x\in\mathbb{R},:x^2+x-2>0\}$

3) $A=\{y=x^2-2x,x\in[0,1[\}$ 4) $A=\left\{y=(-1)^n+\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}^*\right\}$

5) $A=\{y=(-3)^n+1,n\in\mathbb{N}\ \}$

التمرين15 : f تطبيق من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ معرف ب:

$$f(x) = x^2 - 1$$

1- هل f متباين

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)) = m$ حيث m وسيط حقيقي

3- استنتاجا من ذلك هل f غامر

4- عين : $A = [0,1[\ , B = \left[-2, -\frac{1}{2}\right]$

$f(A), f(B), f^{-1}(A), f^{-1}(f(A)), f\left(f^{-1}(A)\right).$

التمرين16 : g تطبيق معرف ب:

$$g: [1, +\infty[\to]0,1]; g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

بين ان g تقابلي ثم عين تطبيقه العكسي

التمرين17 : f تطبيق معرف ب:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; f(x,y) = x - y$$

ولتكن المجموعة $A = \{0,2\} \times \{0,1,2\}$

1- عين عناصر A ثم عين f(A) هل f متباين

2- هل f غامر

3- نعرف في $\mathbb{R}^2$ العلاقة $\mathcal{R}$ ب :

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow f(x,y) = f(x',y')$$

بين ان $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ ثم عين اصناف تكافؤ

$$(0,0), \left(1, \sqrt{3}\right), (3a, 4a); a \in \mathbb{R}$$

التمرين18 : f تطبيق معرف ب:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = |x| + 2$$

1- هل f متباين هل f غامر

2- اثبت ان $f(\mathbb{R}) = [2, +\infty[$

3- عين

$$f([-2,3[), f^{-1}\left(\left[\frac{5}{2}, 6\right[\right)$$