الفصل الثاني
الدوال المركبة

تعريف:

نسمي الدالة التي ترفق بكل متغير مركب z من المجموعة D جزء من المجموعة C للاعداد المركبة بالمتغير المركب w على الاكثر من المجموعة S جزء من المجموعة C بحيث $w=f(z)$

التابع وحيد القيمة

تعريف: نسمي التابع f - الدالة- الذي يرفق بكل متغير مركب z متغير مركب وحيد w حيث $w=f(z)$ بالتابع وحيد القيمة.

مثال: $z\to f(z)=z^3$ ، $z\to h(z)=\dfrac{2z-3i}{z^2+1}$ ، $z\to j(z)=e^{iz+2}$ توابع وحيدة القيمة

التابع متعدد القيم

تعريف: نسمي التابع g - الدالة- الذي يرفق بكل متغير مركب z بعدة قيم مركبة w حيث $w=g(z)$ بالتابع متعدد القيم.

مثال: $z\to g(z)=z^{1/2}$ ، $z\to k(z)=\sin z$ ، $z\to t(z)=Logz$ توابع متعددة القيم

التابع العكسي

إذا كان لدينا $w=f(z)$ و كان بالإمكان كتابة z بدلالة w نكون قد عرفنا تابعا يرفق w بالعدد المركب z و نكتب $z=L(w)$ أو $z=f^{-1}(w)$ و الذي يعرف بالتابع العكسي للتابع f

مثال: $w=f(z)=z^2 \Leftrightarrow z=f^{-1}(w)=w^{1/2}$

التحويل النقطي

ليكن العددان المركبان z و w بحيث $(x,y)\in IR^2$ ، $z=x+iy$ و $(u,v)\in IR^2$ ، $w=u+iv$
عندما نرفق النقطة $p(x,y)$ ذات اللاحقة z بالنقطة $p'(u,v)$ ذات اللاحقة w نكون قد عرفنا تحويلا نقطيا من المستوي المركب ذي المتغير z بالمستوي المركب ذي المتغير w

النهايات

تعريف: f تابع مركب معرف في جوار z_0 ما عدا احتمال z_0 و l عدد مركب نقول عن التابع f أن له نهاية l عندما $z\to z_0$ إذا وفقط أذا تحقق $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ، $0<|z-z_0|<\delta\Rightarrow|f(z)-l|<\varepsilon$

مثال: بين باستخدام التعريف أن $\lim\limits_{z\to3}\dfrac{z-1}{z-2}=2$

الحل: ليكن $\varepsilon>0$ حيث $\left|\dfrac{z-1}{z-2}\right|<\varepsilon$ من جهة أخرى نعلم بأن $|f(z)-l|=\left|\dfrac{z-1}{z-2}-2\right|=\left|\dfrac{3-z}{z-2}\right|<\dfrac{\delta}{|z-1|}$

نفرض أن $\delta<1/2$ و بالتالي $|z-2|=|1-(3-z)|>|1-|3-z||>1-\delta>1/2$ و منه نجد $\left|\dfrac{z-1}{z-2}\right|<2\delta$

و بالتالي يكفي اختيار $\delta<\min(1/2,\varepsilon/2)$ يتحقق المطلوب.

قضية: اذا كان $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ و كان $\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$ فإن

1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$ ، 2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z).g(z)]=A.B$ ، 3) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)/g(z)]=A/B$

البرهان: لدينا $\lim_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon_1>0,\exists\delta_1>0$ ، $0<|z-z_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(z)-A|<\varepsilon_1$ و

$$\lim_{z\to z_0} g(z)=B \Leftrightarrow \forall\varepsilon_2>0,\exists\delta_2>0 \text{ ، } 0<|z-z_0|<\delta_2 \Rightarrow |g(z)-B|<\varepsilon_2$$

و بالتالي $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ ،

$$|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)+g(z)-(A+B)| \le |f(z)-A|+|g(z)-B|<\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon$$

كذلك $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ ،

$$|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)g(z)-AB| = |f(z)g(z)+Bf(z)-Bf(z)-AB|$$
$$\le |B||f(z)-A|+|f(z)||g(z)-B|<\varepsilon_1|B|+(|A|+\varepsilon_1)\varepsilon_2=\varepsilon$$

أيضا

$$|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)/g(z)-A/B| = |f(z)/g(z)-f(z)/B+f(z)/B-A/B|$$
$$\le (|f(z)-A|)/|B|+(|f(z)||g(z)-B|)/(|B||g(z)|)<(\varepsilon_1/|B|)(2\varepsilon(|A|+|B|+\varepsilon)/|B|+1)$$

إذا كان $\varepsilon_2<B/2$ فإن $|B|=|B+g(z)-g(z)|\le\varepsilon_2+|g(z)| \Rightarrow |B|/2<|B|-\varepsilon_2<|g(z)|$.

أمثلة: 1) احسب النهايات التالية

$$\lim_{z\to 2i}(2z+3)(z-2i)/(z^2+4) \text{ ، } \lim_{z\to+\infty}(z^2+1)/(z+2) \text{ ، } \lim_{z\to 0}|z|^2/z \text{ ، } \lim_{z\to 1+i}(z^2+z-3)/(z+1)$$

2) هل للتابع $z\to h(z)=z/\bar{z}$ نهاية عند المبدأ؟ ،

الحل:1) لدينا $\lim_{z\to 1+i}(z^2+z-3)/(z+1)=(4i-7)/5$ ، $\lim_{z\to 0}|z|^2/z=\lim_{z\to 0}\bar{z}=0$

$$\lim_{z\to+\infty}(z^2+1)/(z+2)=\lim_{z\to+\infty}z=+\infty \text{ ، } \lim_{z\to 2i}(2z+3)(z-2i)/(z^2+4)=\lim_{z\to 2i}(2z+3)/(z+2i)=-1+3i/4$$

2) نعلم بأن ةمن جهة اخري

$$\lim_{z\to 0}z/\bar{z}=\lim_{z\to 0}z^2/|z|^2=\lim_{x+iy\to 0}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{2ixy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{2ixy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

من خلال النتيجتين السابقتين نستنتج أن الدالة h ليست لها نهاية عند $z_0=0$.

نظرية: إذا كانت للدالة f نهاية عندما z تنتهي z_0 فهي وحيدة.

البرهان: نفرض أن للدالة f نهايتين l_1,l_2 و بالتالي

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ، $|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-l_1|<\varepsilon/2$ ، $|f(z)-l_2|<\varepsilon/2$ و منه

$$|l_1-l_2|=|l_1-f(z)+f(z)-l_2|<|f(z)-l_1|+|f(z)-l_2|<\varepsilon \Rightarrow l_1=l_2.$$

نظرية: ليكن f تابع مركب حيث معرف في جوار $z_0=x_0+iy_0$ ما عدا احتمال z_0 و كانت $w_0=\alpha_0+i\beta_0$ فإن $\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}U(x,y)=\alpha_0$ و $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}V(x,y)=\beta_0$

البرهان: $\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ، $0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-w_0|<\varepsilon$

$$0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |U(x,y)-\alpha_0|=|\mathrm{Re}(f(z)-w_0)|<|f(z)-w_0|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}U(x,y)=\alpha_0$$

كذلك $0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |V(x,y)-\alpha_0|=|\mathrm{Im}(f(z)-w_0)|<|f(z)-w_0|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}V(x,y)=\beta_0$

و بالعكس $\forall \varepsilon>0,\exists \delta>0;\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow |U(x,y)-\alpha_0|<\varepsilon/2$ و $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow |V(x,y)-\beta_0|<\varepsilon/2$ و بالتالي

$$\forall \varepsilon>0,\exists \delta>0,0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-w_0|\le |U(x,y)-\alpha_0|+|V(x,y)-\beta_0|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$$

الاستمرار

تعريف: تكون الدالة f المعرفة على نطاق D مستمرة عند النقطة $z=z_0$ من D إذا وفقط إذا كان $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ و تكون مستمرة على D إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من D.

ملاحظة: تكون الدالة f مستمرة عند النقطة $z=z_0$ من D إذا تحققت الشروط التالية

1) الدالة f المعرفة على نطاق D أي $z_0\in D$ ، 2) وجود $\lim_{z\to z_0} f(z)$ ، 3) $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

ملاحظة: النظريات على عمليات الدوال و النهايات صحيحة على الدوال المستمرة.

مثال: بين أن الدالة g حيث $g(z)=\begin{cases}(z^2+4)/(z-2i), z\neq 2i\\ 4i,, z=2i\end{cases}$ مستمرة على C

الحل: لدينا $z\neq 2i$ لما ، $g(z)=\dfrac{z^2+4}{z-2i} \Leftarrow g(z)=z+2i$ و بالتالي

$\lim_{z\to 2i} g(z)=\lim_{z\to 2i}(z+2i)=4i=g(2i)$ و منه نستنتج أن الدالة g مستمرة عند $z=2i$.

نظرية: إذا كانت الدالة f مستمرة على منطقة مغلقة $\overline{D}$ فهي محدودة أي

$$\forall z\in \overline{D},\exists M>0: |f(z)|\le M$$

نظرية: إذا كانت الدالة f مستمرة عند النقطة $z=z_0$ و إذا كانت الدالة g مستمرة عند النقطة $\zeta=\zeta_0$ بحيث $z=g(\zeta)$ مع أن $\zeta_0=f(z_0)$ فإن الدالة المركبة $w=g(f(z))$ مستمرة عند النقطة $z=z_0$.

البرهان: بما أن g مستمرة عند $f(z_0)$ هذا يعني

$$\forall \varepsilon>0,\exists \delta'>0,|\zeta_0-f(z_0)|<\delta' \Rightarrow |g(\zeta)-g(f(z_0))|<\varepsilon$$

و بما أن f مستمرة عند z_0 هذا يعني $\forall \varepsilon'>0,\exists \delta>0,|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon'$

و بضع $\zeta=f(z)$ و $\delta'=\varepsilon'$ من الجملتين السابقتين مستنتج أن

$\forall \varepsilon'>0,\exists \delta>0,|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon'$ أي $|z-z_0|<\delta \Rightarrow |g(f(z))-g(f(z_0))|<\varepsilon$.

تطبيق: نعتبر الدالة المركبة f حيث $f(z)=\dfrac{e^{2z}-1}{e^z-i}$ عندما $z\neq i\pi/2$ و $f(z)=2i$ لما $z=i\pi/2$

ادرس استمرارية الدالة f على C

الحل: الدالة المركبة f معرفة على C و هي أيضا حال قسمة دالتين مستمرتين على $C-\{i\pi/2\}$ بالنسبة للعبارة الاولى، ندرس استمرارية الدالة f عند $z=i\pi/2$

لدينا $\lim_{z\to i\pi/2} e^z+i=2i$ = $\lim_{z\to i\pi/2} f(z)=\lim_{z\to i\pi/2}\dfrac{e^{2z}-1}{e^z-i}$ ، أي $\lim_{z\to i\pi/2} f(z)=f(i\pi/2)$

و منه تستنتج الدالة f مستمرة عند $z=i\pi/2$ و بالتالي مستمرة على C.

ب بن علي

الاشتقاق

تعريف: لتكن f دالة وحيدة القيمة و التكن z_0 نقطة من مفتوح و مترابط $V(z_0)$ من D منطقة تعرف الدالة جزء من المستوي المركب C، تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عند z_0 إذا وفقط إذا كان للنسبة $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ نهاية محدودة عندما $z \to z_0$ و نسمي هذه النهاية $f'(z_0)$ العدد المشتق للدالة عند z_0،

و إذا كان $\Delta z = z - z_0$ و $\Delta f(z) = f(z) - f(z_0)$ فإن $f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}$.

مثال: بين أن كل من الدالتين $f(z)=z^3$ و $g(z)=\sqrt{z}$ قابلتين للاشتقاق عند النقطة z_0

الحل: ليكن z_0 ، z نقطتين من المستوي المركب C

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^3-z_0^3}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\left(z^2+z_0+z_0^2\right)=3z_0^2$$

كذلك $g'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta g(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\sqrt{z}-\sqrt{z_0}}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{z-z_0}{\Delta z\left(\sqrt{z}+\sqrt{z_0}\right)}=\dfrac{1}{2\sqrt{z_0}}$.

تعريف: نقول عن الدالة f أنها دالة هلمورفية عند z_0 إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة z من جوار $V(z_0)$ و تكون هلمورفية على المنطقة D إذا كانت هلمورفية في كل z_0 نقطة من D.

ملاحظة: إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على أي مسار من المسارات في C نقول أن f $C-$ قابلة للاشتقاق.

نظرية: إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند z_0 فهي مستمرة عند z_0

البرهان: f قابلة للاشتقاق عند z_0 هذا يعني أن للنسبة $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ نهاية عندما $z \to z_0$ كذلك

$$\lim_{z\to z_0}\left(f(z)-f(z_0)\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\times\lim_{z\to z_0}(z-z_0)=f(z_0)\times 0=0$$

أي أن $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$ ومنه f مستمرة عند z_0.

قضية: لتكن f ، g دالتين من $D\subset C\to C$ قابلتين للاشتقاق على المفتوح D و $k\in C$ فإن

1) $(k)'=0$ ، 2) $(f\pm g)'=f'\pm g'$ ، 3) $(fg)'=f'g+fg'$ ، 4) $(kf)'=kf'$

5) $(f/g)'=(f'g-fg')/g^2;g\neq 0$ ، 6) $(f\circ g)'=[f(g)]'=f'(g)g'$

البرهان: من 1) الى 5) بنفس طريقة البرهان في الدوال لمتغير حقيقي

6) نضع $h=f\circ g$ و $\alpha_0=g(z_0)$

من خلال الصيغة $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0)+\varepsilon(\Delta z)\Leftrightarrow f(z)-f(z_0)=\left(f'(z_0)+\varepsilon(\Delta z)\right)\Delta z$

و $g(z)-g(z_0)=\left(g'(z_0)+\varepsilon(\Delta z)\right)\Delta z$

يكون $f(\alpha)-f(\alpha_0)=\left(f'(\alpha_0)+\varepsilon(\Delta\alpha)\right)\Delta\alpha$ حيث $\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\varepsilon(\Delta\alpha)=0$،

و بوضع $\alpha=g(z)$ نجد $h(z)-h(z_0)=\left(f'(g(z_0))+\varepsilon_1(\Delta g(z))\right)\left(g(z)-g(z_0)\right)$

و بما أن g قابلة للإ ستقاق عند z_0 فهي مستمرة عند z_0 و بالتالي

$$\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}=\lim_{g(z)\to g(z_0)}\frac{h(z)-h(z_0)}{g(z)-g(z_0)}\times\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=f'(g(z_0))\times g'(z_0)$$

نظرية: إذا كانت الدالة المركبة f قابة للاشتقاق على D فإن f قابلة ما لانهاية من المرات على و إذا كانت f هامورفية على D فإن جميع مشتقاتها المتتابعة هلمورفية على D من أجل كل n من IN .

نتيجة: مما سبق نستنتج أن كل المشتقات الجزئية للدالتين $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ حيث $f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$ موجودتين و مستمرتين على D

معادلتي (شرطي) كوشي- ريمان

نظرية: لتكن الدالة المركبة f حيث $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ ، $f(z)$ هلمورفية عند z_0 فإن الدالتين V,U تقبلان عند (x_0,y_0) مشتقات جزئية من الرتبة الأولى بالنسبة للمتغيرين y,x و تحققان

$$U'_x(x_0,y_0)=V'_y(x_0,y_0) \quad \text{و} \quad U'_y(x_0,y_0)=-V'_x(x_0,y_0)$$

نسمي المساوتين الاخيرتين شرطي كوشي- ريمان

البرهان: f هلمورفية عند z_0 أي أن $f'(z_0)$ موجود و

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{U(x,y)+iV(x,y)-U(x_0,y_0)-iV(x_0,y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{U(x,y)-U(x_0,y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}+i\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{V(x,y)-V(x_0,y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$$

1) بتثبيت $y=y_0$ يكون لدينا

$$f'(z_0)=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{U(x,y_0)-U(x_0,y_0)}{(x-x_0)}+i\frac{V(x,y_0)-V(x_0,y_0)}{(x-x_0)}\right]=\frac{\partial U(x_0,y_0)}{\partial x}+i\frac{\partial V(x_0,y_0)}{\partial x}....*$$

2) بتثبيت $x=x_0$ يكون لدينا

$$f'(z_0)=\lim_{y\to y_0}\left[\frac{U(x_0,y)-U(x_0,y_0)}{i(y-y_0)}+\frac{V(x_0,y)-V(x_0,y_0)}{(y-y_0)}\right]=-i\frac{\partial U(x_0,y_0)}{\partial y}+\frac{\partial V(x_0,y_0)}{\partial y}.....**$$

من المساوتين * و ** نستنتج أن $\frac{\partial U(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial V(x_0,y_0)}{\partial y}$ و $\frac{\partial U(x_0,y_0)}{\partial y}=-\frac{\partial V(x_0,y_0)}{\partial x}$.

مثال: حقق شرطي كوشي ريمان على الدالة $g(z)=z^2+2z$

الحل: الدالة g مجموع دالتين هلمورفيتين فهي هلمورفية

كذلك $g(z)=x^2-y^2+2x+2iy(1+x)$ و منه $U(x,y)=x^2-y^2+2x$ و $V(x,y)=2y(1+x)$

و بالتالي $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=2x+2$ ، $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=-2y$ و $\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}=2y$ ، $\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}=2x+2$

و منه نستنتج صحة شرطي كوشي- ريمان.

ملاحظة: إذا كان شرطي كوشي- ريمان غير محققين في كل نقطة من المنطقة D فإن الدالة f ليست هلمورفية في D .

مثال: ادرس قابلية اشتقاق f الدالة حيث $f(z)=2x^2+y+i(y^2-x)$

الحل: نستخدم شرطي كوشي- ريمان $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=2x$ ، $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=1$ لكن $\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}=-1$ ،

$\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}=2y$ واضح أن أحد الشرطين غير محقق و بالتالي الدالة f غير قابلية للاشتقاق.

ملاحظة: تحقق شرطي كوشي – ريمان لا يستلزم هلمورفية الدالة

مثال: نعتبر الدالة $g(z)=\begin{cases} z^5/|z|^4; z\neq 0 \\ 0; z=0 \end{cases}$ تحقق من الملاحظة السابقة

لا حظ أن $\frac{g(z)-g(0)}{z}=\frac{z^4}{|z|^4}$ من أجل المسار $y=0$ ، $\lim\limits_{z\to 0(x\to 0)}\frac{g(z)-g(0)}{z}=1$

لكن من أجل المسار $y=x$ ، $\lim\limits_{z\to 0(x\to 0)}\frac{g(z)-g(0)}{z}=\frac{(1+i)^4}{(\sqrt{2})^4}=-1$ أي أن الدالة g غير قابلة للاشتقاق

من جهة اخرى $V(0,y)=y$ ، $V(0,x)=U(0,y)$ ، $U(0,y)=x$ و بالتاليء

$\frac{\partial U(x,0)}{\partial x}=1=\frac{\partial V(0,y)}{\partial y}$ و $\frac{\partial U(x,0)}{\partial y}=0=\frac{\partial V(0,y)}{\partial x}$ أي شرطي كوشي ريمان محققين.

شرط كافي

نظرية: لتكن الدالة المركبة f حيث $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ ، و المشتقتين الجزئيتين للدالتين $U(x,y),V(x,y)$ ، بالنسبة للمتغيرين الحقيقين x,y موجودين و مستمرين في D فإن الدالة f هلمورفية في D.

البرهان: لدينا

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{x-x_0}{z-z_0}\left(\frac{U(x,y)-U(x_0,y_0)}{x-x_0}+i\frac{V(x,y)-V(x_0,y_0)}{x-x_0}\right)$$

$$+\frac{y-y_0}{z-z_0}\left(\frac{U(x,y)-U(x_0,y_0)}{y-y_0}+i\frac{V(x,y)-V(x_0,y_0)}{y-y_0}\right)$$

$$=\frac{x-x_0}{z-z_0}\left(U_x(x_0+t_1(x-x_0),y_0)+iV_x(x_0+t_2(x-x_0),y_0)\right)$$

$$+\frac{y-y_0}{z-z_0}\left(U_y(x_0,y_0+t_3(y-y_0))+iV_y(x_0,y_0+t_4(y-y_0))\right)$$

و ذلك باستخدام نظرية القيمة المتوسطة لحساب التفاضل، و هذه النتيجة صحيحة أيضا لقيم $x=x_0, y=y_0$ و بهذا نجد أن المشتقات الجزئية مستمرة عند z_0 كما يمكن أن نكتب

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{x-x_0}{z-z_0}\left(U_x(z_0)+iV_x(z_0)+\varepsilon_1\right)+\frac{y-y_0}{z-z_0}\left(U_y(z_0)+iV_y(z_0)+\varepsilon_2\right)$$

حيث $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$ عندما $z\to z_0$ و ع ا بتطبيق شرطي كوشي- ريمان و تجميع الحدود نستنتج أن

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=U_x(z_0)+iV_x(z_0)+\frac{(x-x_0)\varepsilon_1+(y-y_0)\varepsilon_2}{z-z_0}$$

و لأن $|x-x_0|<|z-z_0|$ و $|y-y_0|<|z-z_0|$ و بالتالي

$$\frac{|(x-x_0)\varepsilon_1+(y-y_0)\varepsilon_2|}{|z-z_0|}<_{z\to z_0}^{|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|\to 0}$$ و اخيرا

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=U_x(z_0)+iV_x(z_0)$$

و إذا كانت النظرية صحيحة في كل نقطة z_0 من D فإن الدالة f هلمورفية في D.

مثال: نعتبر الدالة المركبة التالية: $f(z)=e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)$

أحسب U_x,U_y,V_x,V_y هل هي مستمرة على C و تحقق شرطي كوشي- ريمان؟

الحل: $U_x=2e^{x^2-y^2}(x\cos 2xy-y\sin 2xy)$، $U_y=-2e^{x^2-y^2}(y\cos 2xy+x\sin 2xy)$

$V_x=2e^{x^2-y^2}(x\sin 2xy+y\cos 2xy)$، $V_y=2e^{x^2-y^2}(x\cos 2xy-y\sin 2xy)$

واضح أن الدوال المحصل عليها مستمرة في C و أن $U_x=V_y$ و $V_x=-U_y$ تحققان كوشي ريمان و بالتالي الدالة f هلمورفية على C.

الدوال التوافقية

تعريف: $f:U\subset IR^2\to IR$ من الصنف C^2 $\left(f\in C^2(U,IR)\right)$ أي $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ موجودة و مستمرة على المنطقة U.

تعريف: لتكن $f\in C^2(U,IR)$ نقول عن الدالة أنها توافقية على U إذا كان $\forall(x,y)\in U^2$

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{xx}+f_{yy}=0$$

مثال: بين أن الدالة $g(x,y)=e^x\sin y$ توافقية

الحل: لدينا $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=e^x\sin y\Rightarrow\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=e^x\sin y$

و $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=e^x\cos y\Rightarrow\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=-e^x\sin y$ واضح أن $\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=0$

نظرية: إذا كانت الدالة المركبة f حيث $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ هلمورفية في D فإن كل من الدالتين $U(x,y),V(x,y)$ توافقية في D.

البرهان: لدينا $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ هلمورفية في فإن كل من U_x,U_y,V_x,V_y موجودة و مستمرة و تحقق $U_x=V_y$ و $V_x=-U_y$ و بحساب المشتقة الثانية بالنسبة للمتغيرين x و y نجد $U_{xx}=V_{xy}\Rightarrow U_{xx}+U_{yy}=0$ و $-V_{yx}=U_{yy}$ و منه توافقية Uو بنفس الطريقة نبين أن توافقية V.

ملاحظة: إذا كان الدالتين $U(x,y),V(x,y)$ توافقيتين في D و مشتقاتيهما الجزئية الاولى تحققان معادلتي كوشي- ريمان نقول أنهما مترافقتين توافقا في D.

نظرية: لكل دالة توافقية U في نطاق بسيط الترابط D مرافق توافقي V يمكن إيجاده بالعلاقة

$$V(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left[\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dx+\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dy\right]+k.$$

تطبيق: نعتبر الدلة الحقيقية للمتغيرين x, y المعرفة بـ $U(x,y)=x^3-3xy^2-5y$

1- بين أن التابع $U(x,y)$ توافقي في IR^2

2- جد مرافقه التوافقي $V(x,y)$ في IR^2

3- عين عبارة التابع الهلمورفي $f(z)$ الذي جزءه الحقيقي $U(x,y)$

الحل: 1- لدينا $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=3x^2-3y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y)=6x$

و $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=-6xy-5 \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y)=-6y$ واضح أن $\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y)=0$

2 - باستخدام شرط كوشي ريمان الاول نجد

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=3x^2-3y^2=\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\Rightarrow V(x,y)=3x^2y-y^3+h(x)$$

و بعد الاشتقاق بالنسبة x لعبارة $V(x,y)$ المحصل عليها و تطبيق الشرط الثاني لكوشي- ريمان نجد

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}=6xy+h'(x)=-\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=-6xy+5\Rightarrow h'(x)=5\Rightarrow h(x)=5x+k$$

و منه $V(x,y)=-y^3+3x^2y+5x+k$

3- لدينا $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ و بالتالي $f(z)=x^3-3xy^2-5y+i\left(-y^3+3x^2y+5x+k\right)$

أي $f(z)=z^3+5iz+K$ حيث $K=ik$.

ب بن علي