UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDER
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
Département de Mathématiques

2020/2021
Master II - Mathématiques
Topologie

TD-03

Exercice 1 Montrer que la famille $\mathcal{F}$ formée d'une seule fonction continue f est équicontinue. Plus généralement, toute partie finie de $C(E,F)$ est équicontinue.

Exercice 2 Si toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ sont C-lipschitziennes, pour une même constante C, Monter $\mathcal{F}$ est équicontinue. Plus généralement, il suffit que tout point $x \in E$ possède un voisinage ouvert V_x tel que toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ soient C_x-lipschitziennes sur V_x, pour une même constante C_x dépendant uniquement de x.

Exercice 3 Si E et F sont des espaces vectoriels normés, et si F est une partie bornée de $L(E,F)$, Montrer que F est équicontinue, avec F, considérée comme partie de $C(E,F)$.

Exercice 4 Soient $E = [0;1]$, $F = \mathbb{R}$, et pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(t) = t^n$. Montrer que la suite (f_n) n'est pas équicontinue.

Exercice 5 Montrer que la famille de fonctions de la variable réelle $\{|x|^\alpha;\ \alpha \in [0,1]\}$ n'est pas équicontinue en 0.

Exercice 6 Soit K un espace topologique compact et $\mathcal{F} \subset C(K)$ une famille équicontinue sur K. Montrer que l'adhérence de $\mathcal{F}$ dans $(C(K), \|.\|_\infty)$ est également équicontinue.