Les Ensembles équicontinus d'applications et Théorèmes d'Ascoli

Dr. HADJ AMMAR Tedjani

Table des matières

Chapitre 1

Ensembles équicontinus d'applications Théorèmes d'Ascoli

1.1 Ensembles équicontinus d'applications

Soit E un espace topologique , F un espace semi-métrique de semi-distances $(\delta_j)_{j\in J}$.Rappelons qu'une application f de E dans F est continue au point a de E si

$$\forall j \in J, \forall \epsilon > 0, \exists \mathcal{U} \in \mathcal{V}(a) \subset E \Rightarrow \delta_j\left(f(x), f(a)\right) \leq \epsilon; \forall x \in \mathcal{U}$$

Définition 1.1.1 *E étant un espace topologique , F un espace semi-métrique de semi-distances $(\delta_j)_{j\in J}$ (E et F sont nécessairement séparés) , $\mathcal{F}$ un ensemble d'applications de E dans F.On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue en $a \in E$ si :*

$$\forall j \in J, \forall \epsilon > 0, \exists \mathcal{U} \in \mathcal{V}(a) \subset E \Rightarrow \delta_j\left(f(x), f(a)\right) \leq \epsilon; \forall x \in \mathcal{U}, \forall f \in \mathcal{F}$$

On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinu sur E ou simplement équicontinu, ou que Les $f \in \mathcal{F}$ sont également continues , si $\mathcal{F}$ est équicontinu en tout point $a \in E$.

- *Tout ensemble fini de fonctions continues est équicontinu.*
- *Tout réunion finie de parties équicontinues est équicontinue.*

Proposition 1.1 *Si E est un espace semi-métrique, de semi-distances $(d_i)_{i\in I}$, on dira que $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinu s :*

$$\forall j \in J, \forall \epsilon > 0, \exists i \in I, \exists \eta > 0 : d_i(x', x'') \leq \eta \Rightarrow \delta_j\left(f(x'), f(x'')\right) \leq \epsilon; \forall f \in \mathcal{F}$$

Exemple 1.1 *Soit $\mathcal{F}$ un ensemble d'applications <u>lipschitziennes</u> ,si, pour tout $j \in J$ il existe un même $i \in I$ et une même constante $k \geq 0$ tels que :*

$$\delta_j\left(f(x'), f(x'')\right) \leq k d_i(x', x'')$$

pour toute $f \in \mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinu.et on dira même qu'il est <u>équilipschitzien</u>

Remarque 1.1 *Dans l'équicontinuité n'interviennent en réalité que la topologie de E et la structure uniforme de F. L' équicontinuité en $a \in E$ s'exprime comme suit : quel que soit l'entourage $\mathcal{O}$ de la structure uniforme de F, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de a tel que $x \in \mathcal{U}$, $f \in \mathcal{F}$ entratne $(f(a), f(x)) \in \mathcal{O}$ Comme nous avons vu (et admis) que toute structure uniforme peut être définie par une famille de semi-distances, il n'y a pas de mal à opérer avec des semi-distances, et c'est ce que nous ferons*

Théorèm 1.1 *Soit f_n une suite équicontinue d'applications de E dans F,et soit e_n une suite de points de E ; on suppose que, pour n infini, les e_n convergent vers e, et que les f_n convergent simplement vers une limite f. Alors les $f_n(e_n)$ convergent vers $f(e)$ dans F.*

Démonstration.– Soit δ_j une semi-distance de F .On a

$$\delta_j\left(f(e), f_n(e_n)\right) \leq \delta_j\left(f_n(e_n, f_n(e)\right) + \delta_j\left(f_n(e), f(e)\right)$$

Pour n infini ,le deuxième terme tend vers 0, puisque les f_n convergent simplement vers f. Ensuite e_n convergent vers e et les f_n sont équicontinues, donc le premier terme converge aussi vers 0 (pour tout $\epsilon > 0$ il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de e tel que $x \in \mathcal{U}$ entraîne $\delta_j\left(f_n(x), f_n(e)\right) \leq \epsilon$ pour tout n n assez grand , $e_n \in \mathcal{U}$).

1.2 Premier théorème d'Ascoli

Théorèm 1.2 *Soit E un espace topologique et F un espace semi-métrique.Soit $\mathcal{F}$ un ensemble d'applications de E dans F, équicontinu au point a de E. Alors l'adhérence $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ dans F^E (espace de toutes les applications de E dans F, muni de la topologie de la convergence simple) est encore équicontinue au point a.*

Démonstration.– Donnons-nous une des semi-distances δ_j sur F et $\epsilon > 0$. Puisque $\mathcal{F}$ est équicontinue en a il existe un voisinage $\mathcal{U}_{j,\epsilon} = \mathcal{U}$ de a dans E tel que $x \in \mathcal{U}$, $f \in \mathcal{F}$ entraîne :

$$\delta_j\left(f(x), f(a)\right) \leq \epsilon$$

Mais l'application $f \to \left(f(a), f(x)\right)$, (x fixé dans $\mathcal{U}$) de F^E dans F^2 est continue (projection dans un produit), et δ_j est continue sur F^2. Donc l'ensemble des $f \in F^E$ vérifiant $\delta_j\left(f(x), f(a)\right) \leq \epsilon$ est fermé dans F^E , contenant $\mathcal{F}$ il contient $\overline{\mathcal{F}}$.
donc pour tout $j \in J$ et tout $\epsilon > 0$ on a trouvé un voisinage $\mathcal{U}$ de a dans E tels que $x \in \mathcal{U}$, $f \in \overline{\mathcal{F}}$ entraîne $\delta_j\left(f(x), f(a)\right) \leq \epsilon$; ce qui prouve bien l'équicontinuité de $\overline{\mathcal{F}}$ au point a.

Corollraire 1.1 *Dans les conditions du théorème, toutes les fonctions $f \in \overline{\mathcal{F}}$ sont continues au point a. Toute Limite simple f d'une suite de fonctions f_n de $\mathcal{F}$ est continue au point a.*

Corollraire 1.2 *On a des énoncés analogues avec l'équicontinuité sur E tout entier, ou l' équicontinuité uniforme si E est aussi semi-métrique.*

1.3 Deuxième théorème d'Ascoli

Théorèm 1.3 *Soient E un espace topologique et F un espace semi-métrique.Sur un ensemble $\mathcal{U}$ équicontinu d'applications de E dans F, les structures semi-métriques de la convergence simple sur un sous-ensemble dense E_0 de E, de la convergence simple sur E, et de la convergence uniforme sur toute partie compacte de E, sont uniformément équivalentes (autrement dit, les structures uniformes correspondents sont identiques, et en particulier les topologies correspondents coincident).*

Démonstration.– La structure semi-métrique de la convergence simple sur E_0 est définie par les semi-distances ; A_0 partie finit de E_0 :

$$\delta_{j,A_0}\left(f, g\right) = \max_{x \in A_0} \delta_j\left(f(x), g(x)\right)$$

Celle de la convergence simple sur E est définie par les semi-distances ; A partie finit de E :

$$\delta_{j,A}\left(f, g\right) = \max_{x \in A} \delta_j\left(f(x), g(x)\right)$$

Enfin celle de la convergence uniforme sur les parties compactes de E est définie par les semi-distances ; K partie finit de E :

$$\delta_{j,K}\left(f, g\right) = \max_{x \in K} \delta_j\left(f(x), g(x)\right)$$

La structure semi-métrique considérée sur $\left(F^E\right)_c$ est séparée car si $\delta_{j,A_0}\left(f, g\right) = 0$ pour tout $j \in J$ et tout A_0 finie de E_0 , f et g coïncident sur E_0 donc sur E. La deuxième structure uniforme étant

intermédiaire entre la première et la troisième, il suffit de montrer que celles-ci sont uniformément équivalentes. Par ailleurs toute semi-distance de la première est une semi-distance de la troisième (en prenant $K = A_0$ finie $\subset E_0$) ; c'est donc une réciproque qu'il faut montrer. Ce n'est évidemment pas exact sur l'ensemble $\left(F^E\right)_c$ de toutes les applications continues de E dans F ; mais il s'agit ici des structures induites sur une partie équicontinue $\mathcal{F}$ de $\left(F^E\right)_c$,Soit donc K un compact de E , $j \in J$ et $\epsilon > 0$.
Nous allons montrer qu'il existe une partie finie A_0 de E_0 et $\eta > 0$ telle que $\delta_{j,A_0}(f,g) \leq \eta$ entraîne $\delta_{j,K}(f,g) \leq \epsilon$ pour f et g dans $\mathcal{F}$ .Or ceci est très simple.Pour tout point a de K, il existe un voisinage $\mathcal{U}_a$ de a dans E telle que $x \in \mathcal{U}_a$, $h \in \mathcal{F}$ entrain $\delta_j(h(a), h(x)) \leq \dfrac{\epsilon}{3}$ en vertu de l'équicontinuité de $\mathcal{F}$ .Un nombre fini des $\mathcal{U}_a$ recouvre K, soit $\mathcal{U}_{a,v}$, $v = 1, ..., n$ Chacun de ces $\mathcal{U}_{a,v}$ contient un point b_v de E_0 , puisque E_0 est supposé dense.On a alors pour f et g dans $\mathcal{F}$ et $x' \in \mathcal{U}_{a,v}$:

$$\delta_j(f(a), g(x)) \leq \delta_j(f(x), f(a_v)) + \delta_j(f(a_v), f(b_v)) + \delta_j(f(b_v), g(b_v)) + \delta_j(g(b_v), g(a_v)) + \delta_j(g(a_v), g(x))$$

Si alors on prend $A_0 = \{b_i\}_{i=1,...,n}$, $\eta = \dfrac{\epsilon}{3}$,comme tout $x \in K$ est dans l'un des $\mathcal{U}_{a,v}$, $\delta_{j,A_0}(f,g) \leq \eta$ entraîne bien $\delta_{j,K}(f,g) \leq \epsilon$

Corollraire 1.3 *Si une suite de fonctions également continues f_n sur E a valeurs dans F converge vers une fonction continue f sur E en tout point d'un sous-ensemble dense E_0 de E les f_n convergent vers f en tout point de E, et uniformément sur tout compact de E.*

En effet, l'ensemble $\mathcal{F}$ des f_n et def est équicontinu sur E, et il suffit d'appliquer le théorème.

Corollraire 1.4 *Si lesf,. sont également continues et convergent simplement versf sur E, f est continue et la convergence est uniforme sur tout comfact.*

Corollraire 1.5 *Si une suite équicontinue d'applications f_n d'un espace topologique E dans un espace semi-métrique F converge vers une limite en tout point d'un sous-ensemble dense E_0 de E, et si, pour tout x de E, l'ensemble $\mathcal{F}(x) = \{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ est contenu dans une partie séquentiellement complète de F (ce qui se produit toujours si F est séquentiellement complet), alors la suite f_n converge en tout point de E, la limite est continue sur E, et la convergence est uniforme sur tout compact de E.*

Corollraire 1.6 *Soit f_n une suite équicontinue d'applications d'un espace topologique E dans un espace semi-métrique F. Supposons que, pour tout x de E, l'ensemble $\mathcal{F}(x) = \{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ soit contenu dans une partie séquentiellement complète. Alors l'ensemble A des points x de E pour lesquels la suite des $f_n(x)$ a une limite, est fermé dans E. La limite f des f_n sur A est une application continue de A dans F, et les f_n convergent vers f dans $\left(F^E\right)_c$*

Démonstration.– Appliquons le corollaire 3 au sous-espace A de E, et à son sous-espace dense A. Alors on trouve que les $f_n(x)$ ont une limite pour tout x de A ; mais comme A est l'ensemble des x ayant cette propriété, on a $\overline{A} = A$ et A est bien fermé. Le reste découle du corollaire 3.

1.4 Troisième théorème d'Ascoli

Théorèm 1.4 *Soient E un space topologique ,F un espace semi-métrique, $\mathcal{F}$ un ensemble d'applications continues de E dans F. Pour que $\mathcal{F}$ soit relativement compact dans $\left(F^E\right)_c$ (espace des applications continues de E dans F, muni de la topologie de la convergence compacte), il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*
1) $\mathcal{F}$ est équicontinue.
2) pour tout $x \in E$, l'ensemble $\mathcal{F}(x) = \{f(x), f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans F.
Si E est localement compact, ces conditions sont aussi nécessaires.

Démonstration.– 1° Montrons que 1) et 2) ont suffisantes : Supposons les donc réalisées. Pour tout $x \in F$, l'adhérence $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ dans Fest supposée compacte ; donc d'après Tychonoff, $\prod\limits_{x \in E} \overline{\mathcal{F}}$ est compact.

Celà veut dire que l'ensemble des $f \in F^E$ telles que, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \overline{\mathcal{F}}$ est compact dans F^E donc notre ensemble $\mathcal{F}$ contenu dans un compact, est relativement compact dansF^E (sans aucune hypothèse d'équicontinuité), son adhérence $\overline{\mathcal{F}}$. dans F^E est compacte. Mais $\overline{\mathcal{F}}$ est encore équicontinue (premier théorème d' Ascoli) ; alors, sur $\overline{\mathcal{F}}$, la topologie F^E etla topologie $\left(F^E\right)_c$ coïncident (deuxième théorème d' Ascoli), donc ;li est un compact de $\left(F^E\right)_c$ et $\overline{\mathcal{F}}$ est bien relativement compacte dans $\left(F^E\right)_c$.
2° Inversement , supposons $\mathcal{F}$ relativement compacte dans $\left(F^E\right)_c$ donc son adhérence $\overline{\mathcal{F}}_c$ compact.son image $\overline{\mathcal{F}}_c(x)$ par l'application continue $\delta_{(x)} : f \to f(x)$ de $\left(F^E\right)_c$ (ou F^E) dans F est donc aussi compacte, donc $\mathcal{F}_c(x) \subset \overline{\mathcal{F}}_c(x)$ est bien relativement compacte dans F. Ceci ne suppose aucune condition spéciale sur E ou F. Soit maintenant K un compact de E. Appelons f_k la restriction d'une fonction f au compact K ; l'application $f \to f_k$ est évidemment continue (et même lipschitzienne) de $\left(F^E\right)_c$ dans $\left(F^K\right)_c$ (les semi-distances de $\left(F^K\right)_c$. sont les $\delta_{j,k}$ $j \in J$), l'image $\overline{\mathcal{F}}_{j,k}$ de $\overline{\mathcal{F}}_c$ par cette application est donc encore une partie compacte de $\left(F^E\right)_c$.Soient alors $j \in J$ et $\epsilon > 0$ il existe un ensemble fini d'éléments $f_{v,k}, v = 1, ..., n$ de $\overline{\mathcal{F}}_{c,k}$ tel que les boules $B_{j,k}\left(f_{v,k}, \frac{\epsilon}{3}\right)$ recouvrent $\overline{\mathcal{F}}_{c,k}$,autrement dit, pour toute $f_k \in \overline{\mathcal{F}}_{c,k}$ il existe Un v tel que $\delta_{j,k}\left(f_{v,k}, f_k\right) \leq \frac{\epsilon}{3}$ Mais un ensemble fini de fonctions continues $f_{v,k}$ est toujours équicontinu. Donc, pour tout a de E, il existe un voisinage $\mathcal{U}_a$ de a dans K tel que, pour tout $x \in \mathcal{U}$ et tout v ,on ait $\delta_j\left(f(a), f(x)\right) \leq$ donc, pour tout $x \in \mathcal{U}$ et tout $f \in \overline{\mathcal{F}}_c$:

$$\delta_j\left(f_{v,k}(a), f_{v,k}(x)\right) \leq \delta_j\left(f(a), f_v(a)\right) + \delta_j\left(f_v(a), f_v(x)\right) + \delta_j\left(f_v(x), f(x)\right) \leq \epsilon$$

ce qui prouve que l'ensemble $\overline{\mathcal{F}}_{k,c}$ de fonctions continues sur K est équicontinu. Mais celà ne prouve nullement que $\overline{\mathcal{F}}_c$ soit équicontinu sur E. Si par contre nous supposons E localement compact, alors, pour tout $a \in E$, il existe un voisinage compact K de a dans E, alors le $\mathcal{U}$ trouvé plus haut, voisinage de a dans K est aussi voisinage de a dans E montre que $\overline{\mathcal{F}}_c$ donc $\mathcal{F}$ est équicontinu en a. Les conditions 1) et 2) sont donc bien nécessaires si E est localement compact.

Corollraire 1.7 *Soit $\mathcal{F}$ un ensemble d'applications continues d'un espace topologique E dans un espace métrique F, ou toutes les boules fermées sont compactes (par exemple un espace vectoriel nomié de dimension finie). Pour que $\mathcal{F}$ soit relativement compact dans $\left(F^E\right)_c$, il suffit que $\mathcal{F}$ soit équicontinu, et que, pour tout x de E, $\mathcal{F}(x) = \{f(x), f \in \mathcal{F}\}$ soit borné dans F. Il suffit même, si E est connexe, que $\mathcal{F}(x_0)$ soit borné, pour un point particulier x_0 de E. La condition précédente est aussi nécessaire si E est localement compact.*

Démonstration.– Puisque toute boule fermée de F est compacte,« relativement compact » dans F équivaut à « borné ». La seule chose à montrer est donc que, si $\mathcal{F}(x_0)$ est borné pour un point x_0 de E, alors $\mathcal{F}(x)$ est borné, pour tout point x de E, lorsque E est connexe. Mais c'est une conséquence simple de l'équicontinuité. Appelons B l'ensemble des x de E pour lesquels $\mathcal{F}(x)$ est borné. Soit $a \in E$; d'après l'équicontinuité, il existe un voisinage U de a tel que $\delta\left(f(x), f(a)\right) \leq 1$ pour $x \in U$. Si alors $a \in B$, on a aussi $x \in B$ pour tout $x \in U$, donc $U \subset B$; donc B est ouvert. Si maintenant $a \in B$, il existe au moins un x de U tel que $a \in B$, c'est à- dire tel que :$\mathcal{F}(x)$ soit borné, alors $\mathcal{F}(a)$ est aussi borné ; donc $a \in B$, B est fermé. Donc B est ouvert et fermé dans E connexe ; si B contient un point x_0, c'est E tout entier.

Exemple 1.2 *On peut prendre $E = [0,1]$ et $F = \mathbb{C}$ Si une partie $\mathcal{F}$ du Banach $G = \left(C^{[0,1]}\right)_{cb} = \left(C^{[0,1]}\right)_c$ est relativement compacte, alors, pour tout x de $[0,1]$,$\mathcal{F}(x)$ est borné et et $\mathcal{F}(0)$ est équicontinue ,$\mathcal{F}$ est relativement compacte.Par exemple, si k est un nombre ≥ 0 l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions f continues complexes sur $[0,1]$ vérifiant $|f(0)| \leq 1$, $|f(x) - f0)| \leq kx$ pour tout x, est relativement compact dans G ; comme d'ailleurs il est fermé, il est compact.*

1.5 Applications aux espaces d'applications linéaires continues dans des espaces vectoriels topologiques.

On peut appliquer ce qui précède aux parties $\mathcal{F}$ de l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F ,ou E et F sont des espaces vectoriels topologiques ; l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est fermé

dans $\left(F^E\right)_c$,même si l'on munit $\left(F^E\right)_c$ de la topologie F^E de la convergence simple, et à fortiori pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de E
En effet ,pour $x, y \in E$, λ scalaire ,les fonctions :

$$f \to f(x+y), f(x), f(y)$$

$$f \to f(\lambda x), \lambda f(x)$$

sont continues de $\left(F^E\right)$ dans F ,l'image réciproque de 0 est donc fermée ; l'intersection de tous les fermés obtenus, pour x, y et λ variables, n'est autre que l'ensemble des applications linéaires de E dans F, qui est donc fermé dansF^E ; en prenant l'intersection avec $\left(F^E\right)_c$,on voit que l'espace $\mathcal{L}\left(E, F\right)$ des applications linéaires continues de E dans F est bien fermé dans $\left(F^E\right)_c$ déjà pour la topologie de la convergence simple induite par F^E .Il en résulte que les parties $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}\left(E, F\right)$ relativements compacts dans $\left(F^E\right)_c$ .On peut donc répéter exactement les théorèmes d'Ascoli et leurs corollaires, en remplaçant$\left(F^E\right)_c$. par $\mathcal{L}_c\left(E, F\right)$.$\left(F^E\right)$ par $\mathcal{L}_s\left(E, F\right)$; nous ne le ferons pas.

Théorèm 1.5 *Toute partie équicontinue $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}\left(E, F\right)$ est bornée pour toute topologie $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}\left(E, F\right)$ définie par un ensemble $\mathcal{G}$ de parties bornées de E*

Démonstration.– Il suffit de prendre pour $\mathcal{G}$ l'ensemble de toutes les parties bornées, puisqu'il donne la plus fine des topologies considérées. Bien que ce soit vrai dans tous les cas, nous nous limiterons au.cas où la topologie de F est définie par une famille de semi-normes $q_j, j \in J$. Soit $\mathcal{F}$ équicontinue dans $\mathcal{L}\left(E, F\right)$, et soit A bornée dans E. Pour tout $j \in J$, il existe un voisinage $\mathcal{U}_j$ de 0 dans E tel que toutes les $q_j \circ u, u \in \mathcal{F}$ soient bornées par l sur $\mathcal{U}_j$, d'après l'équicontinuité. Puisque A est bornée, il existe $\lambda_j > 0$ tel que $A \subset \lambda_j \mathcal{U}_j$; alors $q_j \circ u$ est bornée par λ_j sur A pour $u \in \mathcal{F}$; donc q_j est bornée par λ_j sur $\displaystyle\bigcup_{u \in \mathcal{F}} u(A)$, celà prouve bien que $\displaystyle\bigcup_{u \in \mathcal{F}} u(A)$ est bornée, donc que $\mathcal{F}$ est bornée dans $\mathcal{L}_b\left(E, F\right)$

Théorèm 1.6 *Pour qu'une partie $\mathcal{F}$ du dual E' d'un espace vectoriel topologique localement convexe E soit équicontinue, il faut et il suffit que son polaire dans E soit un voisinage de 0, ou aussi qu'elle soit contenue dans le polaire d'un voisinage de 0 de E.*

Démonstration.– Les deux conditions données sont évidemment équivalentes, car, si $\mathcal{F}^\circ$ est un voisinage de 0, $\mathcal{F}$ est contenue dans $\mathcal{F}^{\circ\circ}$, polaire d'un voisinage de 0 ; inversement, si $\mathcal{F}$ est contenue dans le polaire $\mathcal{U}^\circ$ d'un voisinage de 0 $\mathcal{U}$, alors $\mathcal{F}^\circ$ contient $\mathcal{U}^\circ \supset \mathcal{U}$, qui est un voisinage de O.
Dire que $\mathcal{F}$ est équicontinue, c'est dire qu'elle l'est à l'origine, c'est-à-dire que, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de 0, tel que $x \in \mathcal{U}$ entraîne $|u(x)| \leq \epsilon$ pour $u \in \mathcal{F}$; par homothétie, il suffit pour celà que ce soit vrai pour $\epsilon = 1$ mais alors celà revient à dire que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}^\circ$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est contenue dans le polaire d'un voisinage de 0 de E.

Théorèm 1.7 *Soit E un espace vectoriel topologique. Si on munit le dual E' de la topologie* -faible $E'_\sigma = \sigma(E', E)$, ou de la topologie E'_c de la convergence uniforme sur tout compact de E , toute partie équicontinue $\mathcal{F}$de $E' = \mathcal{L}\left(E, \mathbb{K}\right)$, est relativement compacte*

Démonstration.– Il suffit d'appliquer le corollaire du troisième théorème d'Ascoli, avec $F = \mathbb{K}$, corps des scalaires. Ici il existe bien un point :$x_0 \in E$ tel que :$\mathcal{F}(x_0)$ soit borné, à savoir 0 ; de toute facon, le théorème précédent montre que, pour tout :$x \in E$, $\mathcal{F}(x)$ est borné dans F (cela revient à dire que $\mathcal{F}$ est bornée pour la topologie $\mathcal{L}_s\left(E, F\right)$.)

Définition 1.5.1 *On dit qu'un espace topologique localement convexe E est semi-réflexif, si E est égal à E'' ,en tant qu'espace vectoriel ; et que E est réjlexif si en outre il a la topologie (*-fort) de E''.*

Théorèm 1.8 (THÉORÈME DE MACKEY) *Pour qu'un espace vectoriel topologique localement convexe E soit semi-réflexif, il faut et il suffit que les parties bornées de E soient relativement compactes pour la topologie affaiblie $\sigma(E, E')$.*

Démonstration.–1°) Supposons E semi-réflexif. Soit B une partie bornée de E ; son polaire B_0 dans $E^{'}$ est, par définition, un voisinage de 0 de la topologie *-forte de $E^{'}$.Alors, dans la polarité entre $E^{'}$ et son polarité $E^{''} = E$,B a pour polaire un voisinage de 0 dans $E^{'}$ donc est une partie équicontinue de $E^{''}$ donc, d'après le théorème précédent, B est relativement compacte pour la topologie $\sigma(E, E^{'})$.
2°) Inversement, supposons cette condition réalisée. Soit $E^{''}$ le bidual , $E \subset E^{''}$,et considérons la polarité entre $E^{'}$ et $E^{''}$, soit $x^{''} \in E^{''}$ c'est une forme linéaire continue sur $E^{'}$ donc il existe un voisinage de 0 $\mathcal{U}$ dans $E^{'}$ tel que $x^{''}$ soit majoré en module par l sur $\mathcal{U}$ c'est-à-dire soit dans son polaire : $x^{''} \in \mathcal{U}^{\circ}$.Mais $\mathcal{U}$ voisinage *-fort de 0 dans $E^{'}$ contient le polaire B° d'une partie bornée B de E donc $\mathcal{U}^{\circ} \subset B^{\circ\circ}$,$x^{''} \in B^{\circ\circ}$.Mais $B^{\circ\circ}$ est l'enveloppe convexe équilibrée $\sigma(E^{''}, E^{'})$ fermée de B ; l'enveloppe convexe équilibrée est encore une partie bornée B_1 de E son adhérence $\overline{B_1}$ dans $\sigma(E, E^{'})$ est compacte par hypothèse, donc encore fermée dans $\sigma(E^{''}, E^{'})$, donc $\overline{B_1} = B^{\circ\circ}$ donc $B^{\circ\circ}$ est dans E par suit $x^{''}$ aussi dans E donc $E^{''} = E$,et E est aussi semi-reflixife.