القياس و المكاملة

المستوى : ثالثة رياضيات

تمارين حول التطبيقات القيوسة، القياسات و التكامل.

التمرين الأول:

1. أثبت أنه إذا كان $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ قابل للإشتقاق فإنّ $f' : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ قيوس.
2. نعتبر التابع f المعرف على $\mathbb{R}^2$ كما يلي:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ (x,y) \neq (0,0); \\ 0,\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

هل f مستمر على $\mathbb{R}^2$ ؟ أثبت أنّ $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ قيوس.

3. أثبت أنّ المجموعة $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 \sin x \geq 3\}$ تنتمي إلى $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

التمرين الثاني:

ليكن $m : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty[$ التطبيق المعرف كما يلي:

$$m(A) = \begin{cases} 0,\ A = \emptyset; \\ 2,\ A = \mathbb{N}; \\ 1,\ A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \backslash \{\emptyset, \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

هل m قياس موجب؟ قياس خارجي؟ ماذا تستنتج؟

التمرين الثالث:

لتكن $E = \{1,2,3,4\}$ و $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}\}$ العشيرة على E المولدة من الفئة $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{1,2\}\}$ (أنظر التمرين الثاني من سلسلة التمارين الأولى) و

$$\forall A \in \mathcal{A} : \quad \delta_a(A) = \begin{cases} 1,\ a \in A; \\ 0,\ a \notin A \end{cases}$$

قياس ديراك حيث $a \in E$. نعتبر

$$\forall x \in E : \quad \varphi(x) = \alpha \chi_{\{1\}}(x) + \beta \chi_{\{2,3,4\}}(x)$$

حيث $\alpha, \beta \in [0, +\infty[$.

1. أحسب

$$\int_E \varphi \, d\delta_a$$

الذي يمثل تكامل φ على E نسبة إلى القياس الموجب δ_a.

2. نستبدل δ_a بقياس العد μ الوارد في التمرين الخامس من سلسلة التمارين الأولى. أحسب

$$\int_E \varphi \, d\mu.$$

التمرين الرابع:

ليكن $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ الفضاء المقاس حيث μ قياس العد و ليكن f تابع معرف على $\mathbb{N}$ موجب. أثبت أنّ

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n).$$

تطبيق: بإعتبار $g(n) = q^n$ حيث $q \in]0,1[$ أحسب

$$\int_{\mathbb{N}} g \, d\mu.$$

حل التمرين الأول:

1. نعتبر

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}: \quad f_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)).$$

لاحظ أنّ f_n مستمر و بالتالي $f_n : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ قيوس. من كون f' نهاية بسيطة لمتتالية توابع قيوسة لأن

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(x)$$

التابع $f' : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ قيوس.

2. التابع f ليس مستمر على $\mathbb{R}^2$ لأنه ليس مستمر عند $(0,0)$ (يمكن إستعمال مثلا الإحداثيات القطبية). نضع

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad f_n(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + \frac{1}{n}}.$$

لاحظ أنّ f_n مستمر على $\mathbb{R}^2$ و بالتالي $f_n : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ قيوس. من كون f نهاية بسيطة لمتتالية توابع قيوسة لأن

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$$

ينتج f قيوس من $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ في $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

3. نضع

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad g(x,y) = y^2 \sin x.$$

التابع g مستمر على $\mathbb{R}^2$ و منه $g : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ قيوس. من كون $[3, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (لأنه مغلق) و g قيوس ينتج

$A = g^{-1}([3, +\infty[) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

حل التمرين الثاني:

لاحظ أنّ $A_n = \{n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ غير متقاطعة مثنى مثنى، $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}, m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 2$ و $m(A_n) = 1$.
لو نفرض

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$$

يكون

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} 1 = 2 < +\infty$$

و هى يناقض كون السلسلة العددية

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} 1$$

متباعدة حسب الشرط اللازم للتقارب. إذن m ليس قياس موجب.

إن m قياس خارجي. بالفعل، $m(\emptyset) = 0$. من جهة أخرى، إذا كان $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ بحيث $A \subset B$ فإننا نناقش حالتين:

- إذا كان $B = \mathbb{N}$ فإنّ $m(B) = 2 \geq m(A)$ مهما يكن $A \subset \mathbb{N}$.
- إذا كان $B \neq \mathbb{N}$ فإننا نميز:
  * $B = \emptyset$ و بالتالي $A = \emptyset$ و عليه $m(B) = m(A) = 0$؛
  * $B \neq \emptyset$ ينتج $m(B) = 1 \geq m(A)$ مهما يكن $A \subset B$.

أيضا، بإعتبار $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ينتج:

- إذا كان $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ فإنه $A_n = \emptyset$ مهما يكن $n \in \mathbb{N}$ و بالتالي

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=0=\sum_{n\in\mathbb{N}}\underbrace{m(A_n)}_{=0};$$

• إذا كان $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n=\mathbb{N}$ فإنه واحدة من الحالتين التاليتين محقق على الأقل:

* يوجد $n_0\in\mathbb{N}$ بحيث $A_{n_0}=\mathbb{N}$ و بالتالي $m(A_{n_0})=2$ الذي يؤدي إلى

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=2\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}m(A_n);$$

* يوجد $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ بحيث $A_{n_1},A_{n_2}\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset,\mathbb{N}\}$ و منه $m(A_{n_1})=m(A_{n_2})=1$ الذي يؤدي كذلك إلى

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=2\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}m(A_n);$$

• إذا كان $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset,\mathbb{N}\}$ فإنه يوجد $n_0\in\mathbb{N}$ بحيث $A_{n_0}\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset,\mathbb{N}\}$. بالتالي $m(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=m(A_{n_0})=1$ و عليه

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=1\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}m(A_n).$$

خلاصة: m قياس خارجي على $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

نستنتج أنه ليس كل قياس خارجي هو قياس موجب.

حل التمرين الثالث:

1. نضع $A_1=\{1\}$ و $A_2=\{2,3,4\}$. لاحظ أنّ $A_1,A_2\in\mathcal{A}$. من جهة أخرى، $A_1\cap A_2=\emptyset$ و $A_1\cup A_2=E$ مما يعني أنّ $\{A_1,A_2\}$ تشكل تجزئة (منتهية) لـ E. إذن φ تابع بسيط (درجي) موجب و منه

$$\int_E\varphi\,d\delta_a=\alpha\delta_a(A_1)+\beta\delta_a(A_2)=\begin{cases}\alpha,\ a\in A_1;\\ \beta,\ a\in A_2.\end{cases}$$

2. لدينا

$$\int_E\varphi\,d\mu=\alpha\mu(A_1)+\beta\mu(A_2)=\alpha card(A_1)+\beta card(A_2)=\alpha.1+\beta.3=\alpha+3\beta.$$

حل التمرين الرابع:

لاحظ أنه يمكن كتابة f على الشكل:

$$f=\sum_{n\in\mathbb{N}}f(n)\chi_{\{n\}}.$$

نضع $f_n=f(n)\chi_{\{n\}}$ مهما يكن $n\in\mathbb{N}$. بما أنّ $\{n\}$ مجموعة قيوسة كون $\{n\}\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$ فإنّ $\chi_{\{n\}}$ تابع قيوس و بالتالي $f_n=f(n)\chi_{\{n\}}$ تابع قيوس الذي عبارة عن ضرب تابع قيوس بسلمية $f(n)$. نشير إلى أنّ f_n موجب كون $f(n)$ عدد موجب. حسب القضية 1.1.6 التابع f قيوس و لدينا

$$\int_{\mathbb{N}}f\,d\mu=\int_{\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}}f(n)\chi_{\{n\}}\,d\mu=\sum_{n\in\mathbb{N}}f(n)\int_{\mathbb{N}}\chi_{\{n\}}\,d\mu=\sum_{n\in\mathbb{N}}f(n)\mu(\{n\})=\sum_{n\in\mathbb{N}}f(n).1=\sum_{n\in\mathbb{N}}f(n).$$

بإعتبار $g(n)=q^n$ حيث $q\in]0,1[$ ينتج

$$\int_{\mathbb{N}}g\,d\mu=\sum_{n\in\mathbb{N}}q^n=\frac{1}{1-q}$$

وبالتالي تكامل g على $\mathbb{N}$ نسبة إلى القياس الموجب μ هو مجموع سلسلة هندسية أساسها $q\in]0,1[$.