TD-02

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel et $x \in E$. Montrer qu'il existe une fonctionnelle $x' \in E'$ telle que $x'(x) = \|x\|$.

Exercice 2 Soit E un $\mathbb{R}-$espace Banach. G un s.e.v de E et $g \in G'$. Montrer qu'il existe $f \in E'$, prolongeant g et telle que $\|g\|_{G'} = \|f\|_{E'}$.

Exercice 3 Soit E un espace de Banach et $x_0 \in E$. Montrer qu'il existe $f \in E'$, tel que $\|f\|_{E'} = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|$. Déduire pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \max\{f(x);\ f \in E',\ \|f\|_{E'} \leqslant 1\}.$$

Exercice 4 Soit E un espace de Banach. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} i: \quad & E \longrightarrow E'' = (E')', \\ & x \mapsto e_x; \quad e_x(f) = f(x). \end{aligned}$$

est une isométrie.

Exercice 5 Soient E un espace vectoriel et F un s.e.v de E. Montrer

$$\Big(F\text{dense dans E}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\{\mathrm{g} \in \mathrm{E}' :\ \mathrm{g}\,|_{\mathrm{F}}= 0\} = \{0\}\Big).$$

Exercice 6 Soit E un e.v.n. réel et soient $x_1; x_2, ..., x_n \in E$; $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$: Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe $f \in E'$ de norme $\leqslant 1$ telle que $f(x_i) = c_i$ pour tout i.
2. $\lambda_1 c_1 + ... + \lambda_n c_n \leqslant \|\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n\|$ pour tout $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Exercice 7* Soit E un espace de Banach.

1. Soit B une partie de E. Montrer que B est borné si et seulement si pour tout $f \in E'$, $f(B)$ est borné.
2. Soit B' une partie de E'. Montrer que B' est borné dans E' si et seulement si pour tout $x \in E$, $\{f(x) : f \in B'\}$ est borné.