Chapitre 6

Coloration

1. Définitions

1.1 Introduction

Les problèmes de coloration de graphes apparaissent dans de nombreux contextes. Un premier exemple est celui de la planification d'une session d'examens d'une université. Si V est l'ensemble des cours et si une arête lie deux cours ayant au moins un étudiant en commun, le nombre chromatique est le nombre minimum de périodes permettant de planifier des examens, de telle sorte que chaque étudiant puisse passer tous ses examens. Un deuxième exemple bien connu est celui de la coloration des pays d'une carte de géographie, de telle sorte que deux pays voisins, c'est-à-dire ayant une frontière commune, soient de couleurs différentes.

1. Définitions

1.2 Coloration des sommets

Une « coloration des sommets » d'un graphe G est une affectation de couleurs aux sommets telle que chaque arête de G ait ses deux extrémités de couleur différente. On cherche généralement à déterminer une coloration utilisant aussi peu de couleurs que possible.

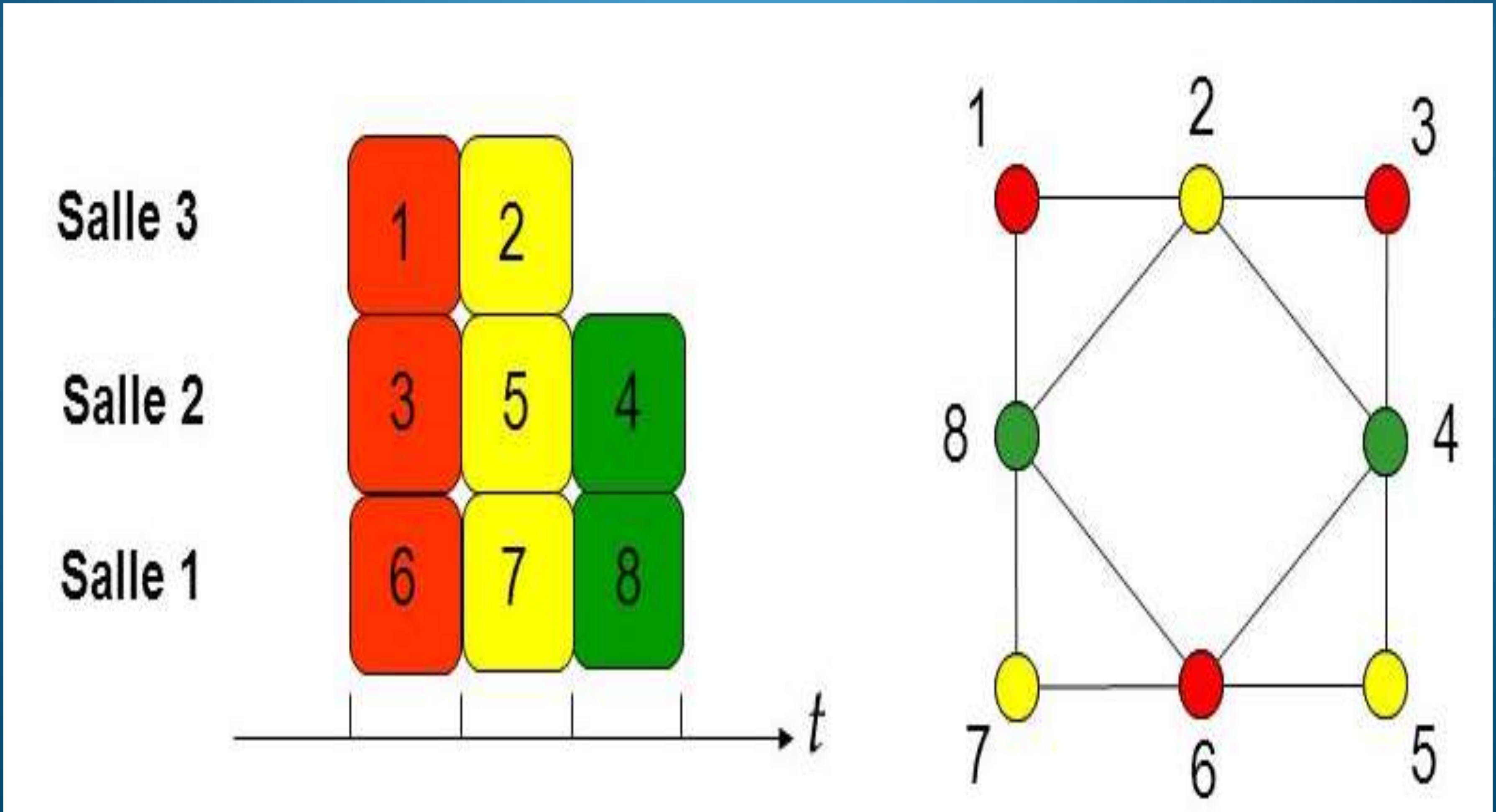
Le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorer les sommets d'un graphe G est appelé « **le nombre chromatique** » de G et est noté **$\chi(G)$**.

Un graphe est dit **p-chromatique** si ses sommets admettent une coloration en **p** couleurs.

1. Définitions

Exemple :

Obtenir un bon emploi de temps c'est un problème très difficile



1. Définitions

1.3 Coloration des des arêtes

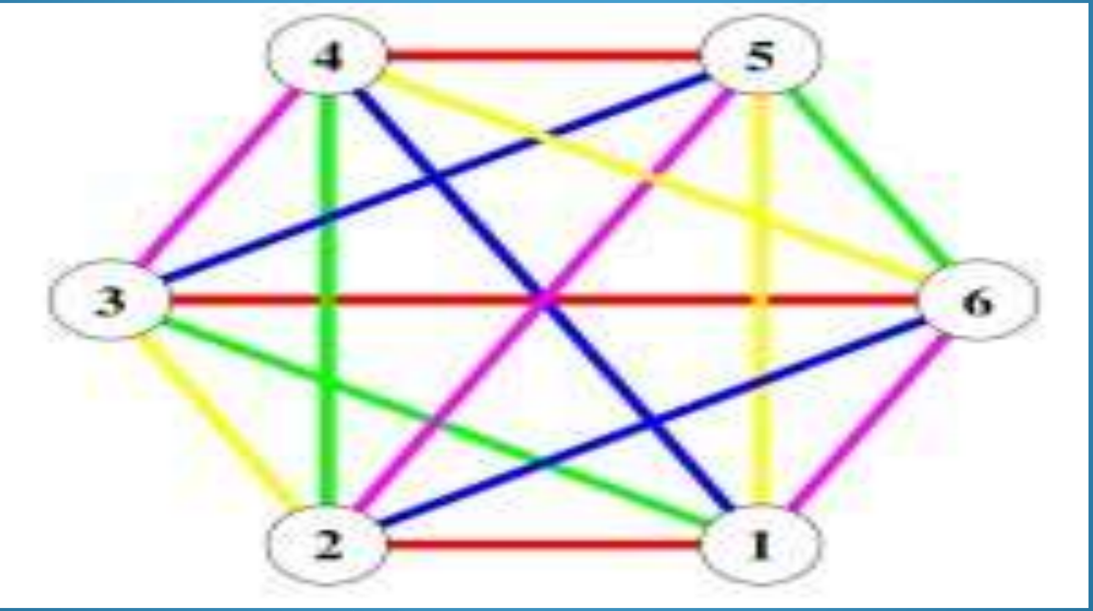
Une « coloration des arêtes » d'un graphe G est une affectation de couleurs aux arêtes telle que les arêtes ayant une extrémité en commun soient de couleur différente. On cherche généralement à déterminer une coloration utilisant aussi peu de couleurs que possible.

Le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorer les arêtes d'un graphe G s'appelle « **l'indice chromatique** » de G et est noté **q(G)**.

1. Définitions

Problème:

Dans une petite classe de six étudiants, certains élèves sont amis et d'autres non. La relation d'amitié est réciproque : si A est ami avec B, alors B est ami avec A.



On peut écrire ce problème en termes de graphes, en prenant 6 sommets pour les six étudiants et en reliant deux étudiants dès qu'ils sont amis.

1. Définitions

1.4 Propositions

Propriété 1: Le nb chromatique du graphe complet Kn est **n**.

Propriété 2: Soit G un graphe. Si G contient un sous-graphe complet d'ordre n, alors **γ(G) > n**.

Propriété 3: Soit G un graphe d'ordre n, alors **γ(G) ≤ n**.

Propriété 4: Soit G un graphe et soit ω(*G*) l'ordre de sa plus grande clique (Une clique est un graphe dans lequel chaque paire de sommets est liée par une arête), alors **γ(G) ≥ ω(G).**

Théorème de Brooks : Considérons un graphe G et soit r le plus grand des degrés des sommets. Alors : **γ (G) ≤ r+1**.

Théorème de Berge (1970): l'indice chromatique d'un graphe biparti de degré maximum r est ***q*(G)= r**.

2. algorithmes de coloration

2.1 Algorithme glouton

Les algorithmes glouton sont couramment utilisés dans la résolution de problèmes.

Le principe de tels algorithmes consiste à choisir des solutions locales optimales d'un problème dans le but d'obtenir une solution optimale globale au problème. Dans le cas du coloriage de graphe, cela va consister à colorier les sommets un par un avec la plus petite couleur possible ; l'ensemble des couleurs possibles étant donné par les couleurs de ses voisins. L'ordre dans lequel les sommets sont traités définit les différentes variantes de d'algorithme. Une méthode est de colorer les sommets par ordre de difficultés décroissantes.

2. algorithmes de coloration

2.1 Algorithme glouton de Welsh & Powell

2.1.1. Principe

L'algorithme de Welsh & Powell consiste ainsi à colorer séquentiellement le graphe en visitant les sommets par ordre de degré décroissant.

L'idée est que les sommets ayant beaucoup de voisins seront plus difficiles à colorer, et donc il faut les colorer en premier.

Il y a une certaine procédure à respecter afin de mettre en œuvre cet algorithme.

2. algorithmes de coloration

2.1 Algorithme glouton de Welsh & Powell

2.1.2 Procédure

1. Repérer le degré de chaque sommet.

2. Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants

3. Attribuer au 1er sommet (A) de la liste une couleur.

4. Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).

5. Suivre (si possible) la liste jusqu'au prochain sommet (C) qui ne soit adjacent ni à A ni à B.

6. Continuer jusqu'à ce que la liste soit finie.

7. Prendre une deuxième couleur pour le premier sommet (D) non encore coloré de la liste.

8. Répéter 4 à 7 et continuer jusqu'à coloré tous les sommets

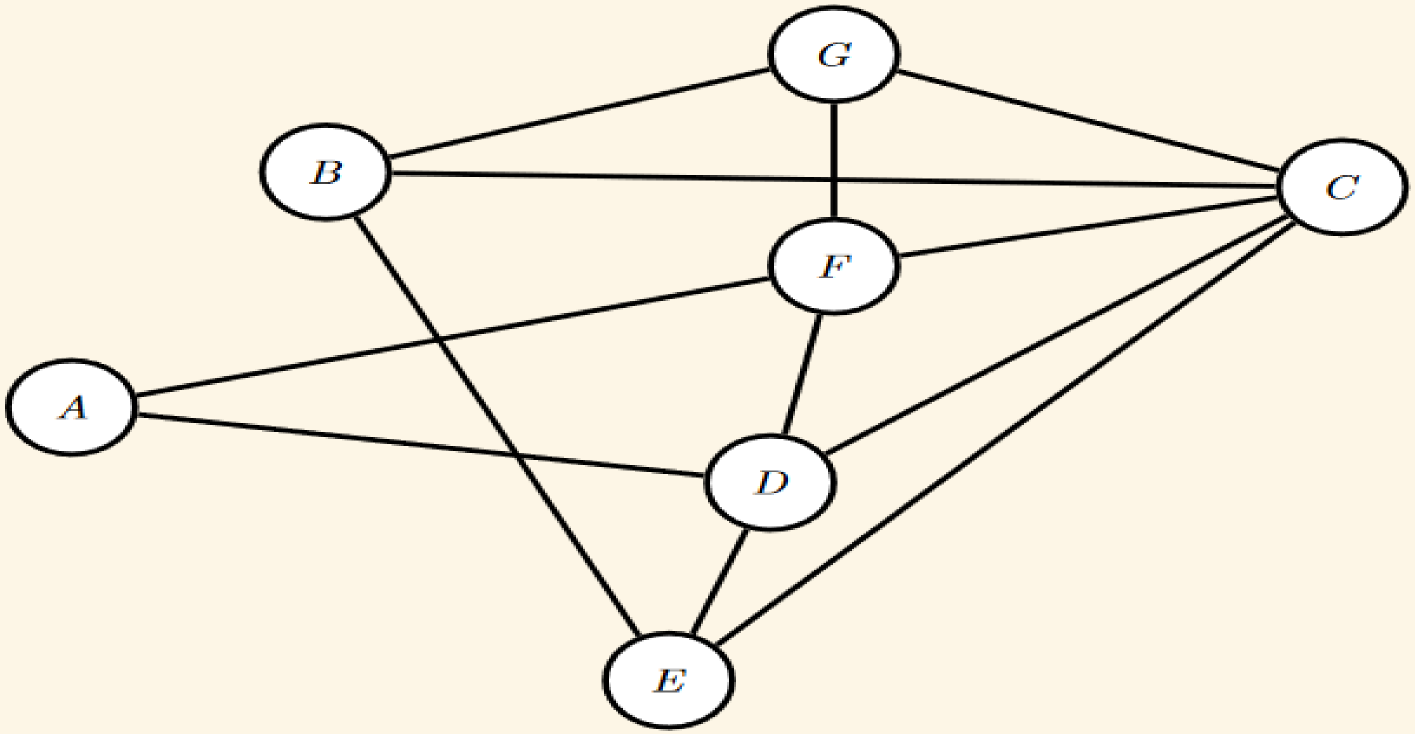
2. algorithmes de coloration

2.1 Algorithme glouton de Welsh & Powell

2.1.3 Exemple

On peut classer les sommets par degré décroissant, puis les colorer :

Point	C	D	F	B	E	G	A
Degré	5	4	4	3	3	3	2



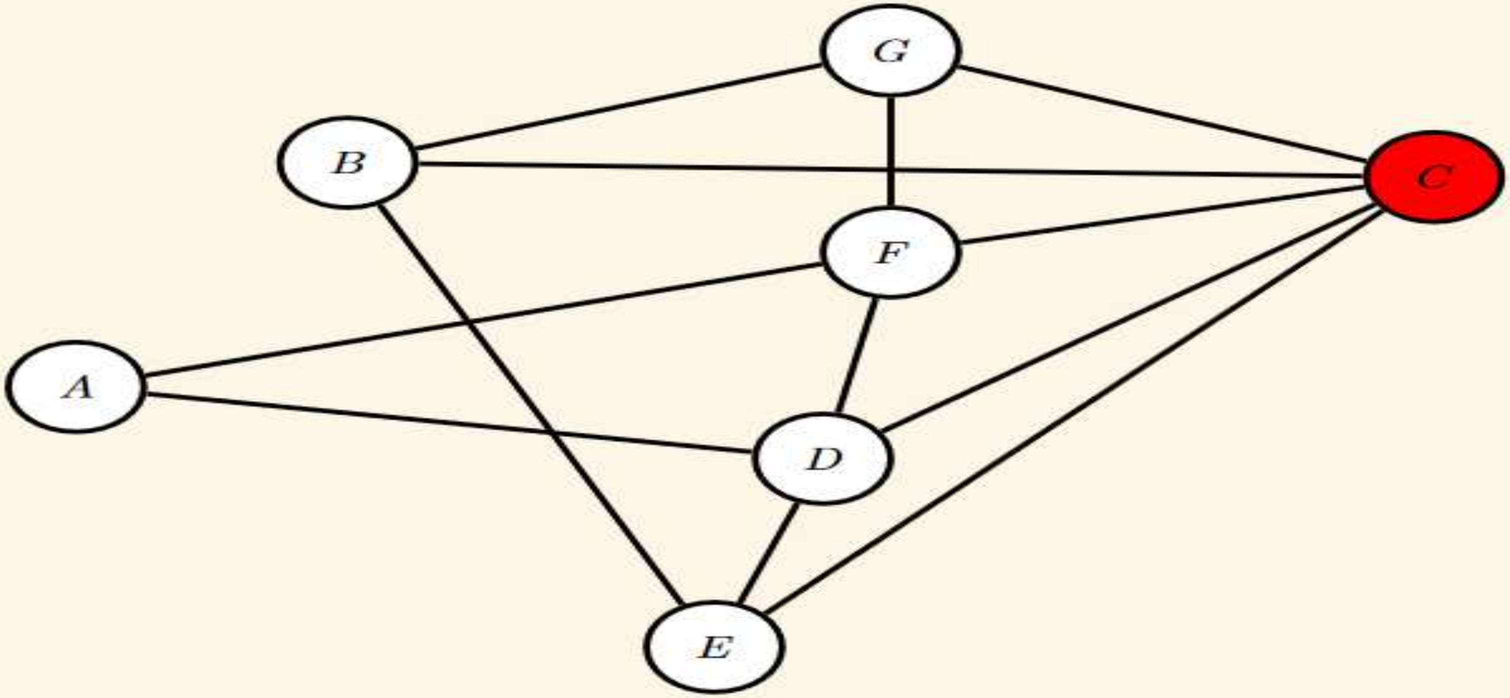
2. algorithmes de coloration

2.1 Algorithme glouton de Welsh & Powell

2.1.3 Exemple

Une coloration pourrait être :
on colorie C en rouge; puis dans l'ordre décroissant...

Point	C	D	F	B	E	G	A
Degré	5	4	4	3	3	3	2



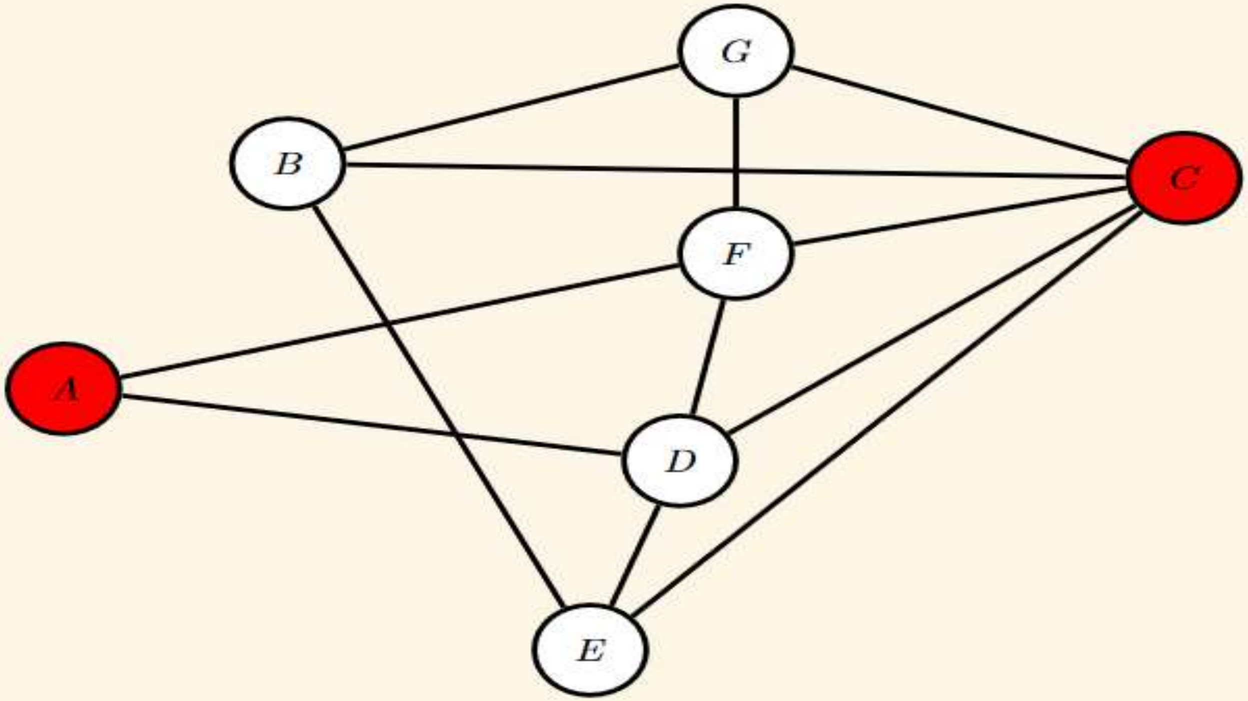
2. algorithmes de coloration

2.1 Algorithme glouton de Welsh & Powell

2.1.3 Exemple

Une coloration pourrait être :
on colorie C en rouge; puis dans l'ordre décroissant, le sommet non adjacent A en rouge.

Point	C	D	F	B	E	G	A
Degré	5	4	4	3	3	3	2



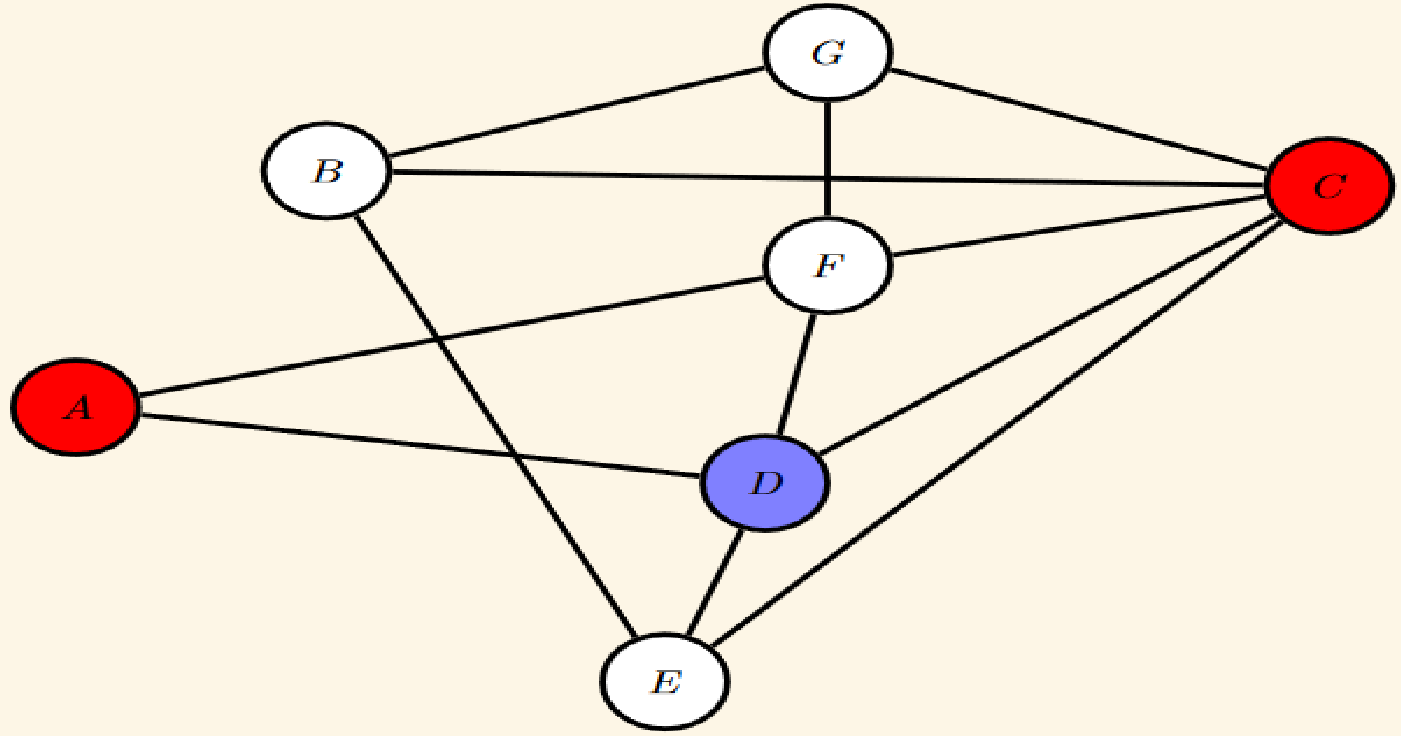
2. algorithmes de coloration

2.1 Algorithme glouton de Welsh & Powell

2.1.3 Exemple

Puis on change de couleur, on colorie D en bleu; puis dans l'ordre décroissant...

Point	C	D	F	B	E	G	A
Degré	5	4	4	3	3	3	2



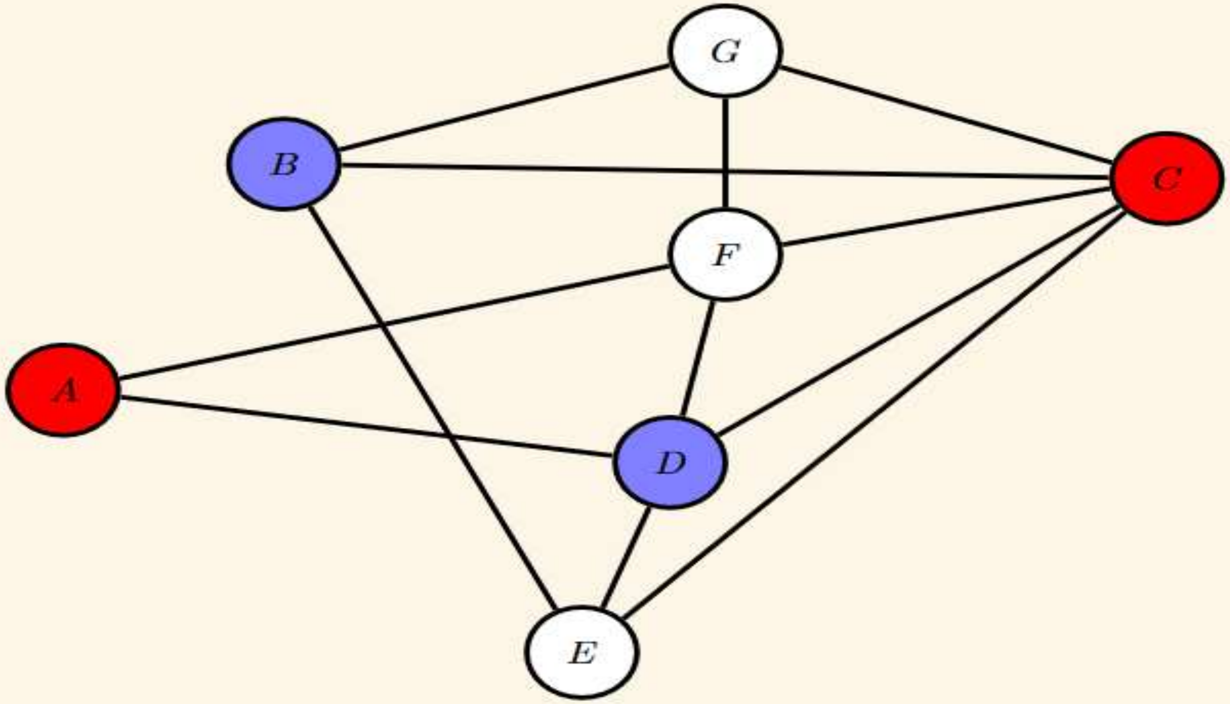
2. algorithmes de coloration

2.1 Algorithme glouton de Welsh & Powell

2.1.3 Exemple

Puis on change de couleur, on colorie D en bleu; puis dans l'ordre décroissant, le sommet non adjacent B en bleu.

Point	C	D	F	B	E	G	A
Degré	5	4	4	3	3	3	2



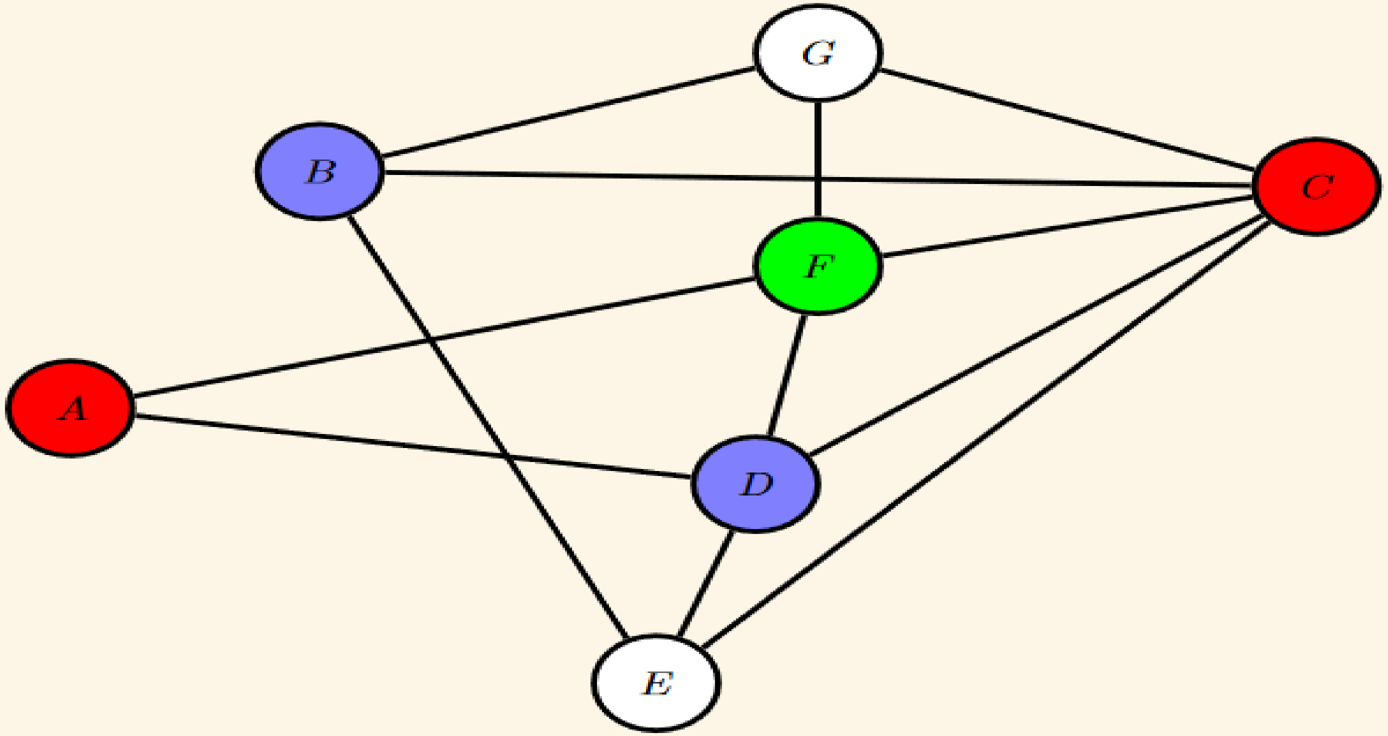
2. algorithmes de coloration

2.1 Algorithme glouton de Welsh & Powell

2.1.3 Exemple

Puis on change de couleur, on colorie F en vert; puis dans l'ordre décroissant...

Point	C	D	F	B	E	G	A
Degré	5	4	4	3	3	3	2



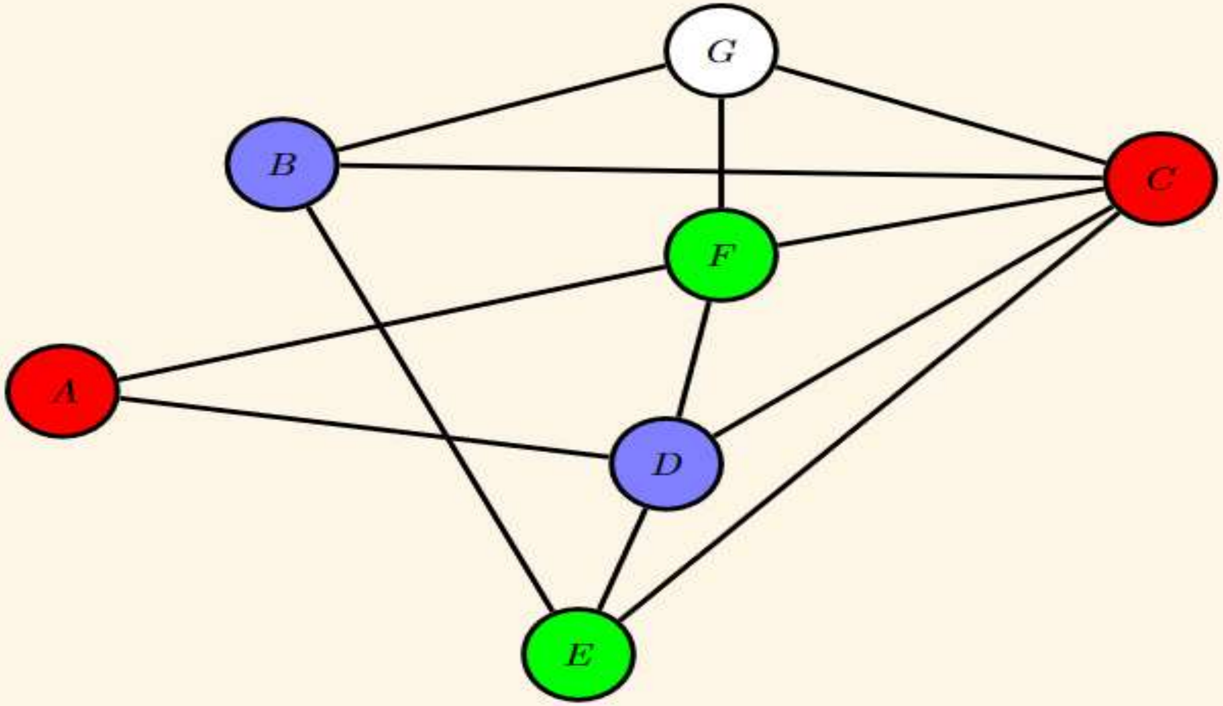
2. algorithmes de coloration

2.1 Algorithme glouton de Welsh & Powell

2.1.3 Exemple

Puis on change de couleur, on colorie F en vert; puis dans l'ordre décroissant, le sommet non adjacent E en vert.

Point	C	D	F	B	E	G	A
Degré	5	4	4	3	3	3	2



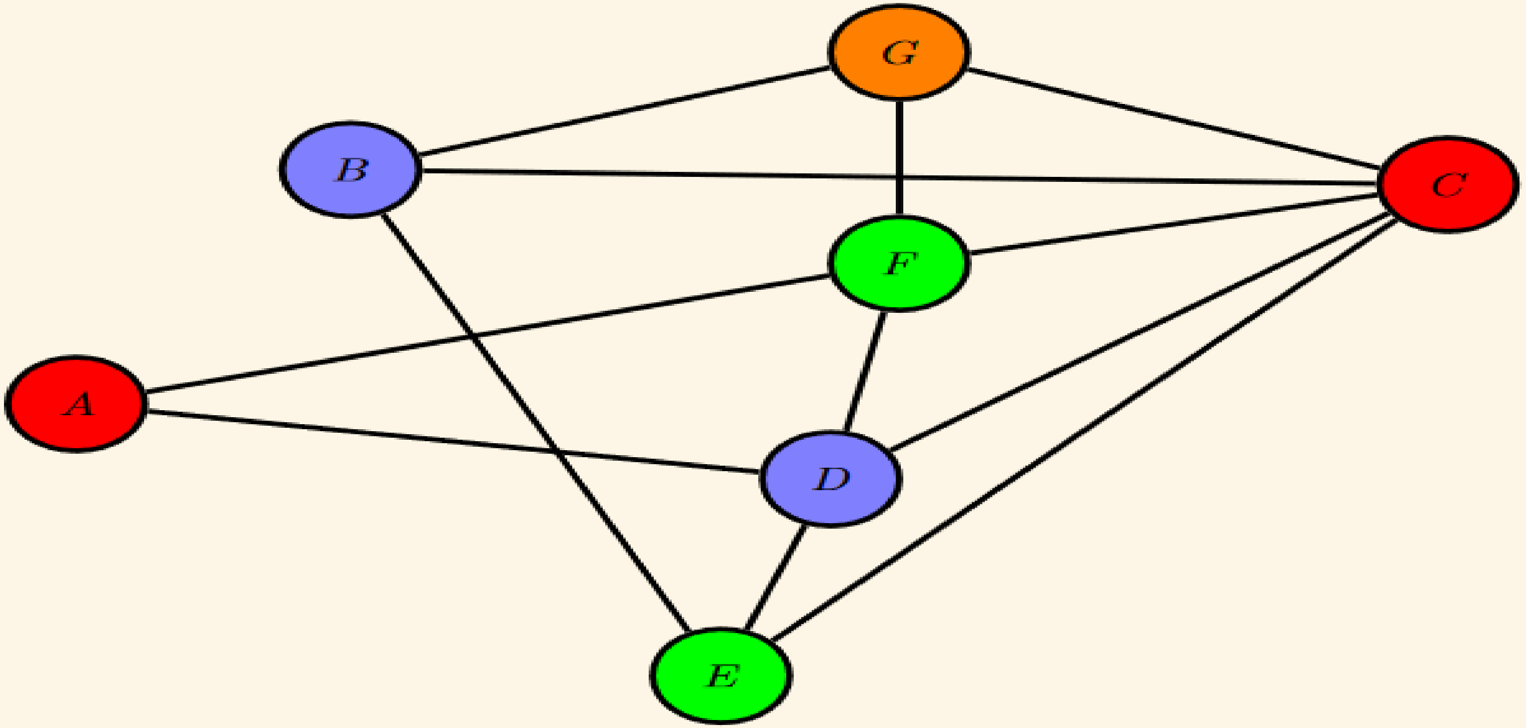
2. algorithmes de coloration

2.1 Algorithme glouton de Welsh & Powell

2.1.3 Exemple

Enfin, on change de couleur, on colorie G en orange.

Point	C	D	F	B	E	G	A
Degré	5	4	4	3	3	3	2



2. algorithmes de coloration

2.2 Algorithme DSATUR

2.2.1 Principe

DSATUR est un algorithme de coloration de graphes créé par Daniel Brélaz en 1979 à l'EPFL (École polytechnique fédérale de Lausanne).

Il s'agit d'un algorithme de coloration séquentiel par heuristique.

DSAT est l'abréviation de degré saturation et calculer de la manière suivante :

- Si aucun voisin de x est colorié, alors DSAT(x) = le degré de x
- Sinon, DSAT(x) = le nombre de couleurs différentes utilisées dans le voisinage de x

2. algorithmes de coloration

2.2 Algorithme DSATUR

2.2.1 Procédure

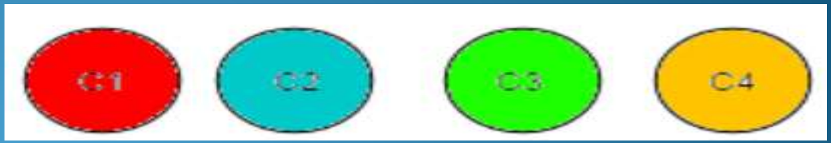
Au départ le graphe n’est pas colorié

1. Ordonner les sommets par ordre décroissant de degré.
2. Colorer un sommet de degré maximum avec la couleur 1.
3. Choisir un sommet non coloré avec DSAT maximum. Si conflit choisir celui avec degré maximum.
4. Colorer ce sommet par la plus petite couleur possible
5. Si tous les sommets sont colorés alors stop. Sinon aller en 3.

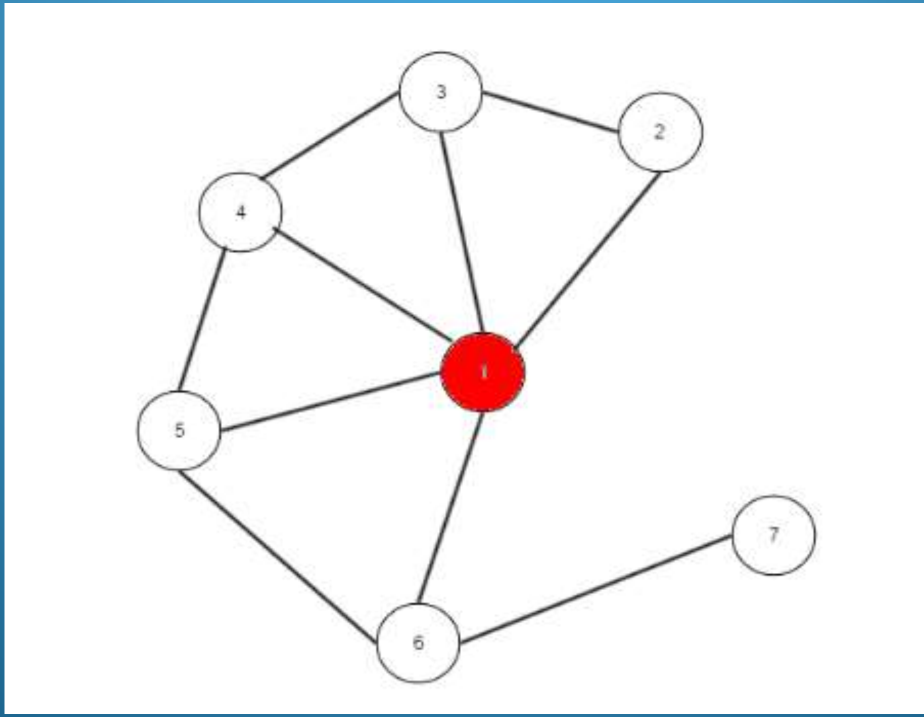
2. algorithmes de coloration

2.2 Algorithme DSATUR

2.2.3 Exemple

Soit les couleurs hiérarchisées 

On prend le sommet de plus haut degré, soit le sommet 1.
On lui attribue la couleur minimale, soit C1 :

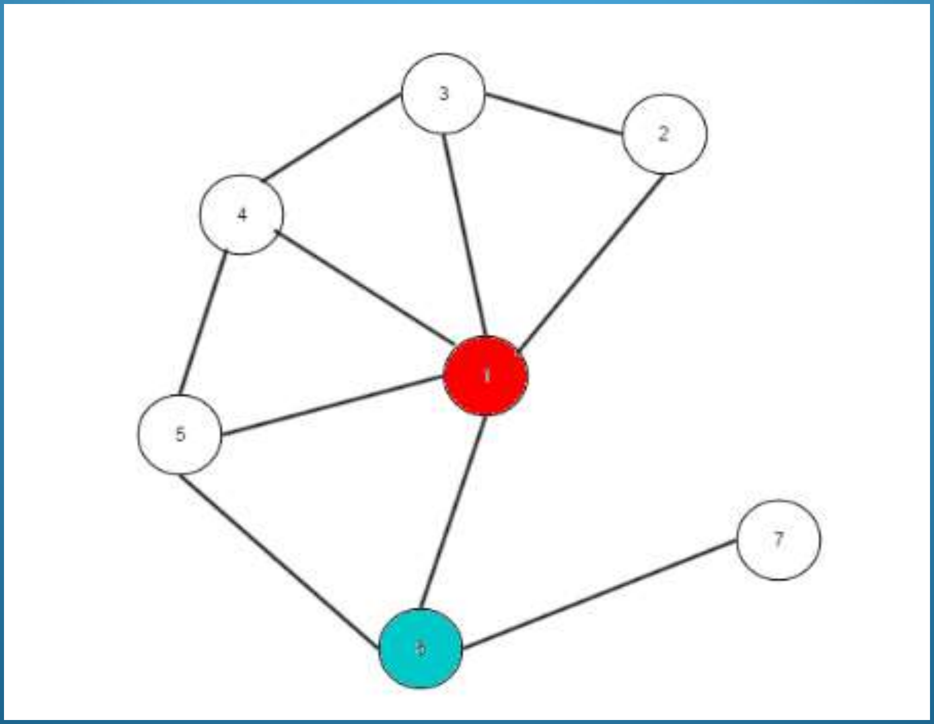


2. algorithmes de coloration

2.2 Algorithme DSATUR

2.2.3 Exemple

Puis, on regarde plus un voisin du sommet 1 étant de plus haut degré: Nous allons prendre le sommet 6 et en lui attribuer une couleur minimale, mais différente de la couleur du sommet : On prend C2 :

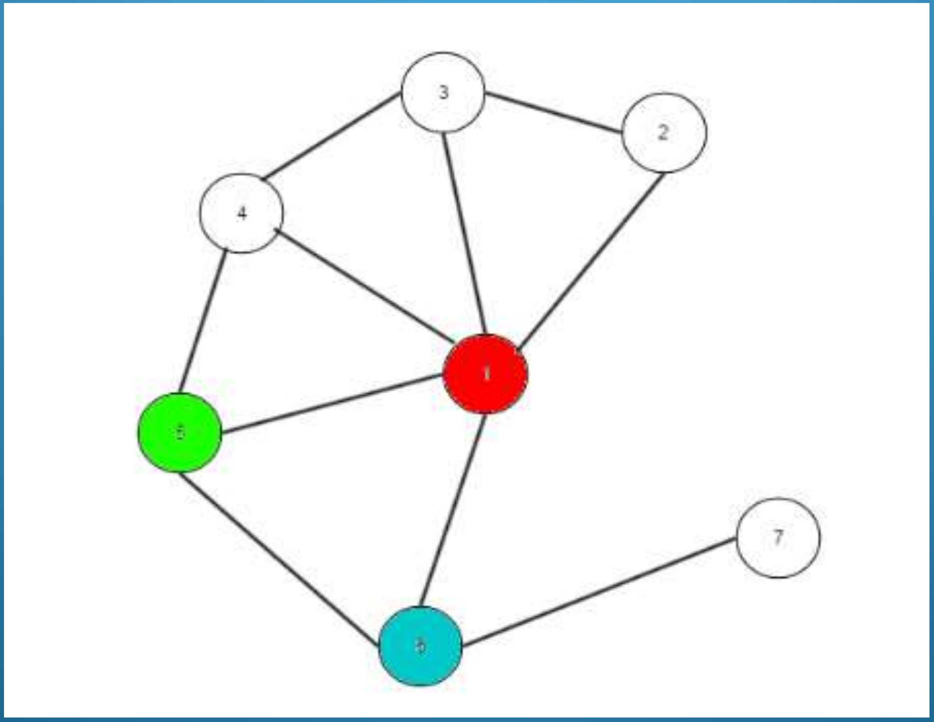


2. algorithmes de coloration

2.2 Algorithme DSATUR

2.2.3 Exemple

On fait la même chose pour le voisin du sommet étant de plus haut degré : le sommet 5. On lui attribue une couleur minimale différente de celle de ses voisins : la couleur C3 :

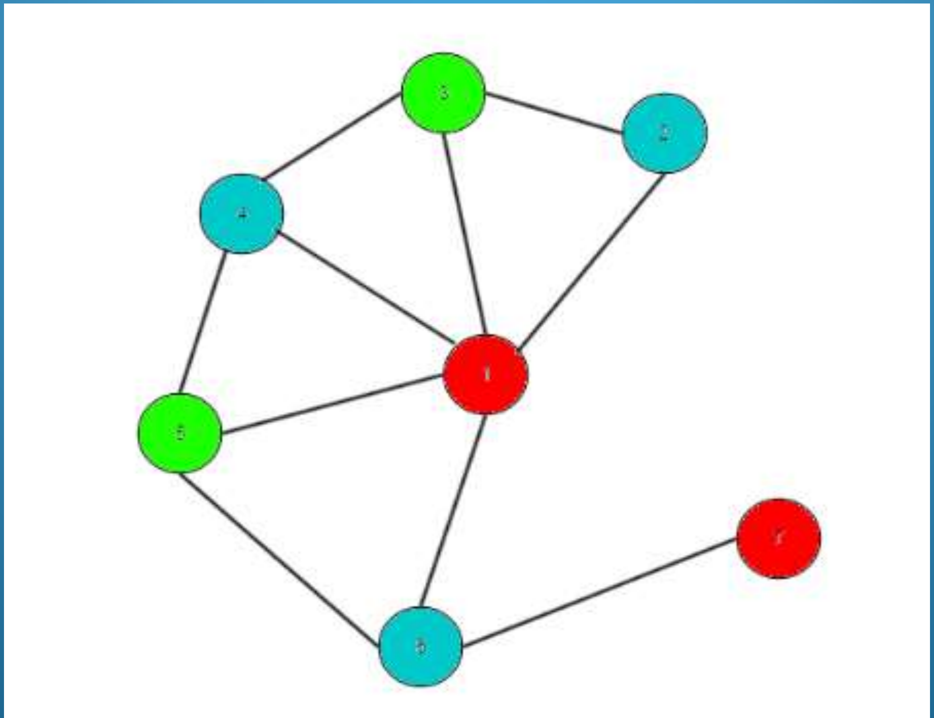


2. algorithmes de coloration

2.2 Algorithme DSATUR

2.2.3 Exemple

On réédite l'opération pour tous les autres sommets, puis on obtient :



3. Le théorème des 4 couleurs

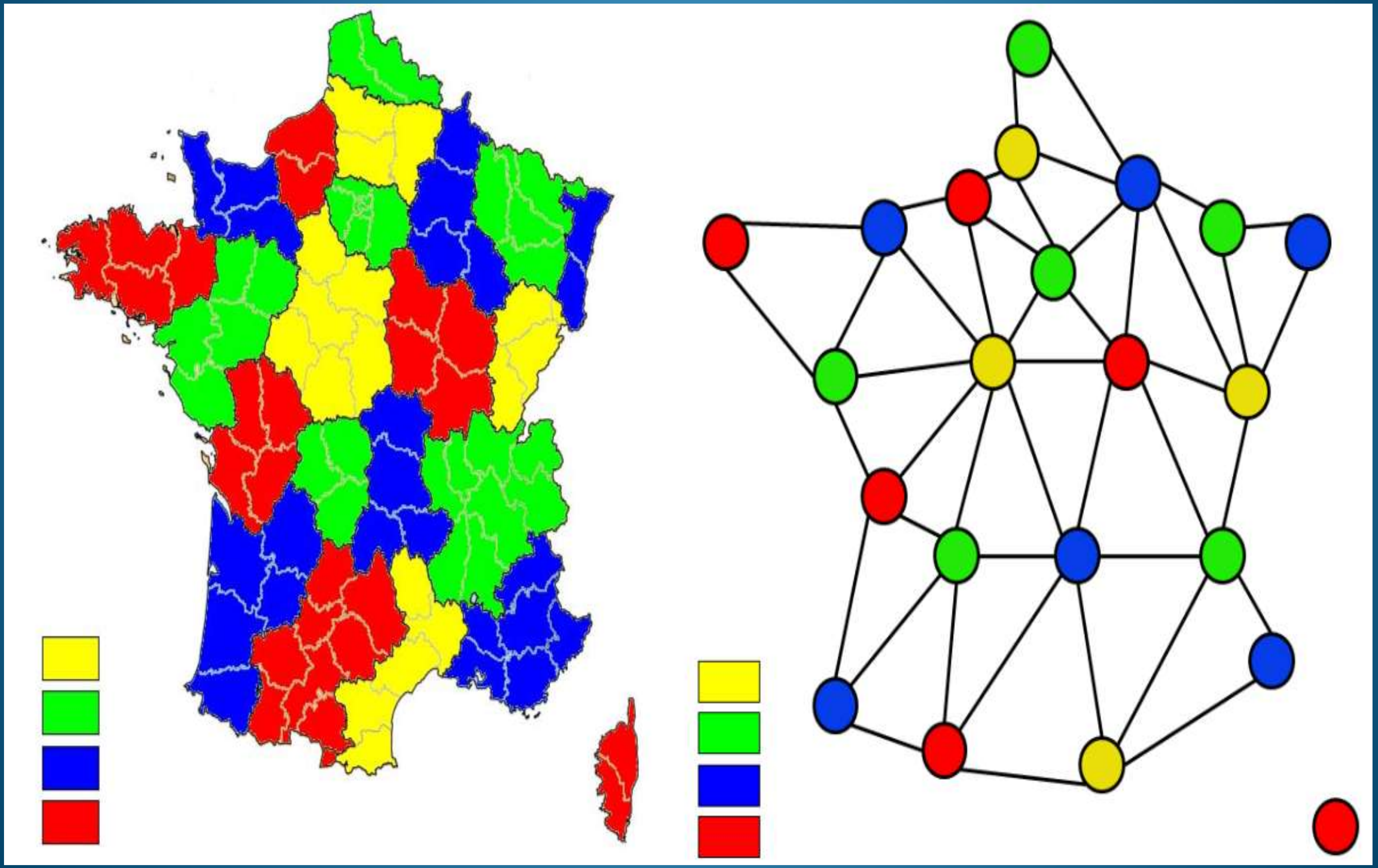
3.1 Peu d'histoire

L'un des problèmes les plus célèbres dans la théorie des graphes est le problème des 4 couleurs. Ce problème est resté pendant plus d'un siècle sans solution. En 1852, F. Guthrie s'est demandé s'il est possible de colorer une carte de géographie à l'aide de quatre couleurs de sorte à ce que des pays voisins aient des couleurs différentes?

De nombreux travaux ont été publiés lors du siècle suivant pour réduire le nombre de couleurs à quatre, jusqu'à la démonstration finale de deux chercheurs américains, K. Appel et W. Haken en 1976. Ils ont pu répondre affirmativement à cette conjecture des quatre couleurs.

3. Le théorème des 4 couleurs

3.2 Exemple



3. Le théorème des 4 couleurs

3.3 Annonce

Théorème :

Tout graphe planaire est 4chromatique

Application :

On peut colorier toute carte de géographie avec 4 couleurs, de sorte que deux régions ayant une frontière commune soient de différentes