Chapitre 5

Problèmes Hamiltonien et Eulérien

1. Problème Hamiltonien

1.1. Définitions

Soit G=(V,E)un graphe **orienté ou non**.

Une chaîne, un chemin, un cycle ou un circuit de G sont dits **hamiltoniens** s'ils passent une et une seule fois par tous les sommets de G.

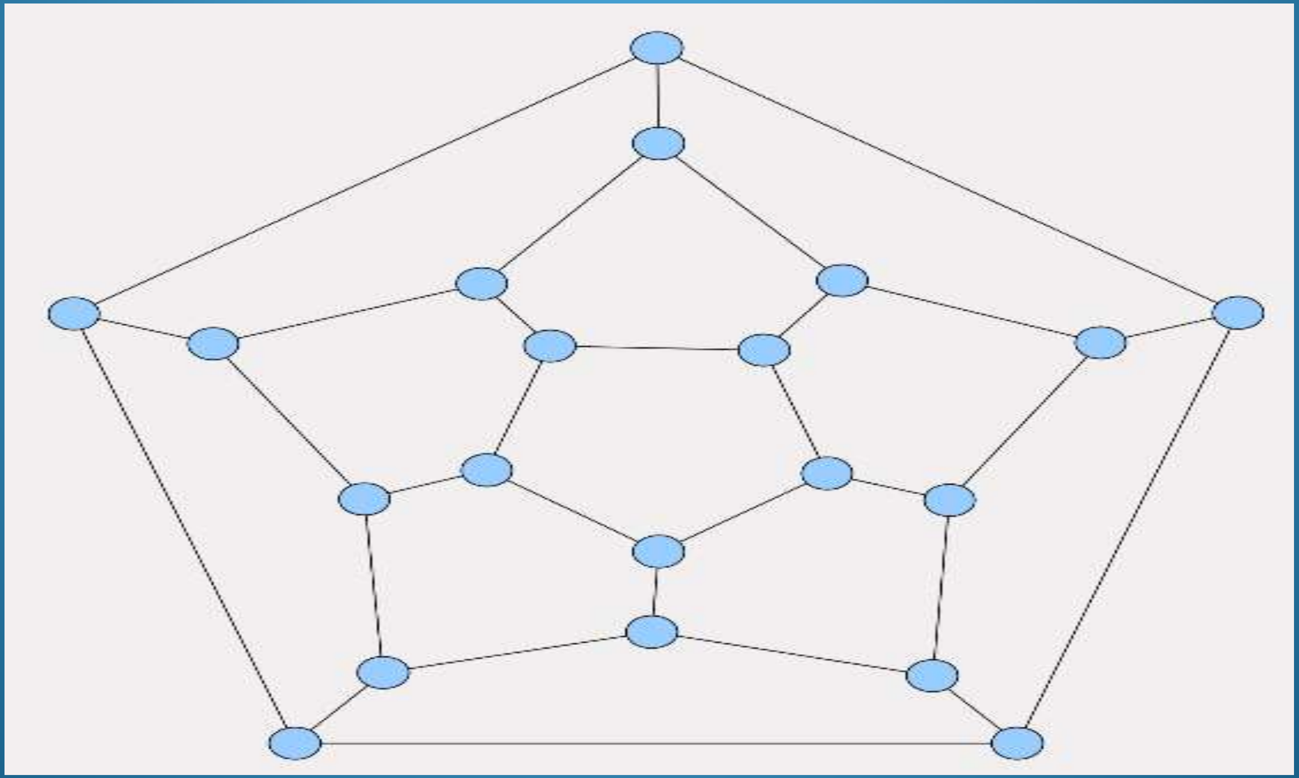
Un **graphe hamiltonien** est un graphe non orienté possédant un cycle hamiltonien ou un graphe orienté possédant un circuit hamiltonien.

Cette appellation vient d'un jeu proposé par Sir W. Hamilton en 1859 : un voyageur veut visiter 20 villes aux sommets d'un dodécaèdre en passant une fois et une seule par chaque ville et en revenant à son point de départ.

1. Problème Hamiltonien

1.1. Définitions

La question est la suivante : peut-on effectuer un parcours en passant **une et une seule fois** par chacune de ces villes et en revenant à son point de départ ?

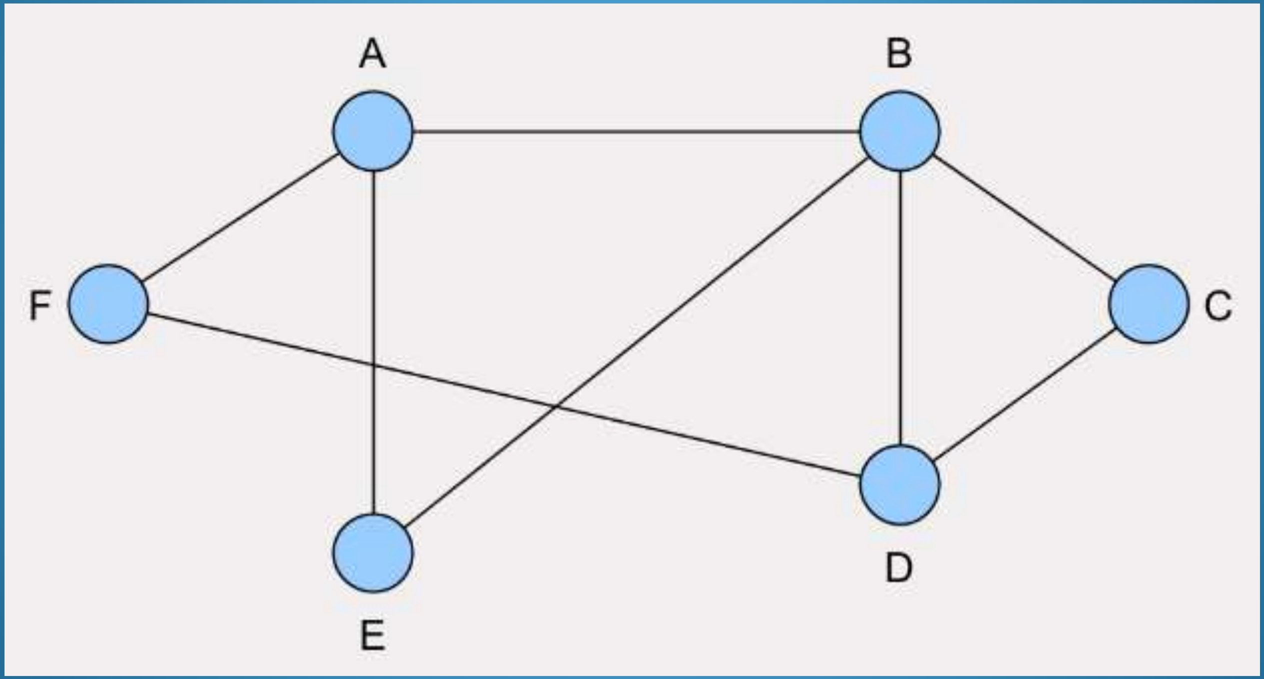


On peut associer à ce solide un **graphe planaire**, dont les sommets et les arêtes correspondent à ceux du dodécaèdre :

1. Problème Hamiltonien

Exemple

Considérons le graphe non orienté dont la représentation sagittale est la suivante :



Ce graphe est hamiltonien car il possède le cycle (A,E,B,C,D,F,A).

1. Problème Hamiltonien

1.2. Condition nécessaire d'existence d'un cycle hamiltonien

Si l'on ne connait pas encore de conditions nécessaires pour affirmer qu'un graphe est hamiltonien ou non, il existe quelques **conditions suffisantes** non **restrictives**.

Condition 1 :

Soit G=(V,E) un graphe **non orienté**.

Si G possède un sommet de degré 1 il ne peut pas être hamiltonien.

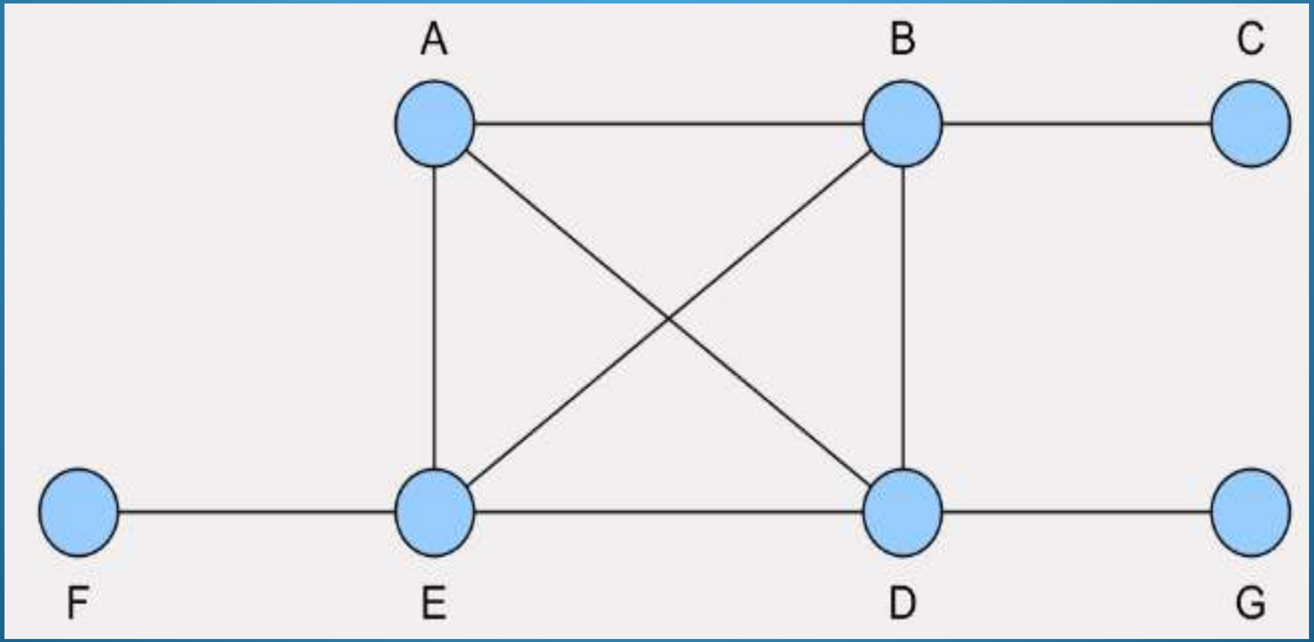
Ce résultat est assez évident, car pour qu'un graphe possède un cycle hamiltonien on doit pouvoir arriver et repartir par n'importe quel sommet, et donc le degré de chacun d'eux doit être au moins égal à 2.

1. Problème Hamiltonien

1.2. Condition nécessaire d'existence d'un cycle hamiltonien

Exemple d'un graphe non hamiltonien

Considérons le graphe non orienté dont la représentation sagittale est la suivante :



Ce graphe n'est pas hamiltonien car le F est de degré 1.

1. Problème Hamiltonien

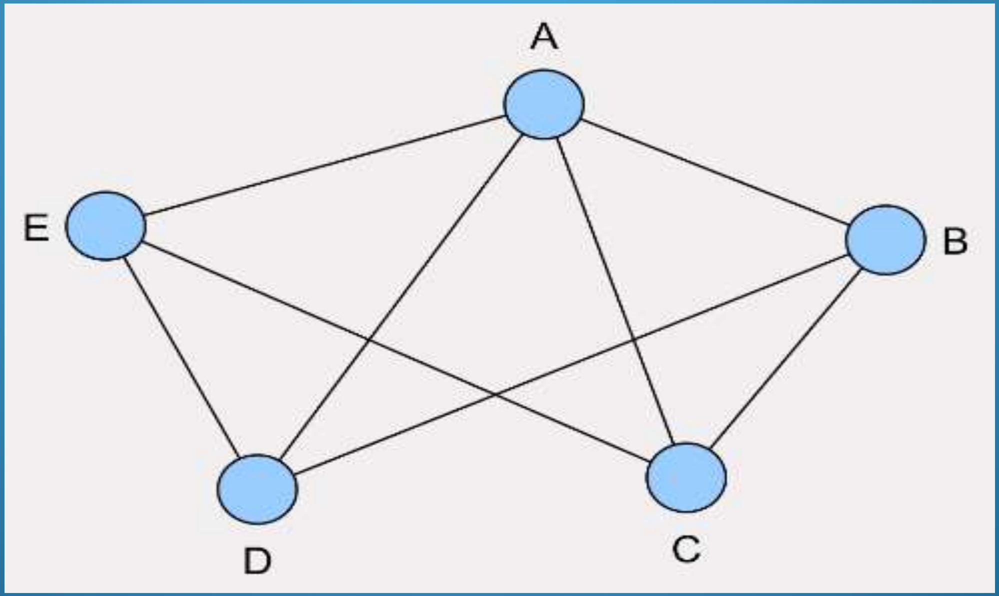
1.2. Condition nécessaire d'existence d'un cycle hamiltonien

Condition 2 : Condition de Dirac **Gabriel Andrew Dirac** (1925-1984)

Soit G=(V,E) un graphe **non orienté** d'ordre n, avec n≥3.

Si pour tout sommet de G on a $d(x) \geq n/2$ G est hamiltonien.

Exemple



Ce graphe est d'ordre 5 et chacun de ses sommet a un degré au moins égal à 3. Il est donc hamiltonien.

1. Problème Hamiltonien

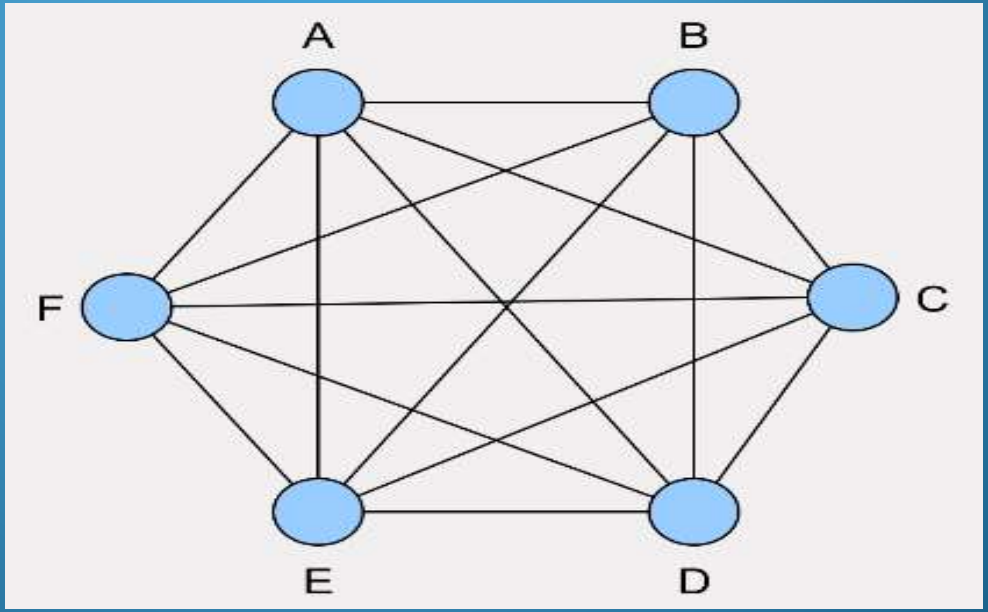
1.2. Condition nécessaire d'existence d'un cycle hamiltonien

Condition 3 :

Soit G=(V,E) un graphe **non orienté** d'ordre n, avec $n \geq 3$.

Si le graphe G est complet alors il est hamiltonien.

Exemple



Démonstration :

Le degré de chaque sommet est égal à $n-1$ donc la condition de Dirac est vérifiée.

2. Problème Eulérien

Le problème eulérien est un des plus vieux problèmes combinatoires comme le prouve la résolution par Euler du problème des 7 ponts de Königsberg.

2.1. Définitions

Un graphe G est **Eulerien** si et seulement si :

- dans le cas où G est un graphe non-orienté chaque sommet x de G doit avoir un degré d(x) pair.
- dans le cas où G est un graphe orienté chaque sommet x de G doit avoir des degrés entrants et sortants égaux $d^+(x)=d^-(x)$

Un multigraphe est un **graphe eulérien** s'il contient un cycle eulérien.

2. Problème Eulérien

2.2. Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une chaîne eulérienne

Théorème d'Euler (1766) :

Un graphe connexe G possède une chaîne eulérienne ssi le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Un graphe connexe G possède un cycle Eulérien si et seulement si chaque sommet est de degré pair.

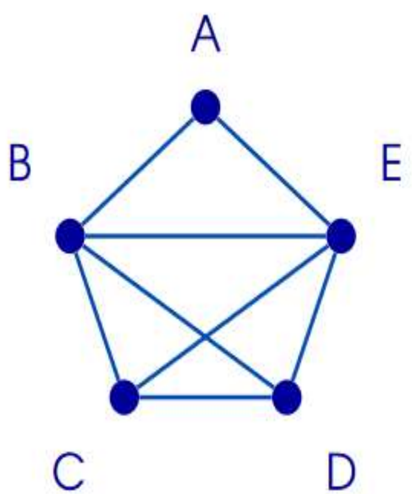
On appelle **chaîne eulérienne** (**cycle eulérien**), une chaîne (un cycle) utilisant une fois et une seule chacune des arêtes de G.

Un multigraphe est un **graphe eulérien** s'il contient un cycle eulérien.

2. Problème Eulérien

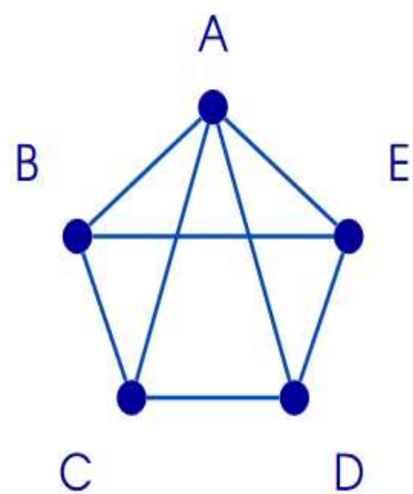
2.2. Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une chaîne eulérienne

Exemple:



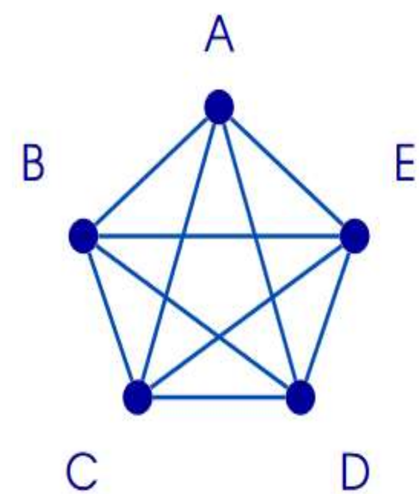
Graphe G_1

G_1 a une chaine eulérienne :
C-B-A-E-B-D-E-C-D.
G_1 n'a pas de cycle eulérien.
G_1 **n'est pas donc eulérien.**



Graphe G_2

G_2 n'a pas de chaîne eulérienne.
G_2 n'a pas de cycle eulérien.
G_2 **n'est pas donc eulérien.**



Graphe G_3

G_3 a plusieurs chaînes eulériennes et plusieurs cycles eulériens. Par exemple :
A-C-E-A-B-D-E-B-C-D-A.
G_3 **est donc eulérien.**

2. Problème Eulérien

2.3 Algorithme pour tracer un cycle eulérien

Algorithme d'Euler :

- Entrées : Un graphe ayant 0 ou 2 sommets de degrés impairs

début

    si *il y a deux sommets de degré impair* **alors**
        on construit une chaîne reliant ces deux sommets;
    sinon
        on construit un cycle quelconque à partir d'un sommet;
    tant que *il reste des arêtes non parcourues* **faire**
        on choisit un sommet de la chaîne précédente et on construit un cycle fermé à partir de ce sommet, cycle n'empruntant que des arêtes non parcourues.;

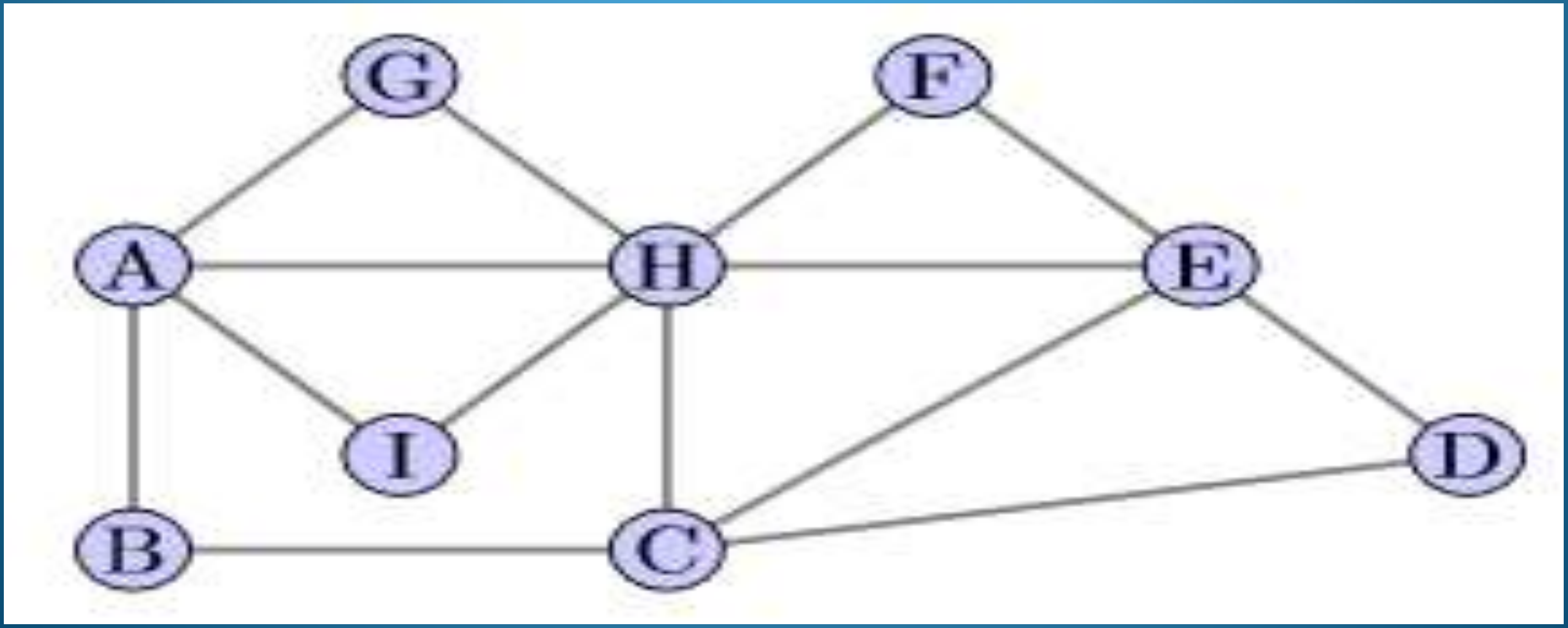
fin

2. Problème Eulérien

2.3 Algorithme pour tracer un cycle eulérien

Exemple :

On remarque que tous les sommets du graphe sont de degrés pairs ; il existe donc un cycle eulérien. Nous allons appliquer l'algorithme d'Euler pour en déterminer un.

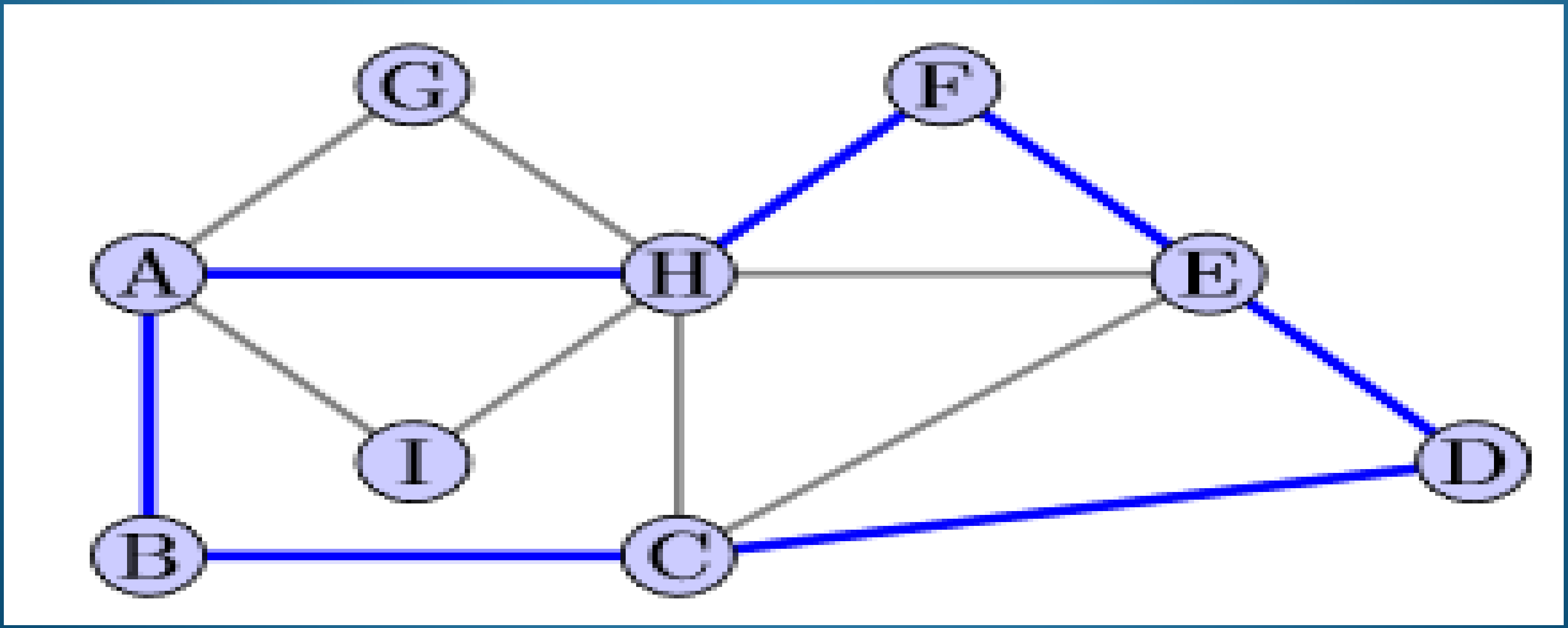


2. Problème Eulérien

2.3 Algorithme pour tracer un cycle eulérien

Exemple :

On commence par tracer un cycle à partir du sommet A : ABCDEFHA. On obtient alors le graphe ci-dessous :

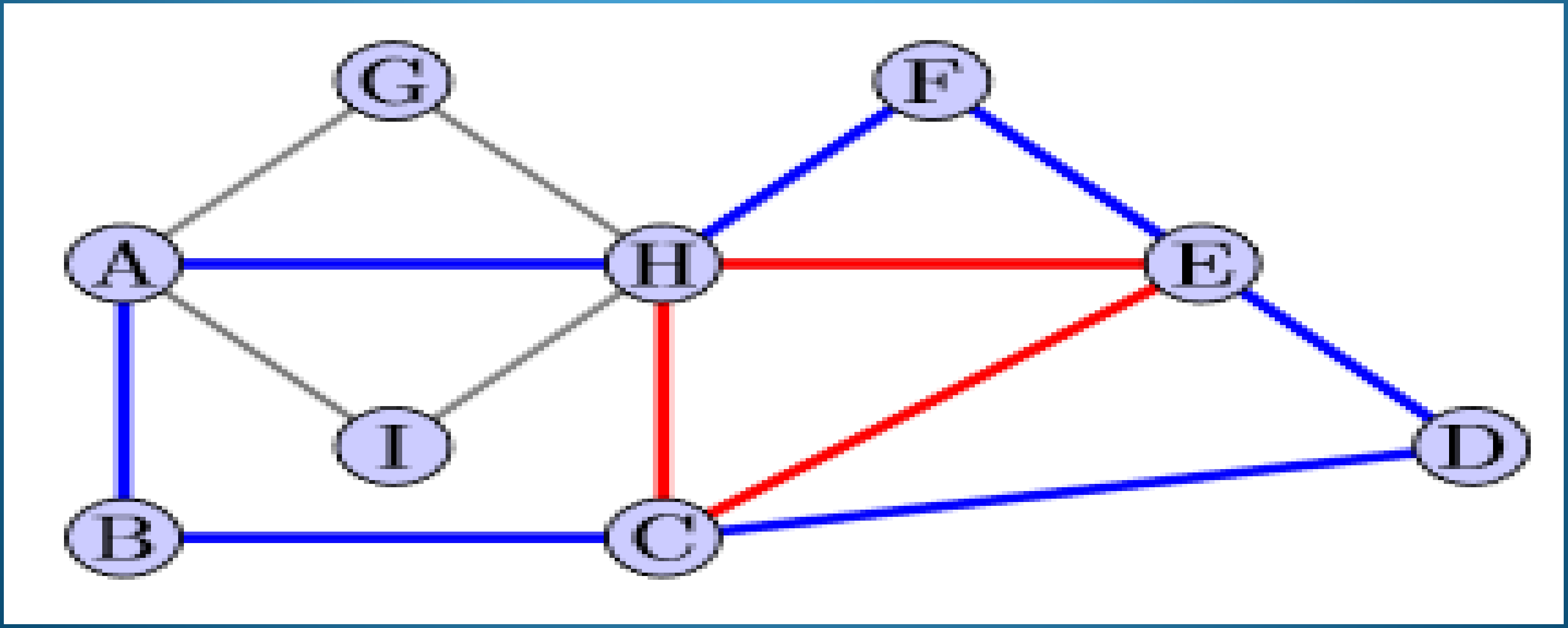


2. Problème Eulérien

2.3 Algorithme pour tracer un cycle eulérien

Exemple :

Puis, à partir du sommet E on ajoute le cycle EHCE pour obtenir le graphe ci-dessous :



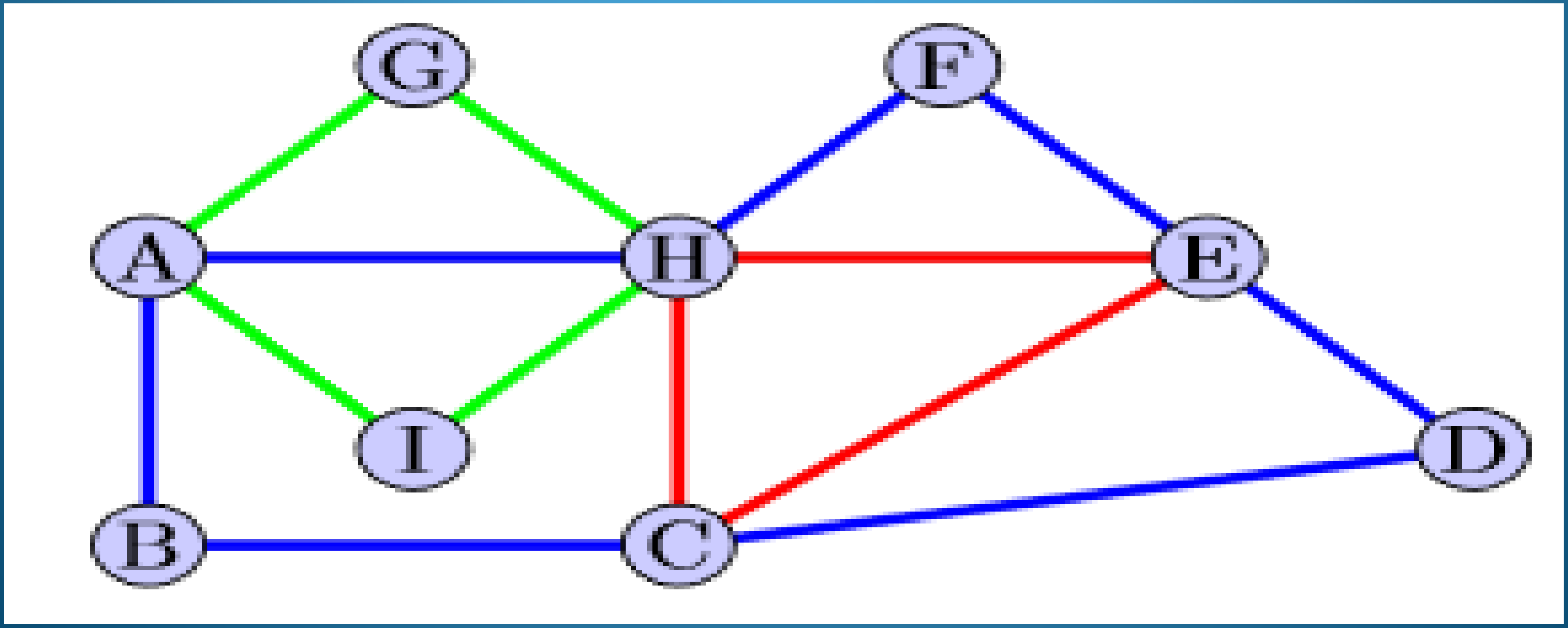
2. Problème Eulérien

2.3 Algorithme pour tracer un cycle eulérien

Exemple :

Puis, à partir du sommet A on ajoute le cycle AIHGA pour obtenir le graphe ci-dessous :

Finalement le cycle eulérien est ABCDEHCEFHAIHGA



2. Problème Eulérien

2.4. Lien entre problème eulérien et hamiltonien

Proposition :

Un graphe eulérien sans subdivision est hamiltonien mais la réciproque est évidemment fausse.