Chapitre 2

Cycles

1.Nombres cyclomatique et cocyclomatique

1.1. Décomposition des cycles et des cocycles en sommes élémentaires:

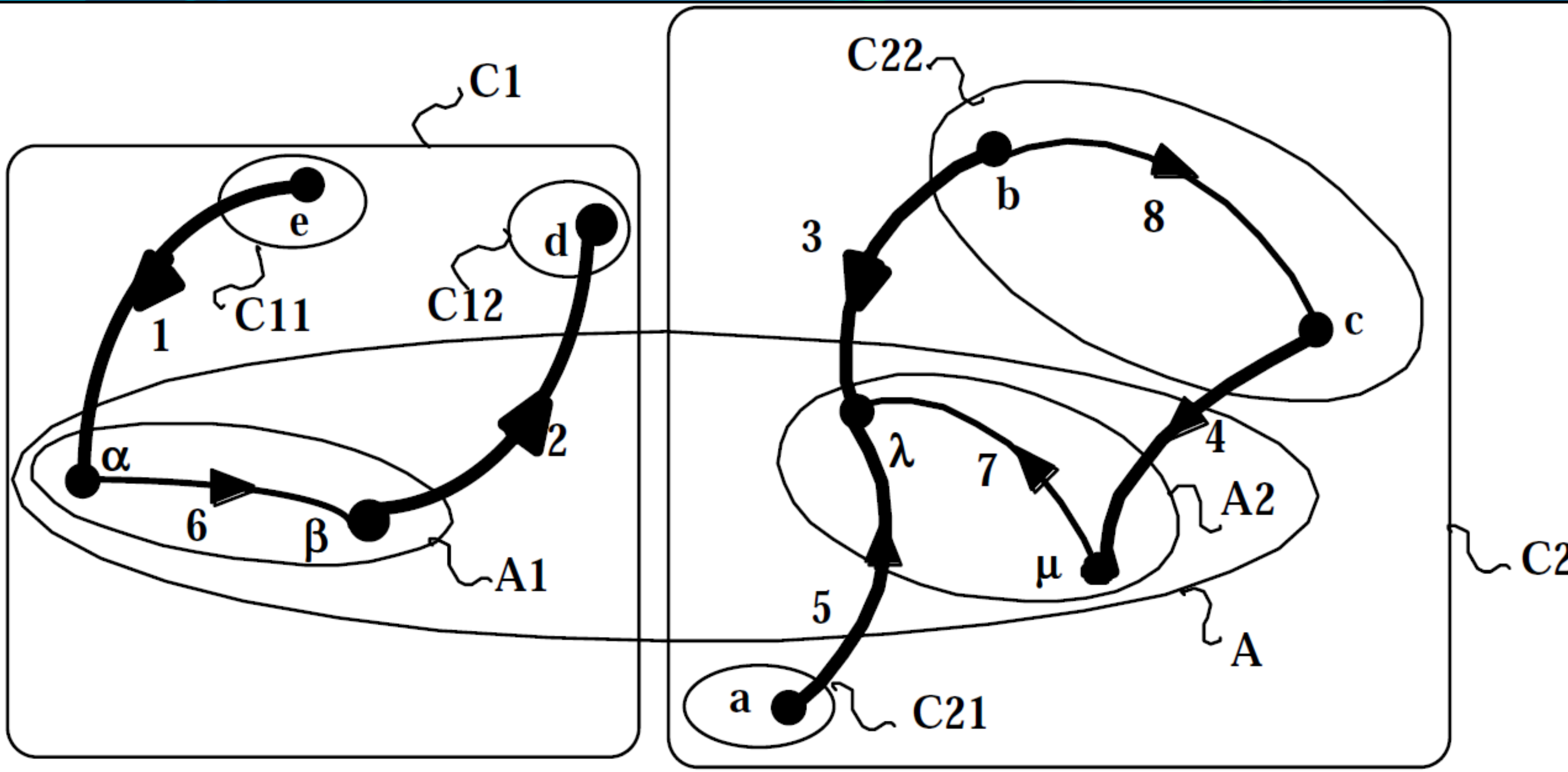
Proposition : "Tout cycle est une somme de cycles élémentaires sans arcs communs"

Démonstration :

Il suffit de parcourir le cycle et de définir un cycle élémentaire chaque fois qu'un même sommet est rencontré.

Proposition : "Tout cocycle est une somme de cocycles élémentaires sans arcs communs"

1.Nombres cyclomatique et cocyclomatique



ω ={ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 } est un cocycle avec A = { α , β , λ , μ}

Le sous-graphe engendré par A possède deux composantes connexes A1 et A2 (respectivement incluses dans C1 et C2, les deux composantes connexes du graphe).

Le sous-graphe engendré par C1-A1 a deux composantes connexes C11 et C12.

Le sous-graphe engendré par C2-A2 a deux composantes connexes C21 et C22.

On obtient pour les vecteurs associés aux cocycles :

$$\omega(A) = \omega(A1) + \omega(A2) = -\omega(C11) - \omega(C12) - \omega(C21) - \omega(C22)$$

1.Nombres cyclomatique et cocyclomatique

1.2. Lemme des arcs colorés (Minty 1960)

Lemme : "Soit un graphe dont les arcs sont numérotés de 1 à m et sont colorés soit en rouge, soit en vert, soit en noir. L'arc 1 est supposé être coloré en noir. Alors une (et une seule) des propositions suivantes est vérifiée :

(1) il passe par l'arc 1 un cycle élémentaire uniquement rouge et noir avec tous les arcs noirs
orientés dans le même sens ;

(2) il passe par l'arc 1 un cocycle élémentaire uniquement vert et noir avec tous les arcs noirs
orientés dans le même sens. »

1.2. Lemme des arcs colorés (Minty 1960)

Démonstration :

On pose 1 = (b , a) et on marque les sommets itérativement de proche en proche. On marque d'abord le sommet a. Itérativement, si x est un sommet marqué alors on marque y (non marqué) dans un des deux cas suivants :

- il existe un arc noir de la forme (x , y)
- il existe un arc rouge de la forme (x, y) ou (y, x).

On arrête lorsqu'aucun des sommets non marqués ne peut être marqué.

1.Nombres cyclomatique et cocyclomatique

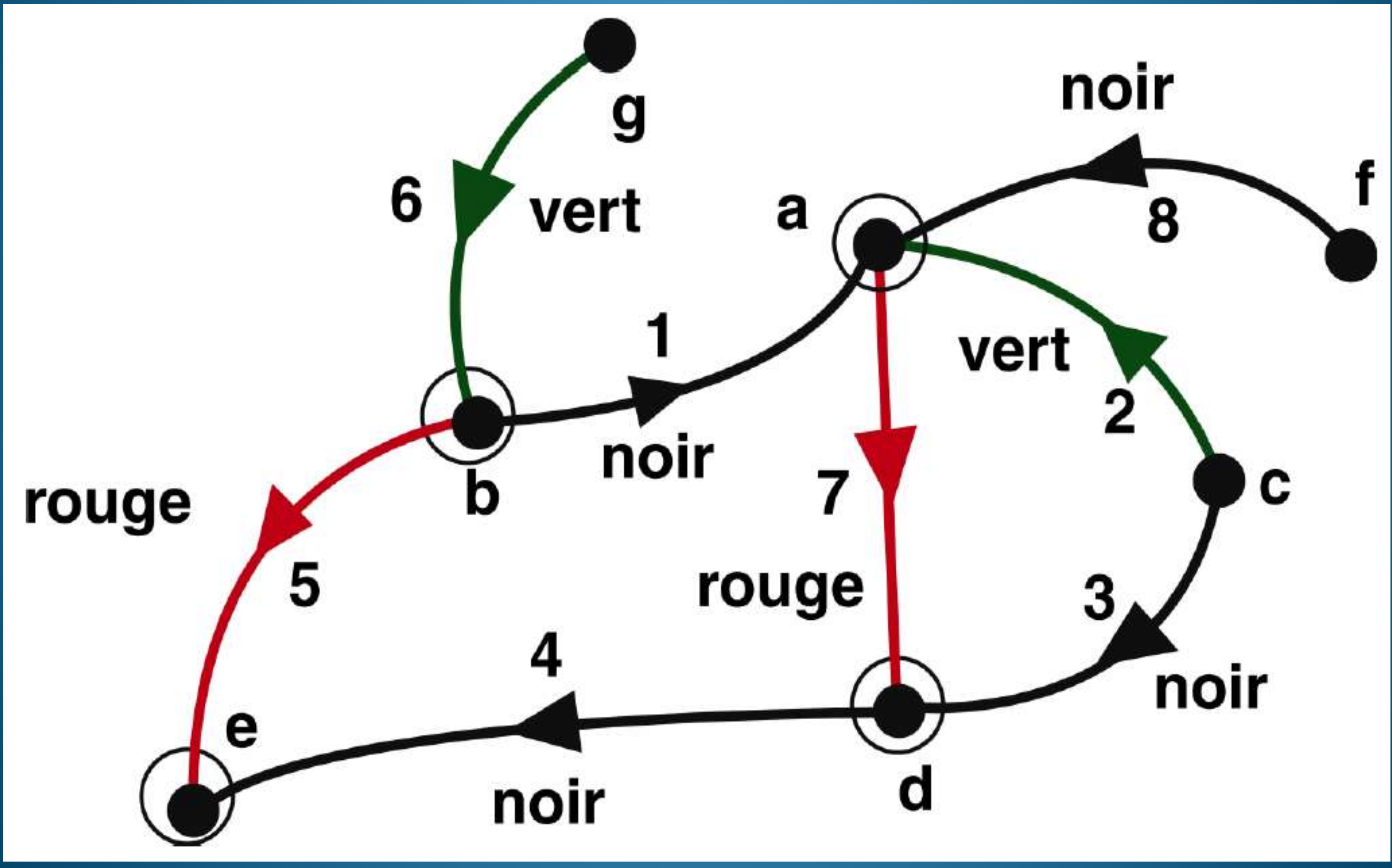
1.2. Lemme des arcs colorés (Minty 1960)

On se trouve alors face à deux cas possibles :

- **si on a marqué le sommet b**, alors les sommets utilisés de proche en proche pour marquer b constituent un cycle (forcément) élémentaire rouge et noir avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens (de parcours). Il ne peut pas exister un cocycle noir et vert, contenant l'arc 1, avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens. Le cycle parcouru est la somme de cycles élémentaires disjoints dont l'un d'eux contient l'arc 1.

1.Nombres cyclomatique et cocyclomatique

1.2. Lemme des arcs colorés (Minty 1960)



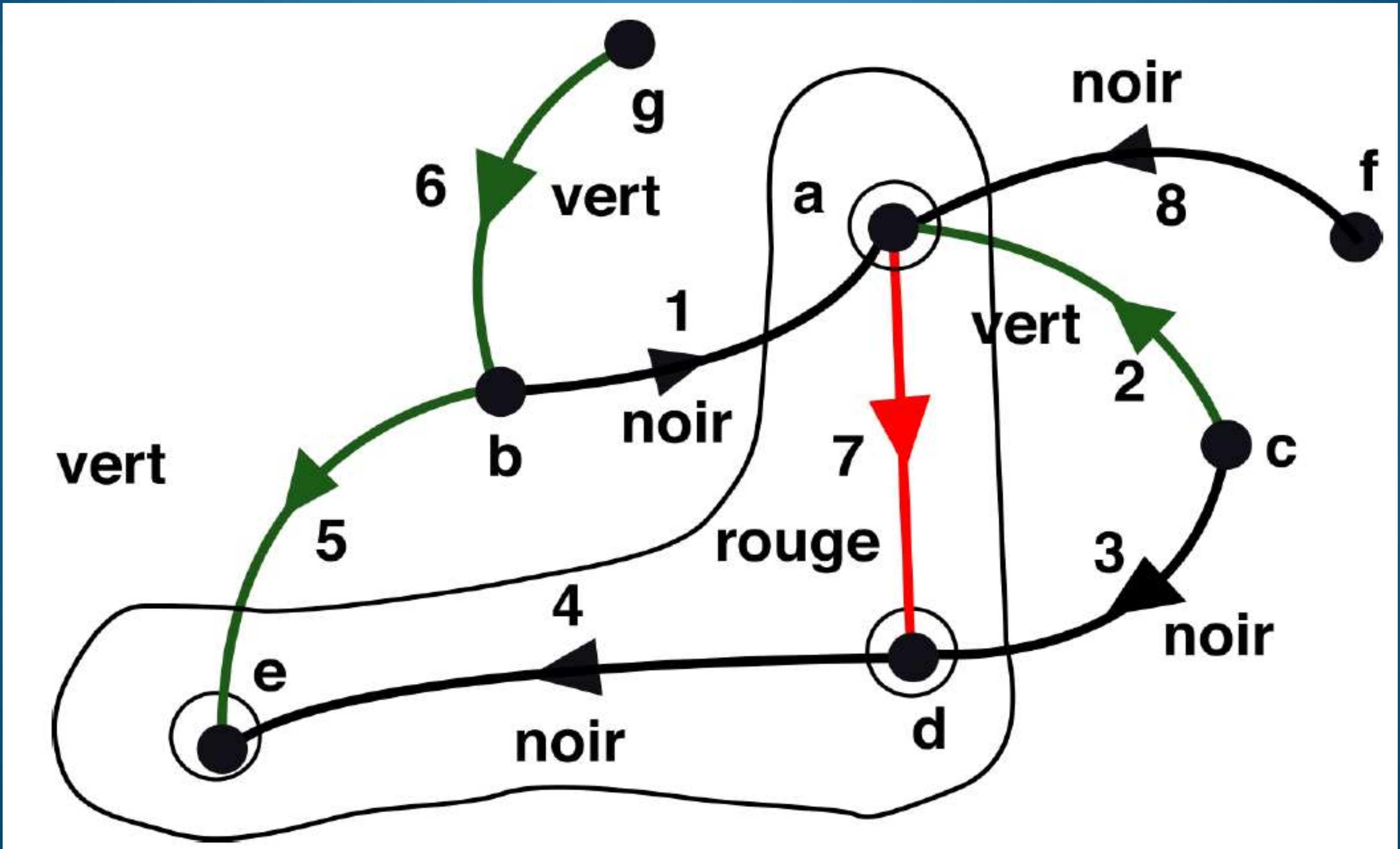
1.Nombres cyclomatique et cocyclomatique

1.2. Lemme des arcs colorés (Minty 1960)

-**si on n'a pas marqué le sommet b**, alors les sommets utilisés de proche en proche pour marquer b constituent un ensemble A, tel que le cocycle ω (A) ne contienne que des arcs noirs orientés vers A et des arcs verts . Il ne peut pas exister un cycle noir et rouge, contenant l'arc 1, avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens. Le cocycle ainsi défini est la somme de cocycles élémentaires disjoints dont l'un d'eux contient l'arc 1.

1.Nombres cyclomatique et cocyclomatique

1.2. Lemme des arcs colorés (Minty 1960)



1.Nombres cyclomatique et cocyclomatique

1.3. Base de cycles et base de cocycles

Définitions :

Les cycles C1 , C2 ,...,Ck sont des **cycles indépendants** si leurs vecteurs associes verient :

$$\lambda_1.C^1 + \lambda_2.C^2 + \cdots + \lambda_p.C^p = 0 \Longrightarrow, \lambda_i = 0, \forall i = \overline{1,p}$$

Une **base de cycles** est un ensemble de cycles indépendants tel que tout cycle puisse s'écrire comme une combinaison linéaire.

Le **nombre cyclomatique** du graphe est égale à la dimension de la base de cycles.

1.3. Base de cycles et base de cocycles

De même, les cocycles $\omega 1$, $\omega 2$,...., ωj sont des **cocycles indépendants** si une combinaison linéaire des vecteurs associés ne peut être nulle que si chaque coefficient est nul. Une **base de cocycles** est un ensemble de cocycles indépendants tel que tout autre cocycle puisse s'écrire comme une combinaison linéaire.

Le **nombre cocyclomatique** du graphe est égale à la dimension de la base de cocycles.

Théorème : "Soit G un graphe avec **n** sommet, m arcs et p composantes connexes, alors :

$$\nu(G) = m - n + p \quad \text{et} \quad \lambda(G) = n - p$$

2. Planarité

2.1. Graphe Planaire

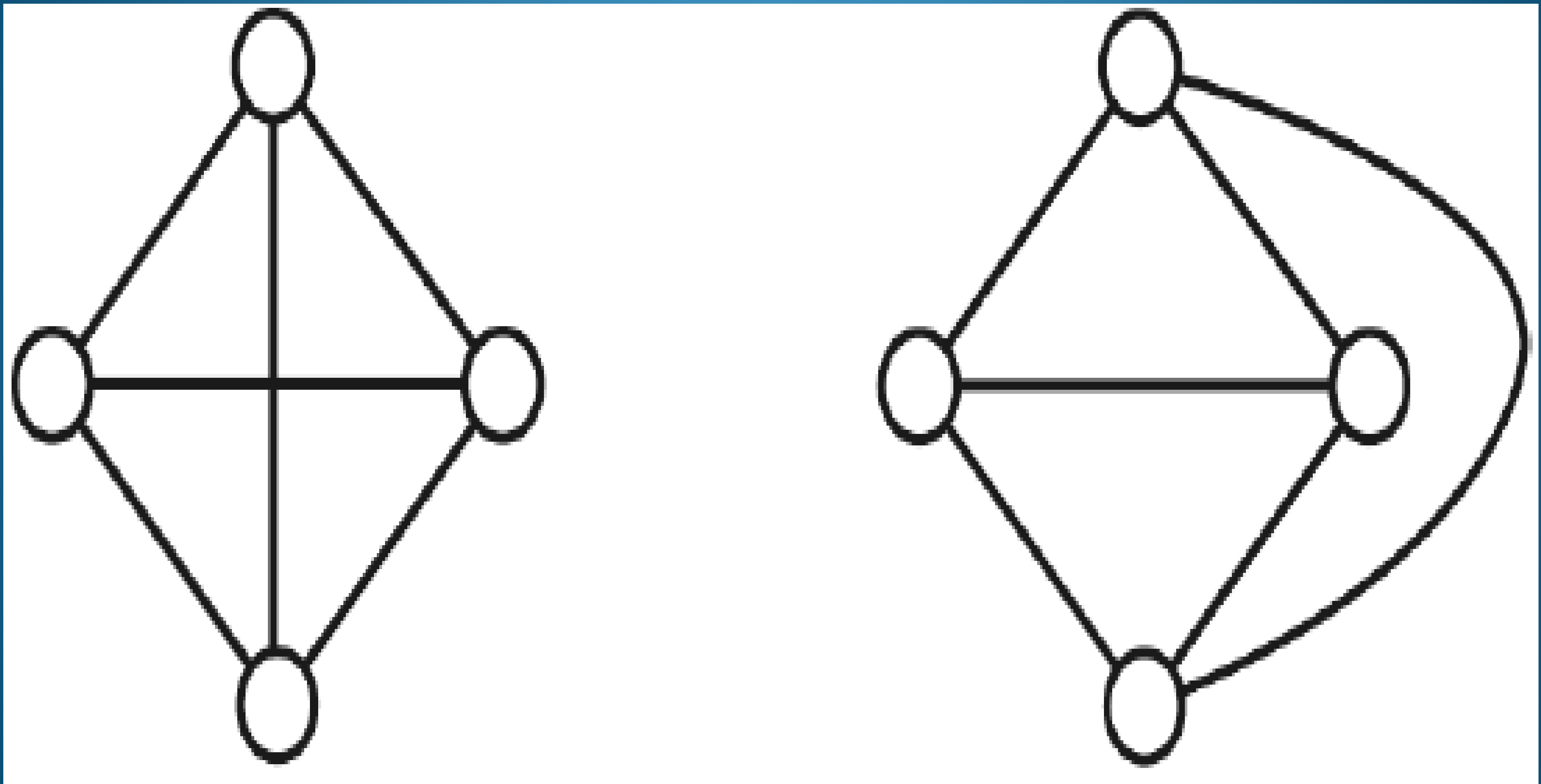
Définitions :

Un graphe est **planaire** si on peut le dessiner sur un plan sans que les arêtes (arcs) se croisent.

Un **graphe planaire topologique** est une représentation d'un graphe planaire G sur un plan, conformément aux exigences précédentes.

2. Planarité

2.1. Graphe Planaire



Graphe planaire   Graphe planaire topologique

2. Planarité

2.1. Graphe Planaire

Définitions :

- Dans un graphe planaire topologique, les zones délimitées par des arêtes qui les entourent sont appelées des **faces** .

- Deux faces sont **adjacentes** si elles ont un arc en commun.

- Deux faces sont opposées si elles ont un sommet commun sans être adjacentes.

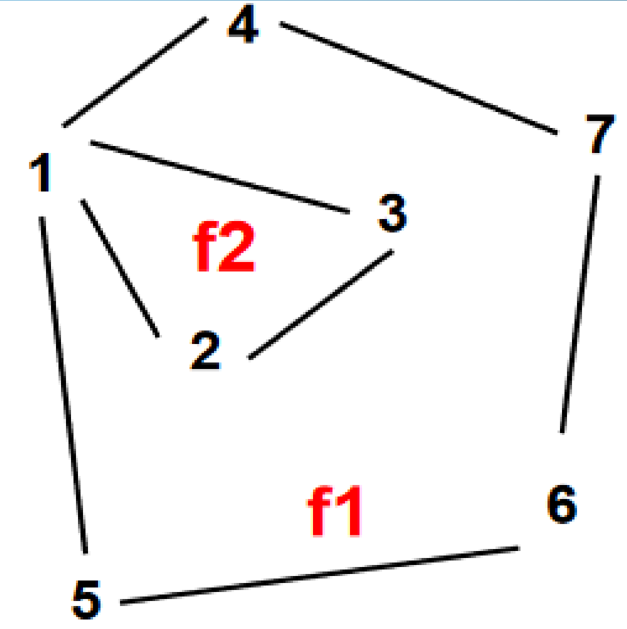
- L’ensemble des arcs qui touchent une face s’appelle la **frontière de la face**.

2. Planarité

2.1. Graphe Planaire

- On appelle contour d'une face, celui de ces cycles élémentaires qui contient à son intérieur tous les autres arcs de la frontière.

- On notera qu'il y a toujours une face illimitée appelée **face infinie** ou **face externe** .



Contour de f1 = 1-4-7-6-5-1

Frontière de f1=1-3-2-1-5-6-7-4-1

2. Planarité

2.2. Formule d'Euler

Théorème : dans un graphe planaire topologique G, les contours des différentes faces finies constituent une base fondamentale de cycles indépendants.

Formule d'Euler : si, dans un graphe planaire connexe de **n** sommets, **m** arêtes et **f** faces, alors:

$$n - m + f = 2$$

Démonstration : le nombre de faces finies est égal au nombre cyclomatique $\nu(G)$ d'où :

$$f = \nu(G) + 1 = (m - n + 1) + 1 = m - n + 2.$$

2. Planarité

2.2. Formule d'Euler

Théorème : dans un graphe planaire topologique G, les contours des différentes faces finies constituent une base fondamentale de cycles indépendants.

Formule d'Euler : si, dans un graphe planaire connexe de **n** sommets, **m** arêtes et **f** faces, alors:

$$n - m + f = 2$$

Démonstration : le nombre de faces finies est égal au nombre cyclomatique ν (G) d'où :

$$f = \nu (G) + 1 = (m - n + 1) + 1 = m - n + 2.$$

2. Planarité

2.3. Théorème de Kuratowski (1930)

Définition :

Une **subdivision** d'un graphe est un graphe obtenu en ajoutant des sommets sur les arcs (ou les arêtes).

Théorème : un multigraphe G est planaire si et seulement s'il ne contient aucune subdivision du graphe complet à 5 sommets K_5 et plus, et du graphe biparti complet $K_{3,3}$

Propriété : les multigraphes complets $K_{3,3}$ et K_5 et plus ne sont pas planaires.

2. Planarité

2.4. Graphe Dual

Définition :

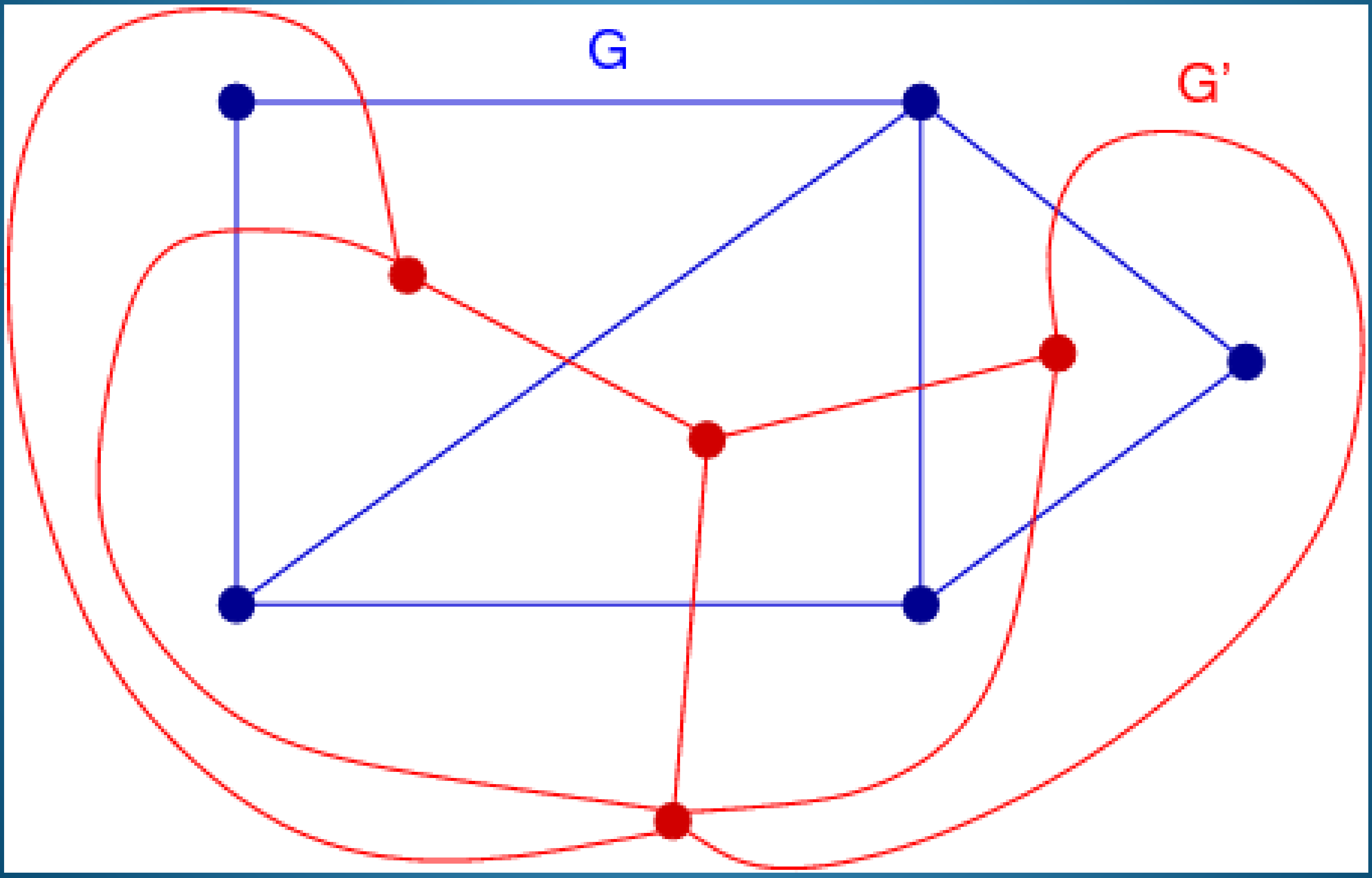
Etant donné un graphe planaire G connexe et sans sommets isolés, on peut lui faire correspondre un graphe planaire "**dual**" G^*. Chaque face de G correspond un sommet de G^* Deux sommets de G^* sont reliés si et seulement si les faces correspondantes de G on une arête commune .

Théorème :

À tout cycle (circuit) élémentaire de G correspond un cocycle (cocircuit) élémentaire de G*, et vice-versa.

2. Planarité

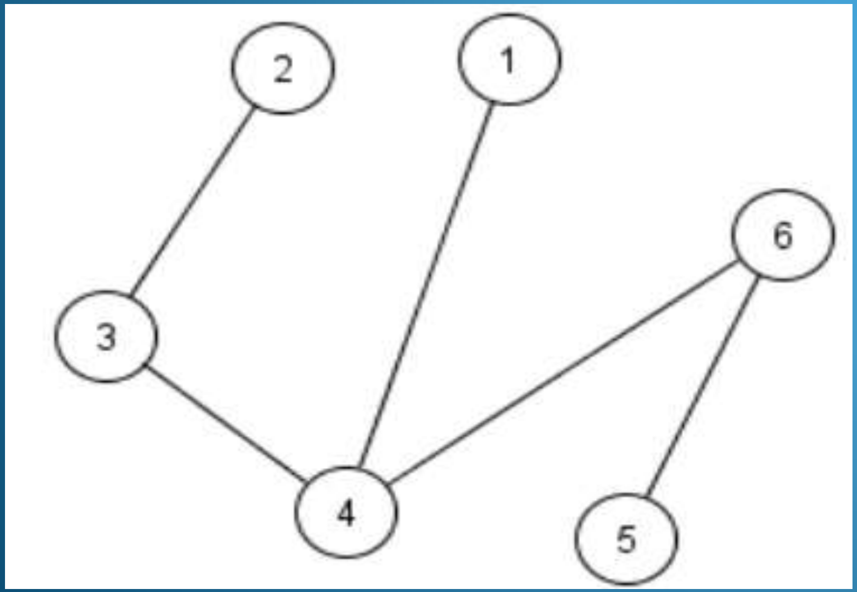
2.4. Graphe Dual



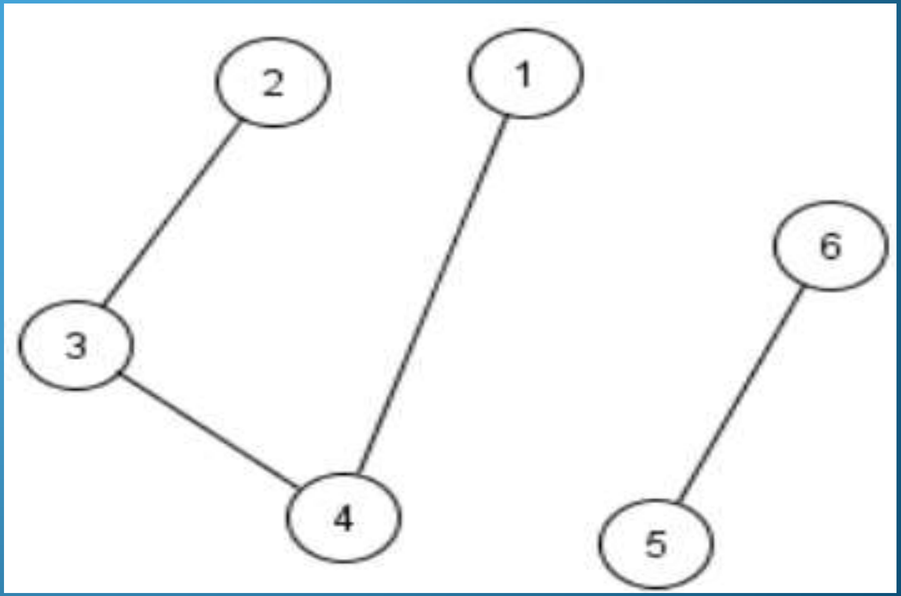
3. Arbre, forêt et arborescence

3.1 Définitions :

- Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle.
- Une **forêt** est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.



Un arbre

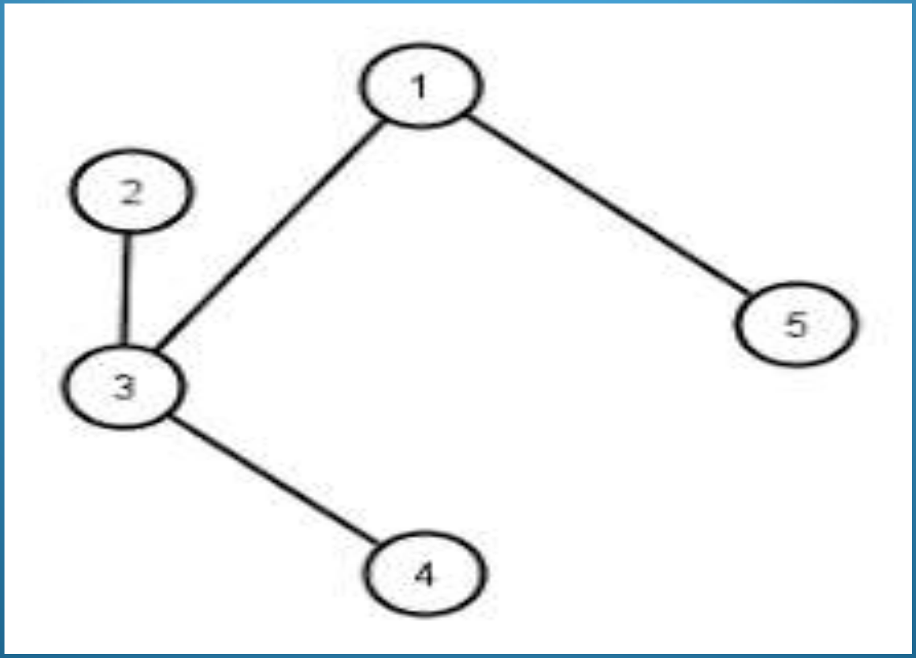


Une **forêt**

3. Arbre, forêt et arborescence

3.1 Définitions :

- Dans un graphe, le sommet x est une **racine** si pour tout autre sommet y, il existe un chemin unique u(x , y).
- Une **arborescence** est un arbre muni d'une racine.



3. Arbre, forêt et arborescence

3.2 Propriété :

Soit G=(X,U) un graphe $n=|X|\geq 2$ sommets. les six propriétés suivantes sont équivalentes pour caractériser un arbre :

- G est connexe et sans cycle ;
- G est sans cycle et admet n – 1 arcs.
- G est connexe et possède n – 1 arcs ;
- G est sans cycle et si en ajoutant un arc, on crée un cycle (et un seul) ;

3. Arbre, forêt et arborescence

- G est connexe, et si on supprime un arc quelconque, il n'est plus connexe ;
- Tout couple de sommets est reliés par une chaîne et une seule.

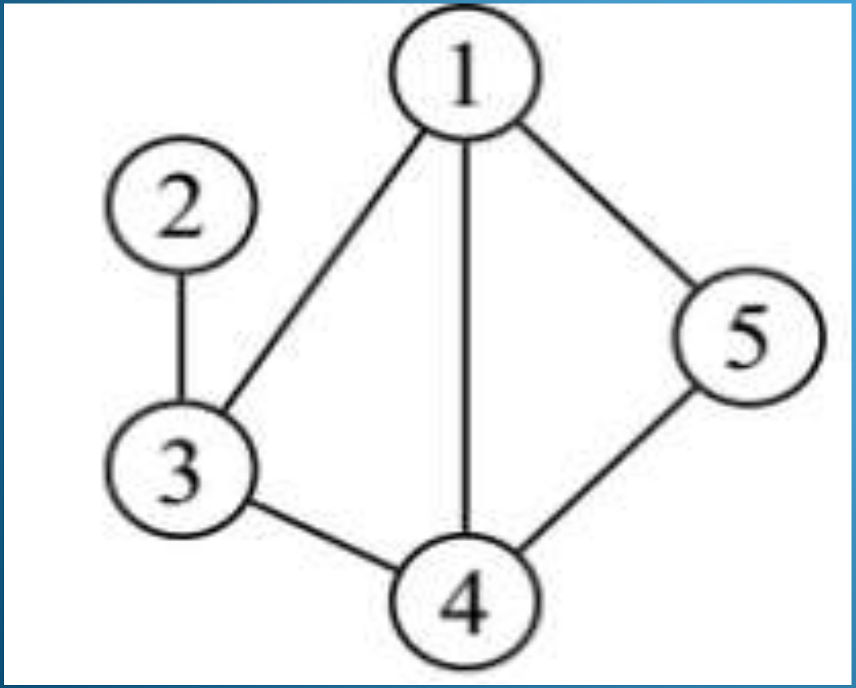
Propriété :

- Un arbre d'ordre $n \geq 2$ admet au moins deux sommets pendants (isolé).
- Un graphe G possède un arbre comme graphe partiel si et seulement si G est connexe.

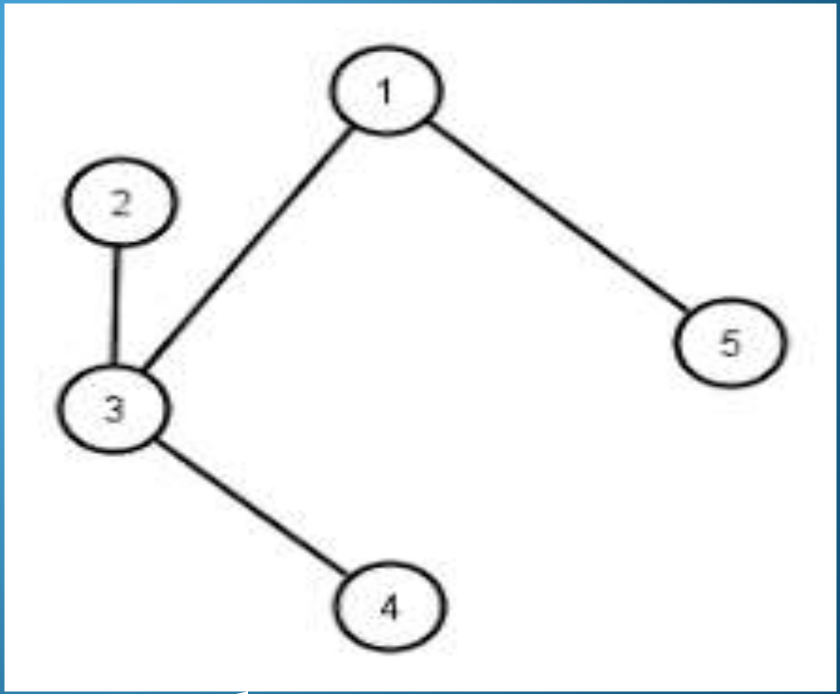
3. Arbre, forêt et arborescence

3.3. Arbre maximal (ou couvrant)

Un arbre couvrant d'un graphe G est un sous-graphe de G qui est connexe, sans cycle et contient tous les sommets de G.



Graphe G



Arbre couvrant