Chapitre 1

Définitions de base

1. Définition de graphe

1.1. Définition

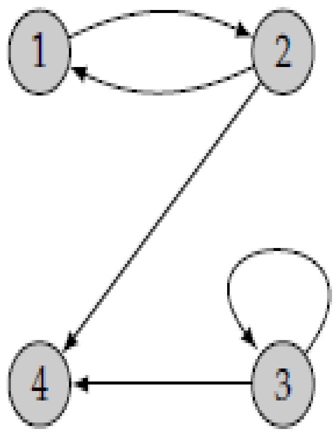
Un **graphe** est un schéma constitué par un ensemble de **points** (appelés sommets ou nœuds) reliés entre eux par un ensemble de **lignes** ou de **flèches** (appelées arêtes ou arcs).

Les graphes peuvent servir à représenter un grand nb de situations courantes comme:

- Les liens routiers
- Les réseaux de communication
- Les circuits électriques
- Les liens entre diverses personnes .

1. Définition de graphe

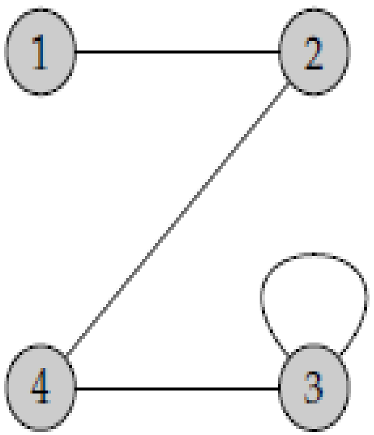
Exemple de graphe orienté :



$G = (S, A)$ où

- $S = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $A = \{(1,2), (2,1), (2,4), (3,4), (3,3)\}$.

Exemple de graphe non-orienté :



$G = (S, A)$ où

- $S = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $A = \{\{1,2\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{3\}\}$.

1. Définition de graphe

1.2. Définition mathématique d'un graphe

Un **graphe** $G = (X, U)$ est le couple constitué:

1- par un **ensemble** $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

2- par une **famille** $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ d'éléments du produit cartésien $X \times X = \{(x, y) \,/\, x \in X, y \in X\}$

2. Ordre, orientation et multiplicité

2.1. Ordre

Selon les définitions précédentes, l'ensemble de sommets est supposé fini.

Définition :

On appelle **ordre du graphe** G = (X , U) le nombre de sommets du graphe.

Notation :

L'ordre de G est donc le **cardinal de X** et noté |X| .

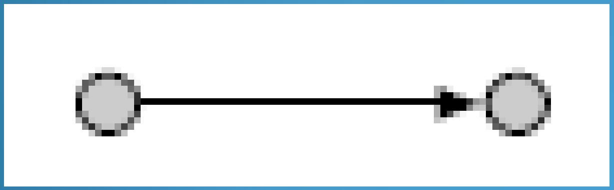
2. Ordre, orientation et multiplicité

2.2. Orientation

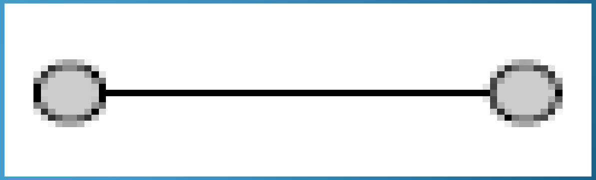
2.2.1. Arc (arête)

On note un **arc (arête)**reliant un sommet x au sommet y dans un graphe G : par u =(x , y).

Chaque arc (**arête**) du graphe G relie respectivement deux sommets, le sommet de départ qui représente l'extrémité initiale de l'arc (**arête**)et le sommet d'arrivée qui représente l'extrémité terminale.



arc



arête

2. Ordre, orientation et multiplicité

2.2. Orientation

2.2.2. Degré

Pour un graphe non-orienté, on appelle degré d'un sommet s, noté $d(s)$ le nombre d'arêtes dont le sommet est une extrémité.

Pour un graphe orienté, soit un sommet s d'un graphe G, le nombre d'arcs de la forme (x,y) se note $d^{+}(s)$ et s'appelle le **demi-degré extérieur** de x. De même, le nombre d'arcs de la forme (y,x) se note $d^{-}(s)$ et s'appelle le **demi-degré intérieur** de x.

2. Ordre, orientation et multiplicité

2.2. Orientation

2.2.2. Degré

Le nombre $d\,(s) = d^{+}(s) + d^{-}(s)$ est le **degré** du sommet s, c'est le nombre d'arcs ayant une extrémité en s (chaque boucle étant comptée deux fois).

Si tous les sommets d'un graphe ont même degré, ce graphe est un **graphe régulier.**

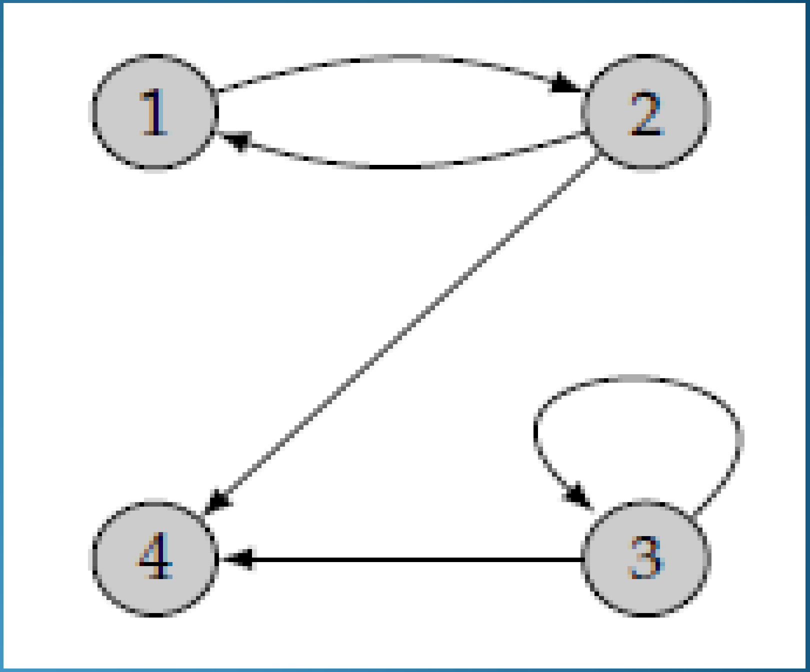
Degré de A égale à 0 : sommet isolé.

Degré de A égale à 1 : sommet pendant

2. Ordre, orientation et multiplicité

2.2. Orientation

2.2.2. Degré



Le sommet 2 est l'extrémité initiale de 2 arcs, on dit alors que le demi-degré extérieur est 2, on le note $d^+(2)= 2$

Le sommet 2 est l'extrémité terminale d'un seul arc, on dit alors que le demi-degré intérieur de sommet 2 est 1, on le note $d^-(2)= 1$

La somme du demi-degré intérieur et du demi-degré extérieur du 2 définit le degré de 2, on le note $d(2)=3$

2. Ordre, orientation et multiplicité

2.3. Multiplicité

2.3.1. Boucle et extrémités

Un arc de la forme (x , x) est une **boucle**.

Soit un arc de la forme (x , y), x et y sont appelés les **extrémités** de l'arc :

- x est l'**extrémité initiale** de l'arc ;
- y est l'**extrémité finale** de l'arc.

2.3.2. multiplicité d'une paire x , y

La **multiplicité d'une paire x , y** est le nombre d'arcs (du graphe G) ayant x comme extrémité initiale et y comme extrémité finale.

3. Relations entre les éléments d'un graphe

3.1. Relations entre sommets

Le sommet y est un **successeur** du sommet x s'il existe un arc de la forme : (x , y).

Le sommet y est un **prédécesseur** du sommet x s'il existe un arc de la forme : (y , x)

Le sommet y est un **voisin** du sommet x s'il existe un arc de la forme (x , y) ou de la forme (y , x)

Un **sommet pendant** est un sommet qui n'a qu'un seul voisin.

(autrement dit si y est un successeur ou un prédécesseur de x).

L'ensemble des successeurs du sommet x est noté: $\Gamma^+(x)$

L'ensemble des prédécesseurs du x est noté : $\Gamma^-(x)$

L'ensemble des voisins du x est noté : $\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$

3. Relations entre les éléments d'un graphe

3.2. Relations entre arcs et sommets

3.2.1. Arc incident à un sommet

Si un sommet x est l’extrémité initiale d’un arc u = (x , y) alors u est un **arc incident au sommet x vers l'extérieur**. Si par contre, x est l’extrémité finale d’un arc u = (y , x) alors l’arc u est un **arc incident au sommet x vers l'intérieur**. Dans les deux cas, on dit que l’arc u est un **arc incident au sommet x**.

3. Relations entre les éléments d'un graphe

3.2. Qualificatifs des graphes

3.2.1. Sous-graphe partiel

Soit un graphe G = (X , U) quelconque.

Soit A ⊂ X, alors le **sous-graphe engendré par A** est le graphe G_A dont les sommets sont les éléments de A et dont les arcs sont les arcs de G ayant leurs deux extrémités dans A.

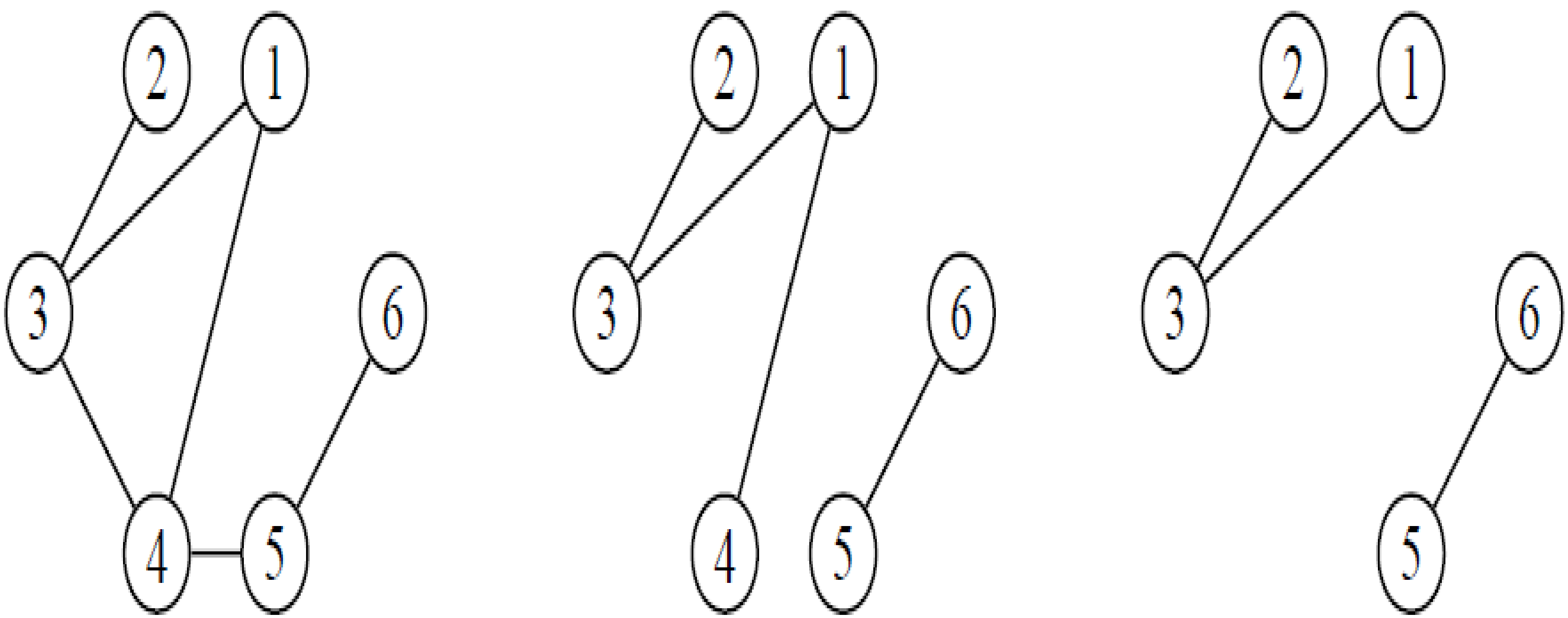
Soit V ⊂ U alors le **graphe partiel engendré par V** est le graphe (X ,V) ayant le même ensemble X de sommets que G, et dont les arcs sont les arcs de V (on élimine de G les arcs de U - V).

Un **sous-graphe partiel** de G est un sous-graphe d’un graphe partiel de G ou un graphe partiel d’un sous-graphe de G.

3. Relations entre les éléments d'un graphe

3.2. Qualificatifs des graphes

3.2.1. sous-graphe partiel



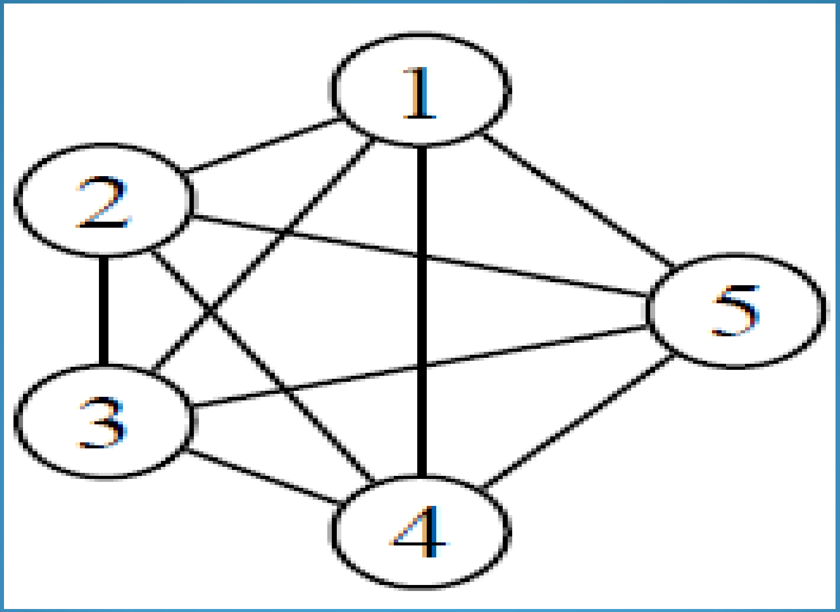
Graphe G Graphe partiel de G Sous-graphe de G

3. Relations entre les éléments d'un graphe

3.2.2. Graphe complet, clique

Un graphe est **complet** si pour toute paire de sommets x et y, il existe au moins un arc de la forme (x , y) ou de la forme (y , x).

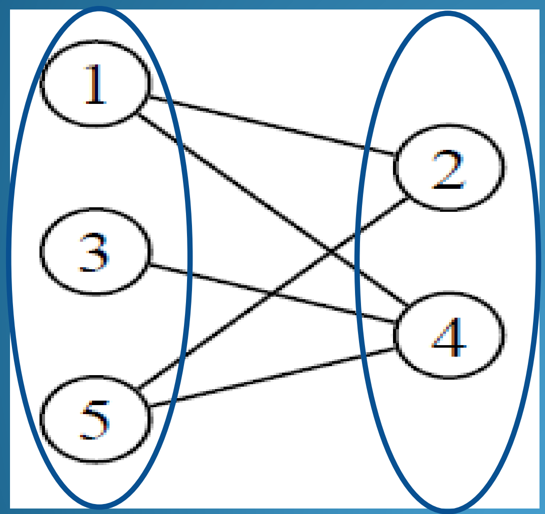
Un graphe simple complet d'ordre n s'appelle une **n-clique**.



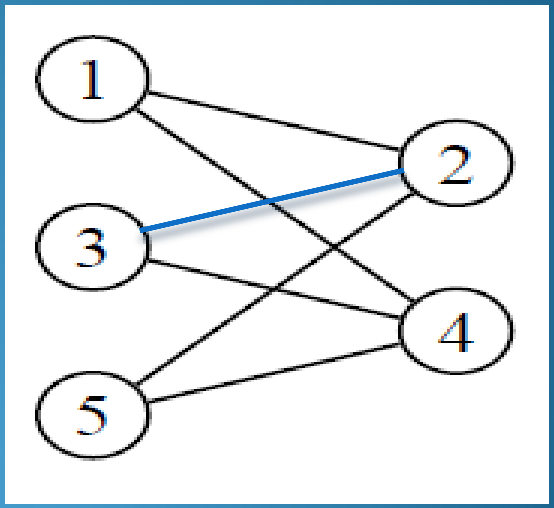
3. Relations entre les éléments d'un graphe

3.2.3. graphe biparti, biparti-complet

Un graphe est **biparti** si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous-graphe X1 et X2 de sorte que deux sommets de la même classe ne soient jamais voisins.



Graphe est biparti



Graphe est biparti-complet

4. Matrices associées à un graphe

4.1. Matrice d'incidence sommet-arc

Soit G un graphe orienté qui possède n sommets numérotés de 1 à n, et m arcs numérotés de 1 à m. On appelle **matrice d'incidence** du graphe la matrice $A=(a_{i,j})$ comportant n lignes et m colonnes telle que :

- $a_{i,j} = +1$, si l'arc j admet le sommet i comme origine;
- $a_{i,j} = -1$, si l'arc j admet le sommet i comme arrivée;
- $a_{i,j} = 0$ dans les autres cas.

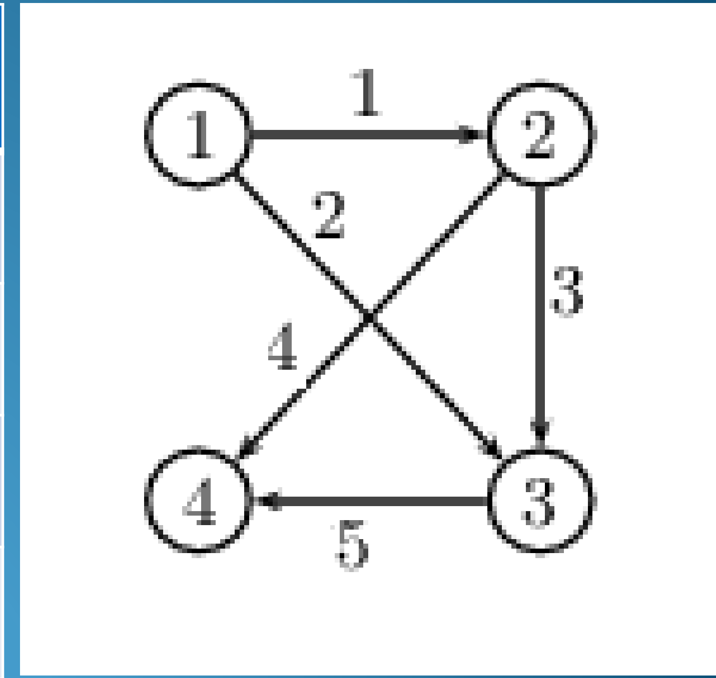
Dans un graphe non-orienté, il n'y a plus de notion d'origine et d'arrivée d'une arête. On met donc +1 là où auparavant on mettait +1 ou -1, et on met 0 ailleurs.

4. Matrices associées à un graphe

4.1. Matrice d'incidence sommet-arc

Voici un exemple de graphe, et la matrice d'incidence associée :

	1 (1,2)	2 (1,3)	3 (2,3)	4 (2,4)	5 (3,4)
1	1	1	0	0	0
2	-1	0	1	1	0
3	0	-1	-1	0	1
4	0	0	0	-1	-1



4. Matrices associées à un graphe

4.2 Matrice d'adjacence sommets-sommets

Soit G un graphe non-orienté qui possède n sommets numérotés de 1 à n. On appelle matrice d'adjacence du graphe la matrice $A=(a_{i,j})$ où $a_{i,j}$ est le nombre d'arêtes joignant le sommet i au sommet j.

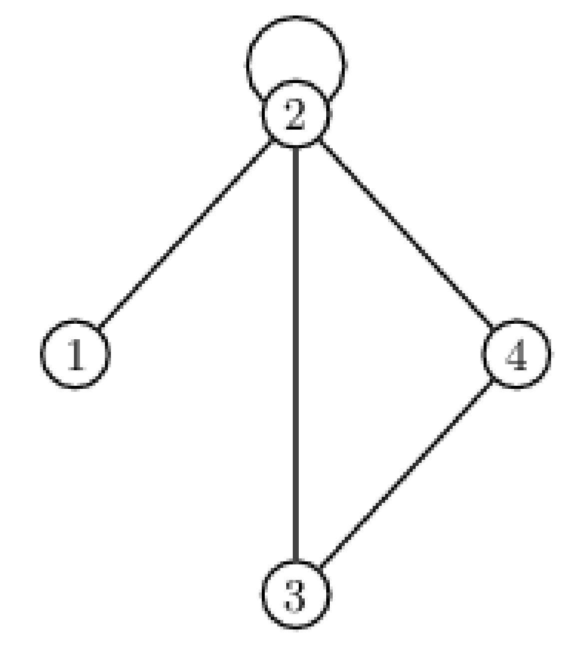
Dans le cas G est un graphe orienté. Cette fois, le coefficient $a_{i,j}$ désigne le nombre d'arcs d'origine i et d'extrémité j.

4. Matrices associées à un graphe

4.2 Matrice d'adjacence sommets-sommets

Exemple : Voici un graphe, et la matrice d'adjacence correspondante

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	1	1	1	1
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0

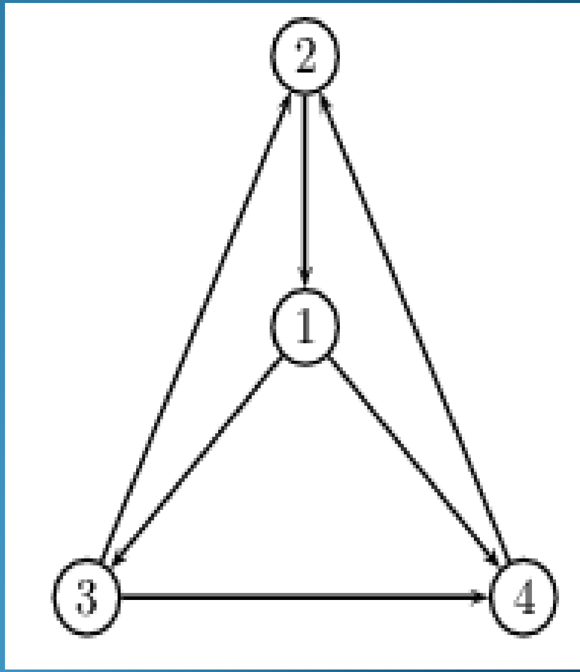


4. Matrices associées à un graphe

4.2 Matrice d'adjacence sommets-sommets

Exemple : Voici un graphe, et la matrice d'adjacence correspondante

	1	2	3	4
1	0	0	1	1
2	1	0	0	0
3	0	1	0	1
4	0	1	0	0



5. Vocabulaire lié à la connexité

5.1. Chaîne, chemin, longueur

Une **chaîne** de longueur $q > 0$ est une séquence $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$ d'arcs de G telle que chaque arc de la séquence est une extrémité en commun avec l'arc précédent, et l'**autre** extrémité en commun avec l'arc suivant. Le nombre d'arcs de la séquence est la **longueur de la chaîne**.

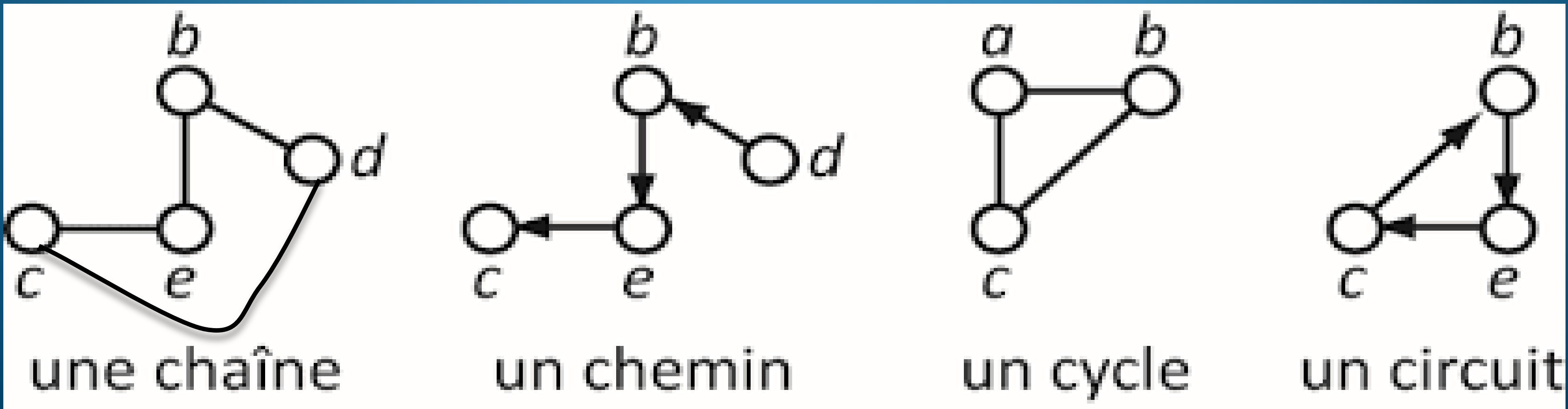
Une **chaîne élémentaire** est une chaîne ne rencontrant pas deux fois le même sommet.

Une **chaîne simple** est une chaîne n'utilisant pas deux fois le même arc.

5. Vocabulaire lié à la connexité

Une ***chaîne*** reliant un sommet c à un sommet d est une succession d'arêtes qui permet de se rendre de c à d. Dans le cas orienté, on parle de ***chemin*** de u vers v.

Un ***cycle*** dans G est une chaîne dont les deux extrémités coïncident. Dans le cas orienté, on parle de **circuit**.



5. Vocabulaire lié à la connexité

5.2. Connexité

Un **graphe connexe** est un graphe tel que pour toute paire de sommets x et y, il existe une chaîne reliant x et y.

Un graphe est dit ***connexe*** s'il ne possède qu'une composante connexe

Le **nombre de connexité** du graphe est simplement le nombre de composantes connexes.

Un graphe orienté est **fortement connexe** si quels que soient u et v dans G, il existe un chemin reliant u à v.

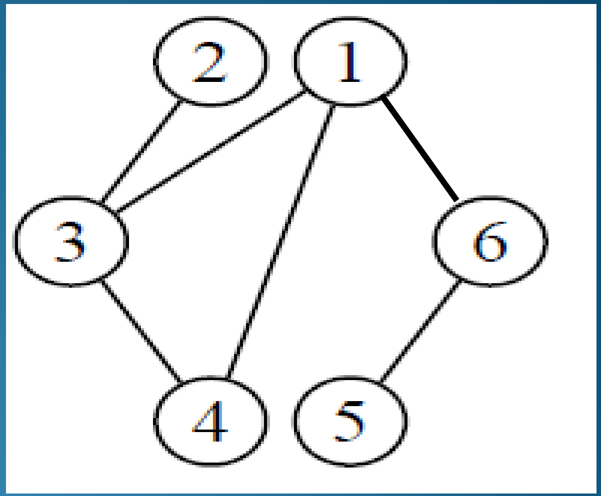
5. Vocabulaire lié à la connexité

5.2. Connexité

Graphe connexe

$V = \{1,2,3,4,5,6\}$

$E = \{\{1,3\},\{1,4\},\{1,6\},\{2,3\},\{3,4\},\{5,6\}\}$



Graphe non connexe

$V1 = \{1,2,3,4\}$ $V1 = \{5,6\}$

$E1 = \{\{1,3\},\{1,4\}, \{3,4\},\{2,3\} \}$

$E2=\{\{5,6 \}\}$