مقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم، و الصلاة و سلام على نبيه الكريم
من خلال التجربة المتواضعة في التدريس والاحتكاك بالطلبة لاحظت مدى عزوفهم على البحث في أمهاه الكتب وخاصة إذا كانت باللغات الأجنبية ومع هذه الأعداد الهائلة من الطلبة و استحالة توفر المراجع الميسرة وبالعدد الكافي اجتهدت في أن ابيض المحاضرات التي قدمتها في السنوات الماضية لمستوى السنة الثانية ليسانس علوم مادة متوخيا في هذا العمل الاسلوب الايسر و الاسهل في ايصال المعلومة من غير تعمق في البراهين معتمدا التركيز على القواعد التطبيقية ومدعمها بوابل كبير من الأمثلة التوضيحية.
وقد حظيت بالقبول من طرف نخبة من الاساتذة بعد الاطلاع عليها مع تقديم ت بعض الملاحظات و المقترحات وقد استفدت منها كثيرا في تحسين التقديم و تدقيق المعلومة و توضيح المعلومة للمطلع على هذا العمل المتواضع.
يحتوي مضمون هذه المطبوعة و المتمثل في ثلاث فصول.
في الفصل الأول تطرقت الى التكاملات المضاعفة مقتصرا على التكامل الثنائي و الثلاثي كما نص عليه البرنامج الجديد لهذه الشعبة مبرزا خواص كل منهما وموضحا طريقة الحساب لكل منهما مع العديد من الأمثلة مرفقا ما ورد بسلسلة من التمارين
أما في الفصل الثاني فقد وضحت بشيء من التفصيل التكامل الوسع الذي يحتوي على كثير من المعلومات الجديدة و المعمقة مما يسبب كثير من الغموض بالنسبة للطلبة و يولد لديهم حالة من الإحباط و ضياع في تحصيلهم العلمي.
أما في الفصل الثالث تعرضت الى السلاسل بأنواعها الأربع السلاسل العددية و متتاليات الدوال مع سلاسل الدوال وكذلك السلاسل الصحيحة وختمت الفصل بسلاسل فوري، في الحقيقة محتوى هذا الفصل يمثل محتوى مقياس بكامله بسبب الكم الهائل من المعلومات المتنوعة و المركزة كما ارفقت هذا الفصل كغيره بسلسلة من التمارين يستعين بها الطالب في تدعيم و تثبيت معلوماته التي تحصل عليها.

د. ابراهيم بن علي

الفصل الأول
التكاملات المضاعفة

يعتبر فرع التحليل من الفروع الهامة في الرياضيات الحديثة، والذي يقدم حلولا عملية لكثير من المسائل المطروحة في مختلف التخصصات التقنية ومن بين أهم الأدوات المستعملة في هذا التخصص مفهوم التكامل الذي يعد أهم فروع الرياضيات البحتة و التطبيقية، يلعب دورا رئيسيا في تطوير الرياضيات، ويساهم مساهمة فعالة في حل المسائل المطروحة في ميادين شتى كالطب والفيزياء والكيمياء والهندسة....إلخ.

ليس من السهل اعطاء مفهوما بسيطا وميسرا من خلال هذا القدر البسيط من المعلومات حول التكامل الثنائي و الثلاثي وذلك خشية الحشو و الإكثار على الطالب مع ذلك يمكنه الجوع إلى المراجع التي اعتمدت عليها في تلخصي هذا الفصل و هي المرجع $[1-6]$، $[8-9]$، $[11-13]$، $[15]$.

1-1 - تذكير:

1-1-1- الدوال متعددة المتغيرات

الدالة لمتغيرين:

تعريف(1.1.1): نسمي دالة f لمتغيرين حقيقين (x,y) العلاقة التي ترفق بكل ثنائية (x,y) من مجال التعريف $IR^2 \supset D_f$ العدد الحقيقي الوحيد نرمز اليه $f(x,y)$

مثال(1.1.1): عين مجموعة تعريف الدالة $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

$$D_f=\{(x,y)\in IR^2/9-x^2-y^2\geq 0\}$$

اي

$$=\{(x,y)\in IR^2/x^2+y^2\leq 9\}$$

النهايات و الاستمرار:

تعريف(2.1.1): يكون العدد الحقيقي l نهاية للدالة f عندما (x,y) تنتهي الى (a,b) - ليس شرطا من D_f - و نكتب $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l$ اذا وفقط اذا كان

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall(x,y)\in D_f;\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\to|f(x,y)-l|<\varepsilon$$

مثال(2.1.1): احسب نهاية الدالة f عندما (x,y) تنتهى الى $(0,0)$ حيث

$$f(x,y)=\frac{x-y}{1+x^2+y^2}$$

ملاحظة(1.1.1): اذا كانت $f(x,y)\to l_1$ عندما $(x,y)\to(a,b)$ وفق المسار c_1 و كانت $f(x,y)\to l_2$ عندما $(x,y)\to(a,b)$ وفق المسار c_2 بحيث $l_1\neq l_2$ فإن $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ غير موجودة

مثال(3.1.1): احسب النهاية ان وجدت عندما $(x,y)\to(0,0)$ الدوال التالية:

$$h(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ ، } g(x,y)=\frac{x^2+\sin^2 y}{2x^2+y^2} \text{ ، } f(x,y)=xy\cos(x-2y)$$

الاستمرار:

1. تعريف(3.1.1): نقول عن دالة لمتغيرين حقيقين f انها مستمرة عند (a,b) اذا كانت $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$ و نقول عن الدالة f انها مستمر ة على المنطقة D اذا كانت مستمرة عند كل نقطة (a,b) من D

مثال(4.1.1): بين فيما اذا كانت الدالة التالية مستمرة

$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x+xy+y^2};(x,y)\neq(0,0)\\ 0;si,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الاشتقاق الجزئي:

تعريف(4.1.1): المشتق الجزئي للدالة f بالنسبة للمتغير x عند النقطة (a,b) و نرمز له $f'_x(a,b)$ وذلك بتثبيت y $(y=b)$ و نحسب المشتق بالنسبة للمتغير x أي و نكتب $f'_x(a,b)=g'(a)$

$$g'(a)=\lim_{h\to0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=f'_x(a,b)$$

بنفس الطريقة المشتق الجزئي للدالة f بالنسبة للمتغير y عند النقطة (a,b)

$$f'_y(a,b)=\lim_{h\to0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

نرمز للمشتقات الجزئية كما يلي:

$$f'_y(x,y)=f'_y=\frac{\partial f}{\partial y}=D_2f=D_yf \text{ ، } f'_x(x,y)=f'_x=\frac{\partial f}{\partial x}=D_1f=D_xf$$

مثال(5.1.5): احسب المشتقات الجزئية الأولى و الثانية للدالتين بالنسبة للمتغير x,y

$$g(x,y)=\ln(1-xy), h(x,y)=xy\sin x \text{ ، }$$

ثم المشتقات الجزئية من الرتب الثانية و الثالثة بالنسبة للمتغير x,y .

المشتقات من الرتب العليا:

$$f_{x^n}{}^{(n)}=\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \;\ldots\ldots\; (f'_x)'_y=f''_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \text{ و } (f'_x)'_x=f''_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

مثال(6.1.1): احسب المشتقات الجزئية الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x,y

$$f(x,y)=e^{xy-3}+y\sin xv \text{ ، }$$

ثم المشتقات الجزئية من الرتب الثانية و الثالثة بالنسبة للمتغير x,y .

الدوال لثلاث متغيرات او اكثر:

تعريف(5.1.1): نسمي دالة f لثلاث متغيرات حقيقية (x, y, z) العلاقة التي ترفق بكل ثلاثية (x, y, z) من مجال التعريف $IR^3 \supset D_f$ عدد حقيقي وحيد نرمز اليه $f(x, y, z)$.

مثال(7.1.1): عين مجموعة تعريف الدالة $g(x, y, z) = \ln(z-y) + xy\sin z$

$$D_g = \{(x, y, z) \in IR^3 / z - y > 0\}$$

اي

$$= \{(x, y, z) \in IR^3 / z > y\}$$

المشتقات الجزئية:

تعريف(6.1.1): المشتق الجزئي للدالة f بالنسبة للمتغير x عند النقطة (x, y, z) و نرمز له $f'_x(x, y, z)$ و $f'_x(x, y, z) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$

و اذا كانت الدالة ذات n متغير اي $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ فإن

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, .., x_i + h, .., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{h} = f_{x_i}{}^{(i)}$$

و نرمز $f_{x_i}{}^{(i)} = D_{x_i} f$ ، المشتقات الجزئية المتتابعة للتابع $f_{x_1 ... x_k}{}^{(k)} = D^k{}_{x_1 .. x_k} f$

مثال(8.1.1): احسب المشتقات الجزئية الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x, y

$g(x, y, z) = \ln(z-y) + xy\sin z$ ،

ثم المشتقات الجزئية من الرتب الثانية و الثالثة بالنسبة للمتغير x, y .

2-1-1 - الدوال الدرجية:

تعريف(7.1.1): نسمي تقسيما للمجال $[a,b]$ من IR كل جملة $(x_0, ..., x_n)$ من نقط المجال $[a,b]$ بحيث $a = x_0 < x_1 .... < x_n = b$ ندعو خطوة التقسيم $S = (x_0, ..., x_n)$ للمجال $[a,b]$ العدد الحقيقي الموجب $|S|$ والمعرفة بـ:

$$|S| = \underset{0 \le i \le n-1}{Max}(x_{i+1} - x_i)$$

تعريف(8.1.1): نسمي الدالة الحقيقية f المعرفة على المجال $[a,b]$ من IR دالة درجية (سلمية)على المجال $[a,b]$ اذا وجد تقسيم $S = (x_0, ..., x_n)$ بحيث تكون f ثابتة على كل مجال جزئي $]x_i, x_{i+1}[, i = 0,1,2,..., n$ و نسمي S تقسيما موصولا بالدالة f ، ونسمي

ايضا $\forall x\in[x_i,x_{i+1}];R(f,s([a,b]))=\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)f(x)$ مجموع ريمان المرفق بالتقسيم S

التكامل:

ليكن $IR\supset[a,b]$ ، $E([a,b])$ يرمز الى مجموعة الدوال الدرجة المعرفة على $[a,b]$

تعريف(9.1.1): ليكن $f\in E([a,b])$ و اليكن التقسيم $S=(x_0,...,x_n)$ للمجال $[a,b]$ بحيث $\forall x\in\,]x_i,x_{i+1}[,i=0,1,2,....,n;f(x)=c_i$

تكامل التابع f على المجال $[a,b]$ العدد الحقيقي الذي نرمز إليه $\int_a^b f(x)dx$ والمعرف بـ:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{x_{i+1}-x_i\to 0}R(f,S([a,b]))=\lim_{x_{i+1}-x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)c_i$$

نظرية(.1.1.1): اذا كان f تابع مستمر على المجال $[a,b]$ فانه توجد متتالية من الدوال الدرجية (f_n) تقارب بانتظام نحو الدلة f على المجال $[a,b]$.

نتيجة(1.1): كل تابع f مستمر على المجال $[a,b]$ فهو قابل للمكاملة عليه.

ملاحظة(2.1): تكفي بعض الامثلة للتذكير بما سبق دراسته في المستوى السابق.

2-1- التكامل الثنائي:

تعريف(1.2.1): نسمي منطقة جزئية من المستوي IR^2 ، كل جزء $D\subset IR^2$ يعرف كما يلي:

$$D=\{(x,y)\in IR^2,a\le x\le b,f_1(x)\le y\le f_2(x)\}$$

حيث f_1 ، f_2 دالتين مستمرتين على $[a,b]$ و تأخذان قيمهما في IR

ملاحظة(1.2.1): إذا كان الجزء المغلق $D'\subset IR^2$ يتكون من اتحاد أجزاء فرعية مغلقة يدعى متراص جزئي

لتكن المنطقة الجزئية D المعرفة كالتالي:

$$D=\{(x,y)\in IR^2,a\le x\le b,f_1(x)\le y\le f_2(x)\}$$ حيث

$f:D\to IR$ دالة محدودة، و اليكن $[c,d]$ إسقاط للمنطقة D على المحور oy و التقسيمين التاليين للمجالين $[a,b]$ ، $[c,d]$ إلى m و n جزء على الترتيب أي

$$a=x_0\le x_1\le...\le x_m=b \quad \text{و} \quad c=y_0\le y_1\le...\le y_n=d$$

و المربع الجزئي $R_{i,j} = [x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}], 0\le i\le m-1, 0\le j\le n-1$

نعرف التقسيم $S(D)$ للمنطقة D كما يلي:

$S(D)=\{(x_i, y_j)\in IR^2, 0\le i\le m, 0\le j\le n\}$ و العددين الحقيقين

$m_{i,j}=\inf\{f(x,y)/(x,y)\in R_{i,j}\}$ ،

$M_{i,j}=\sup\{f(x,y)/(x,y)\in R_{i,j}\}$

تعريف(2.2.1): نسمي العددين الحقيقين التاليين

$$\underline{S}(f,S(D))=\sum_{R_{ij}\subset D}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)m_{ij}$$

$$\overline{S}(f,S(D))=\sum_{R_{ij}\subset D}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)M_{ij}$$ مجموعي داربو السفلي و العلوي

على الترتيب.

تعريف(3.2.1): في الرباعي R_{ij} نثبت التقسيم $S(D)$ و ζ_{ij} نقطة من $R_{ij}\cap D$ والیكن العدد

الحقيقي $R(f,S(D))=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} f(\zeta_{ij})(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$ الذي يسمى مجموع ريمان

$\forall\zeta_{ij}\in R_{ij}\cap D, / D\subseteq[a,b]\times[c,d]$

المرفق بالدالة المحدودة f ويحقق

$\underline{S}(f,S(D))\le R(f,S(D))\le \overline{S}(f,S(D))$

تعريف(4.2.1):ليكن $IR^2\supset D$ و $f: D\to IR$ دالة محدودة

1) نقول عن الدالة f أنها قابلة للمكاملة وفق داربو على المنطقة D إذا كان المجموعين العلوي و السفلي متساويين.

2) نقول عن الدالة f أنها قابلة للمكاملة وفق ريمان على المنطقة D إذا كان للمجموع $R(f,S(D))$ نهاية محدودة عندما $x_{i+1}-x_i$, $y_{j+1}-y_j$ ينتهيان الي الصفر.

3) إذا كانت الدالة f قابلة للمكاملة وفق ريمان او داربو على المنطقة D يكون

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\lim_{\substack{x_{i+1}-x_i\to 0\\ y_{j+1}-y_j\to 0}} R(f,S(D))(\zeta_{ij})$$

$$=\sup_{R_{ij}\subset D}\underline{S}(f,S(D))=\inf_{R_{ij}\subset D}\overline{S}(f,S(D))$$

نظرية(1.2.1): ليكن $IR^2\supset D$ متراص جزئي فإن كل الدوال $f: D\to IR$ و المستمرة عليه قابلة للمكاملة وفق ريمان (باتجاه ريمان).

الخواص الجبرية للتكامل الثنائي:

قضية(1.2.1): التكامل الثنائي وفق ريمان لدالة محدودة على متراص تحقق الخواص التالية

1) الخطية: ليكن $IR^2 \supset D$ و $f, g : D \to IR$ دالتين قابلتين للمكاملة وفق ريمان على D فإنه مهما كان العددان الحقيقيان α, β

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)(x, y)dxdy = \alpha\iint_D f(x, y)dxdy + \beta\iint_D g(x, y)dxdy$$

2) الاضافة: ليكن $IR^2 \supset D_1, D_2$ و $IR^2 \supset D_1 \cup D_2$ بحيث $D_1 \cap D_2 = \phi$، $f : D_1 \cup D_2 \to \Re$ لدينا

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy$$

3) التزايد: إذا كان

$$\forall(x, y) \in D, f(x, y) \geq g(x, y) \Rightarrow \iint_D f(x, y)dxdy \geq \iint_D g(x, y)dxdy$$

و بالتالي $\forall(x, y) \in D, f(x, y) \geq 0 \Rightarrow \iint_D f(x, y)dxdy \geq 0$

4) المتباينة المضاعفة:

$$\left|\iint_D f(x, y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x, y)|dxdy \leq \sup_{(x,y)\in D} |f(x, y)|$$

طرق حساب التكامل الثنائي:

نظرية فبني(Fibini)

نظرية(2.2.1): ليكن $IR^2 \supset D$ و $f : D \to IR$ دالة مستمرة إذا كانت D معرفة بالكيفية التالية

$$D = \{(x, y) \in IR^2 / a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$
$$= \{(x, y) \in Ir^2 / c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

حيث f_1، f_2 دالتين مستمرتين على $[a,b]$ و تأخذان قيمهما في مجموعة الاعداد الحقيقية IR وكذلك g_1، g_2 دالتين مستمرتين على $[c,d]$ و تأخذان قيمهما في IR

فإن التكامل الثنائي للدالة $f(x, y)$ على D هو

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)dx\right)dy$$

تنبيه(1.2.1): برهان نظرية فبني صعب بالنسبة لهذا المستوى لكن يمكن اعطاء تفسير حدسي للنتيجة التالية

نتيجة(1.2.1): اذا كان $D=[a,b]\times[c,d]$ فإن

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

تفسير للنتيجة (1.2.1): اذا كان $\forall(x,y)\in D; f(x,y)\geq 0$ في هذه الحالة التكامل الثنائي $\iint_D f(x,y)dA$ يفسر على أنه الحجم V للجسم S في الحيز D الى غاية المساحة $z=f(x,y)$ ، كما يمكن أن نصيغ V كالتالي: $V=\int_a^b A(x)dx$ حيث $A(x)$ تمثل مساحة مقطع الجسم S بالمستوي العمودي على المحور ox للإحداثية x و بالتالي $A(x)$ هي المساحة المحدود بالمنحنى C الممثل للدالة $z=f(x,y)$ حيث x يعتبر ثابت و $c\leq y\leq d$

أي أن $$A(x)=\int_c^d f(x,y)dy$$

و منه $$\iint_D f(x,y)dA=V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy$$ و بنفس الطريقة بالنسبة لمساحة مقطع الجسم S بالمستوي العمودي على المحور oy للإحداثية y .

مثال(1.2.1): احسب التكامل الثنائي $\iint_\Delta (x^2+y^2)dxdy$ حيث Δ المثلث المحدد كالتالي

$$\Delta=\{(x,y)\in IR^2/0\leq x\leq 1, x-1\leq y\leq 1-x\}$$

الحل:

$$\iint_\Delta (x^2+y^2)dxdy=\int_0^1\left(\int_{x-1}^{1-x}(x^2+y^2)dy\right)dx=\int_0^1 x^2y+y^3/3\Big|_{x-1}^{1-x}dx$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1\left(3x^2(x-1)+(x-1)^3\right)dx=\frac{1}{3}$$

مثال(2.2.1):احسب مساحة الحيز D حيث

$$D=\left\{(x,y)\in\Re^2/-\frac{\sqrt{3}}{2}R\leq y\leq\frac{\sqrt{3}}{2}R, R-\sqrt{R^2-y^2}\leq x\leq\sqrt{R^2-y^2}\right\}$$ الحل:

بوضع $$Air(D)=\iint_D dxdy=\int_{-\sqrt{3}R/2}^{\sqrt{3}R/2}dy\int_{R-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}dx=\int_{-\sqrt{3}R/2}^{\sqrt{3}R/2}(2\sqrt{R^2-y^2}-R)dy$$

$y = R\sin t$ نستنتج أن $-\pi/3 \le t \le \pi/3$ وبالتالي

$$Aire(D) = R^2 \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2\cos t - 1)\cos t dt = \frac{2\pi R^2}{3}$$

تحويل المتغيرين:

نظرية(3.2.1):(قانون تحويل المتغيرين)

ليكن D', D منطقتين من IR^2 و $T : D' \to D$ تطبيق تقابلي من الصنف C^1 بحيث $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ إذا كانت المحددة الجاكوبية للتطبيق T غير معدومة على المنطقة D فإنه من أجل كل دالة مستمرة $f : D \to IR$ لدينا قانون التحويل التالي

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv$$

حيث $$J(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial y}{\partial u}$$

نتيجة(2.2.1): اذا كان $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ يمثل تطبيق (تحويل متغير) من D' في D فإنه من أجل كل دالة $f : D' \to D$ لدينا قانون التحويل الى الاحداثيات القطبية

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$ حيث $\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = r$

مثال(3.2.1): احسب التكامل الثنائي $\iint_D (1 - x^2 - y^2)dxdy$ حيث D الحيز المحدد بربع الدا $S(1, o(0,0))$ و $x \ge 0, y \ge 0$ لدينا الاحداثيات القطبية $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

وبالتالي الحيز الجديد هو $D' = \{(r,\theta) \in IR^2 / 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi/2\}$ و منه

$$\iint_D (1 - x^2 - y^2)dxdy = \iint_{D'} (1 - r^2)rdrd\theta = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 (r - r^3)dr\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left.\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right|_0^1 d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{8}$$

مثال(4.2.1): باستخدام الاحداثيات القطبية أحسب التكامل الثنائي $\iint_D (x-y)^2 dxdy$ حيث

D يمثل القرص الذي مركزه $O(0,0)$ ونصف قطره 1 و $0 \le y \le x$

الحل: لدينا $D=\{(x,y)\in IR^2; x^2+y^2\le 1, 0\le y\le x\}$

$$D'=\{(r,\theta)\in IR^2; 0\le r\le 1, 0\le\theta\le\pi/4\}$$

$$\iint_D (x-y)^2\,dxdy=\iint_{D'} r^3(\cos\theta-\sin\theta)^2\,drd\theta$$

$$\int_0^1 r^3dr\int_0^{\pi/4}(1-2\sin\theta\cos\theta)d\theta=\frac{1}{4}\left[\theta-\sin^2\theta\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right]$$

تحويل المتغيرين بصورة كيفية

مثال(5.2.1) :اوجد قيمة التكامل $\iint_D (y-2x)^2\sqrt{x+y}\,dxdy$

حيث $D=\{(x,y)\in IR^2; 0\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$

مستعملا التحويل التالي :

$$v=y-2x, u=x+y\Rightarrow x=\frac{1}{3}(u-v), y=\frac{1}{3}(2u+v)$$

حل : أي $D'=\{(u,v)\in IR^2; 0\le u\le 1, -2u\le y\le u\}$

و المحدد الجاكوبي المرفق بهذا التحويل هو $J(u,v)=\begin{vmatrix}1/3 & -1/3\\ 2/3 & 1/3\end{vmatrix}=1/3$

$$\iint_D (y-2x)^2\sqrt{x+y}\,dxdy=1/3\iint_{D'} v^2\sqrt{u}\,dudv=1/3\int_0^1\int_{-2u}^{u} v^2\sqrt{u}\,dvdu=2/9$$

قانون قرين - ريمان:

تعريف(5.2.1)**:** منطقة مستوية (أو مساحة مستوية) $IR^2\supset D$ نقول أنها موجه في الاتجاه الموجب اذا كان المتحرك على الحافة ∂D يتحرك باتجاه حركة عقارب الساعة.

نظرية(4.2.1): ليكن $\partial D, D\subset IR^2$ حافته متجه بالاتجاه الموجب و كان $w(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ شكل تفاضلي معرف على D من الصنف C^1 فإن قانون قرين - ريمان

$$\oint_{\partial D} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)dxdy$$

نتيجة(3.2.1): اذا كان الشكل التفاضلي $w(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ شكل تفاضلي من الصنف C^1 معرف على المغلق D فإن $\oint_{\partial D} w=0$

نتيجة(4.2.1):مساحة المتراص D من $\Re^2$ تعطى حسب العلاقة

$$AireD = \frac{1}{2}\iint_D (xdy - ydx)$$

مثال(6.2.1): استخدم قانون قرين – ريمان لحساب التكامل المنحني للشكل التفاضلي التالي $w = \ln\left(\frac{y+2}{x^2+1}\right)dx + x\frac{3y+7}{y+2}dy$ على طول الدائرة $S(1, o(0,0))$ الموجه في الاتجاه الموجب

الحل:

$$\int_{\partial D} w = \iint_D \left(\frac{3y+7}{y+2} - \frac{1}{y+2}\right)dxdy = \int_D 3dxdy$$

$$= 3Aire(D) = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 rdrd\theta = 3\pi$$

3-1 - التكامل الثلاثي:

تعريف و خواص(1.3.1): ليكن $IR^3 \supset V$ حجم مغلق و محدود (متراص)معرف بالعبارة $V = \{(x,y,z) \in IR^3 / (x,y) \in D, g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\}$ حيث $IR^2 \supset D$ و $g_1, g_2 : D \to IR$ دالتين مستمرتين، والتكن $[a_1,b_1],[a_2,b_2],[a_3,b_3]$ مساقط الحجم V على المحاور ox, oy, oz على الترتيب. نعتبر متوازي المستطيلات الجزئي $P_{i,j,l}$ المعرف بـ: $P_{i,j,l} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_l, z_{l+1}] \cap V$ ، لدينا مجموع ريمان

$$\forall X_{i,j,l} \in P_{i,j,k}, R(f, S(V), X_{i,j,l}) = \sum_{i,j,l} f(X_{i,j,l}) v_{i,j,l}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{k-1} f(X_{i,j,l})(x_{i+1}, x_i)(y_{j+1}, y_j)(z_{l+1}, z_l)$$

تعريف(2.3.1): تكون الدالة المستمرة $f : V \to IR$ قابلة للمكاملة على الحجم V إذا كانت $\lim_{v_{i,j,l}\to 0} R(f, S(V), X_{i,j,l}) = \lim_{v_{i,j,l}\to 0}\sum_{i,j,l} f(X_{i,j,l}) v_{i,j,l}$ موجودة و محدودة و تسمى التكامل الثلاثي للدالة f على الحجم V و نكتب

$$\lim_{v_{i,j,l}\to 0} R(f, S(V), X_{i,j,l}) = \lim_{v_{i,j,l}\to 0}\sum_{i,j,l} f(X_{i,j,l}) v_{i,j,l} = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

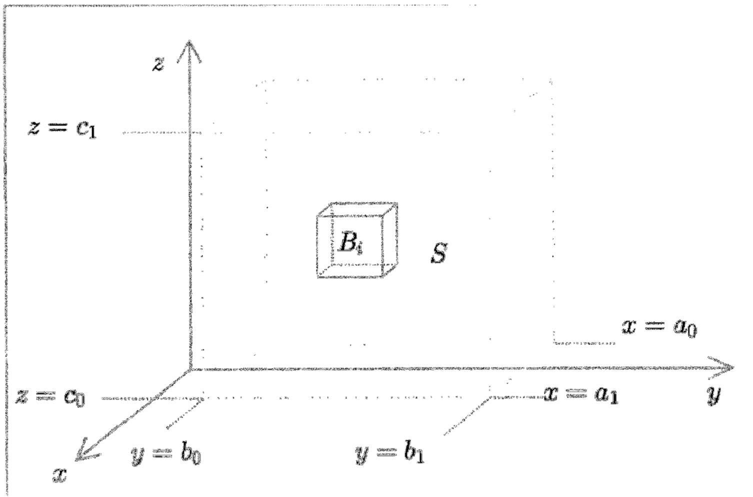
ملاحظة(1.3.1): الخواص الجبرية للتكاملات الثنائية صحيحة من أجل التكاملات الثلاثية.

طرق حساب التكامل الثلاثي:

حالة متوازي السطوح(متوازي المستطيلات)

ليكن متوازي السطوح S المحدود بالمستويات الستة

$a_1 \le x \le a_2, b_1 \le y \le b_2, c_1 \le z \le c_2$ كما هو موضح في الشكل



شكل 1

مثال(1.3.1):: ليكن S مكعب معرف كما يلي:

$$S = \{(x, y, z) \in \Re^3 : 1 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, -2 \le z \le 0\}$$

احسب التكامل الثلاثي $\iiint\limits_S ye^{xy} dv$

الحل:

$$\iiint\limits_S ze^{xy} dv = \int_0^2 \int_1^3 \int_{-2}^0 ye^{xy} dzdxdy = 2\int_0^2 \int_1^3 ye^{xy} dxdy$$

$$= 2\int_0^2 \left(e^{3y} - e^y\right)dy = 2\left(\frac{e^{3y}}{3} - e^y\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2e^6}{3} - 2e^2 + \frac{4}{3}$$

قانون فبني:

نظرية(1.3.1): ليكن $D \subset \Re^2$ و التكن الدالتين المستمرتين $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \Re$ و V متراص من IR^3 معرف تحليليا بـ

$$V = \{(x, y, z) \in \Re^3 / (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y)\}$$

التكامل الثلاثي للدالة المستمرة $f : V \to IR$ هو

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right)dxdy$$ و بنفس الكيفية اذا كان

او يكون لدينا مثلا $V' = \{(x,y,z)\in \Re^3 / (x,z)\in D, \phi_1(x,z)\le y \le \phi_2(x,z)\}$

$$V'' = \{(x,y,z)\in \Re^3 / (y,z)\in D, \gamma_1(y,z)\le x \le \gamma_2(y,z)\}$$

مثال(2.3.1): احسب حجم المنطقة $V \subset \Re^3$ المحددة بالمنحنيين للدالتين

$\varphi_1(x,y) = x^2 + y^2$ و $\varphi_2(x,y) = 4 - 3(x^2+y^2)$ و اليكن D اسقاط V على

المستوي oxy وبالتالي D محدد بالمنحنى c الناتج عن تقاطع تمثلي φ_1, φ_2 أي

و $D = \{(x,y)\in IR^2 / x^2+y^2 \le 1\}$

$$V = \{(x,y,z)\in IR^3 / (x,y)\in D, x^2+y^2 \le z \le 4 - 3(x^2+y^2)\}$$

وبالتالي حسب نظرية فبني

$$vol(V) = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{4-3(x^2+y^2)} dz\right) dxdy = 4\iint_D \left[1-(x^2+y^2)\right] dxdy$$

$$= 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2) r dr = 2\pi$$

نظرية(2.3.1):: نفرض أن المنطقة V معرفة بالمنحنيات التالية:

$$\varphi_1(x,y)\le z \le \varphi_2(x,y), p(x)\le y \le q(x), a\le x\le b$$

بحيث الدوال $\varphi_1, \varphi_2, p, q$ مستمرة و كانت الدالة f مستمرة في S فإن

$$\iiint_V f(x,y,z) dv = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z) dxdydz$$

مثال(3.3.1):: اوجد قيمة التكامل $\iiint_V (x^2-y^2) dv$ حيث

و $V = \{(x,y,z)\in \Re^3; -y^2 \le z \le x^2; (x,y)\in D\}$

$$D = \{(x,y)\in \Re^2; 0\le y\le x; 0\le x\le 1\}$$

الحل:

$$\iiint_V (x^2-y^2) dv = \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_{-y^2}^{x^2} (x^2-y^2) dz\right) dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^x (x^4-y^4) dy\right) dx = \int_0^1 \frac{4}{5} x^5 dx = \frac{2}{15}$$

تحويل المتغيرات:

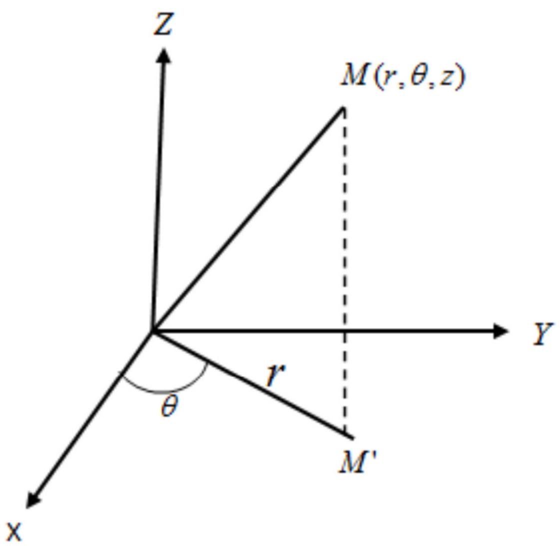
نظرية(2.3.1): ليكن U_2,U_1 مفتوحين غير خاليين من $\Re^3$ و اليكن $T:U_1\to U_2$ تطبيق تقابلي من الصنف C^1 وتحويله العكسي $T^{-1}:U_2\to U_1$ فإنه من أجل كل متراص $V'\subset U_1$ من أجل كل دالة مستمرة $f:U_1\to U_2$ لدينا

$$\iiint_{T(V')} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{V'}(f\circ T)(u,v,w)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|dudvdw$$

الاحداثيات الاسطوانية:

اذا عينا النقطة M' مسقط النقطة M على المستو (XOY) قطبيا النقطة M تمثل بالثلاثية (r,θ,z) و التي تسمى الاحداثيات الاسطوانية و الانتقال من الاحداثيات الديكارتية الى الاسطوانية بالتحويل التالي:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$



نتيجة(1.3.1): (الاحداثيات الاسطوانية) اذا كان $T(r,\theta,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,z)$ فإن $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)}=r$ و بالتالي

$$\iiint_{T(V')} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{V'} f(r,\theta,z)rdrd\theta dz$$

مثال(4.3.1): احسب التكامل الثلاثي $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ على الاسطوانة

$V=\{(x,y,z)\in\Re^3 / x^2+y^2\le R^2, 0\le z\le h, h>0\}$ و

$$V'=\{(r,\theta,z)\in\Re^3 / 0\le r\le R, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le z\le h, h>0\}$$

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^h r^2dz\right)d\theta\right)dr=\frac{2\pi}{3}hR^3$$

مثال(5.3.1):: احسب التكامل الثلاثي $\iiint\limits_V x^2dv$ على الاسطوانة

$V=\{(x,y,z)\in\Re^3 / x^2+y^2\le 1, (x^2+y^2)^2\le z\le 1\}$ و

$$V'=\{(r,\theta,z)\in\Re^3 / 0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi, r^4\le z\le 1\}$$

الحل:

$$\iiint\limits_V x^2dv=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\int_{r^4}^1 r^2\cos^2\theta dz\right)rdrd\theta=\pi\int_0^1\left(r^3-r^7\right)dr$$

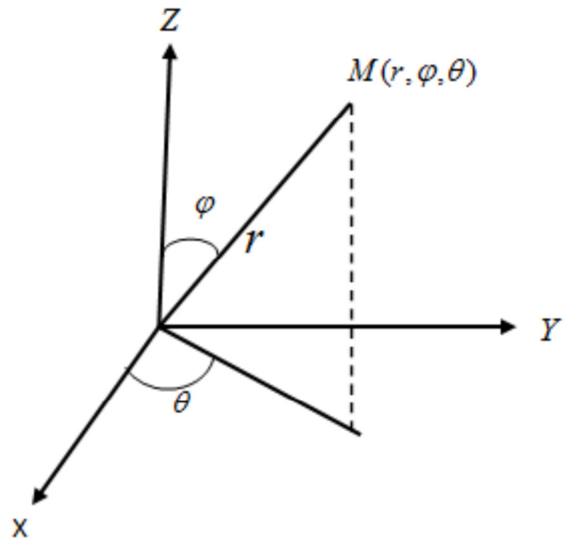
$$=\pi\left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^8}{8}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}$$

الاحداثيات الكروية:

يتم تعيين النقطة M في الفضاء (OX,OY,OZ) بالثلاثية المرتبة (r,φ,θ) و التي نسميها الاحداثيات الكروية حيث r هو بعد M عن المبدأ O و φ قيس الزاوية $(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OM})$ و θ قيس الزاوية القطبية و يتم التحويل من الاحداثيات الديكارتية الى الكروية وفق العلاقات التالية

$$\begin{cases} r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{cases}$$

و يكون هذا التحويل تقابلي إذا تحقق $(r>0, 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi)$.



نتيجة(2.3.1): (الاحداثيات الكروية) اذا كان

$T(r,\varphi,\theta)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$ حيث $0\le r\le R, R\in IR_+$

، $0\le\varphi\le\pi$ ، و $0\le\theta\le 2\pi$

فإن $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$ و بالتالي

$$\iiint_{T(V')} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{V'} f(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$$

مثال(6.3.1): احسب حجم الكرة ذات المركز $o(0,0,0)$ و نصف القطر R أي

$V=\{(x,y,z)\in IR^3 / x^2+y^2+z^2\le R^2\}$ و بالتالي

$V'=\{(r,\varphi,\theta)\in IR^3 / 0\le r\le R, 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi\}$ و منه

$$vol(V)=\iiint_V dv=\int_0^R(\int_0^{2\pi}(\int_0^{\pi} r^2\sin\theta d\theta)d\varphi)dr=4\pi R^3/3$$.

مثال(7.3.1):: احسب التكامل $\iiint_V x^2dv$ حيث V يمثل المجسم المحصور بين الكرتين

$$x^2+y^2+z^2=4 \text{ و } x^2+y^2+z^2=9$$

الحل: لدينا $V=\{(x,y,z)\in IR^3 / 4\le x^2+y^2+z^2\le 9\}$،

وبالتالي $V'=\{(r,\varphi,\theta)\in IR^3 / 2\le r\le 3, 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi\}$ و منه:

$$\iiint_V x^2 dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_2^{3} r^4\cos^2\theta\sin^3\varphi dr d\varphi d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(3^5-2^5\right)\sin^3\varphi\cos\theta d\varphi d\theta$$

$$= -\frac{211}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\varphi\right)d\cos\varphi\cos^2\theta d\theta = \frac{844}{15}\int_0^{2\pi} cos^2\theta d\theta = \frac{844\pi}{15}.$$

تغيير المتغيرات بصورة كيفية

مثال(8.3.1):: Ω منطقة من الفضاء xyz معرفة كما يلي:

$$\Omega = \{(x,y,z);1\le x\le 2, 0\le xy\le 2, 0\le z\le 1\}$$

فأوجد التكامل $\iiint_\Omega \left(x^2y+3xyz\right)dxdydz$

الحل: من خلال عبارة الدالة المكاملة وحدود المنطقة Ω يستحسن ان نستعمل التحويل التالي:

$$u = x, v = xy, w = 3z \Rightarrow x = u, y = \frac{u}{v}, z = \frac{3}{w}$$

و منه G صورة المنطقة Ω بهذا التحويل تعرف كما يلي:

$G = \{(u,v,w)\in IR^3;1\le u\le 2, 0\le v\le 2, 0\le w\le 3\}$ والمحدد الجاكوتي

المرفق هو
$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -v/u^2 & 1/u & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = 1/3u$$

إذن
$$\iiint_\Omega \left(x^2y+3xyz\right)dxdydz = \int_1^2\left(\int_0^2\left(\int_0^3 (uv+vw)(1/3u)dw\right)dv\right)du$$

$$= \int_1^2\left(\int_0^2\left(v+\frac{3v}{2u}\right)dv\right)du = \int_1^2\left(2+\frac{3}{u}\right)du = 2+\ln 2.$$

4-1- سلسلة تمارين للفصل الأول

التمرين الأول:

أوجد الدوال الأصلية للدوال التالية:

$$f(x)=2x\left(1+x^2\right)^{-1} \text{ ، } g(x)=\cos x - x\sin^2 x \text{ ،}$$

$$h(x)=\left(x\ln x\ln(\ln x)\right)^{-1}$$

التمرين الثاني:

احسب التكاملات التالية:

$$\int_1^2 x^2\ln x dx \text{ ، } \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} \text{ ، } \int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx \text{ ، } \int_0^1 \frac{arctgx}{1+x^2}dx$$

التمرين الثالث:

أوجد الدوال الأصلية باستخدام التكاملات غير المحدودة

$$\int \cos^{2014} x\sin xdx \text{ ، } \int e^x\cos xdx \text{ ، } \int\frac{dx}{\sin x} \text{ ، } \int\frac{dx}{e^x+2e^{-x}}$$

التمرين الرابع:

احسب التكاملين الثنائيين التاليين في 1) و2)

1) لتكن $D=\left\{(x,y)\in IR^2 / 0<x<2, et 1<y<2\right\}$ ،

$$\iint_D (x+y)e^{x+y}dxdy$$

2) و التكن $D'=\left\{(x,y)\in IR^2 /, 0\le x\le 1, x+y\le 1\right\}$ ،

$$\iint_{D'} (1-x)^2 dxdy$$

التمرين الخامس:

لتكن $D=\left\{(x,y)\in IR^2 / |x|<1, et |y|<1\right\}$

احسب التكامل الثنائي: $\iint_D |x+y|dxdy$

التمرين السادس:

لتكن $D=\left\{(x,y)\in IR^2 /, x>0, y>0, et, x+y<1\right\}$ احسب التكامل:

1) $\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$

2) لتكن

$$D=\{(x,y)\in IR^2 /, x^2+y^2-x<0, x^2+y^2-y>0 .et; y>0\}$$

احسب التكامل $\iint_D (x+y)^2\,dxdy$

التمرين السابع:

احسب التكامل $\iint_{D_1} ye^x\,dxdy$ حيث D_1 يمثل النصف العلوي للقرص $D\left(o(0,0),\sqrt{5}\right)$ أي

$$D_1=\{(x,y)\in IR\times IR_+ /, x^2+y^2\le 5\}$$

التمرين الثامن:

1) لتكن $D=\{(x,y)\in IR^2 /, x^2+y^2\le n^2 .,.n\in IN\}$

احسب التكامل $(1')$ .... $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ بدلالة n ،

جد نهايته لما $n\longrightarrow+\infty$

2) نعيد تعريف D كما يلي:

$$D=\{(x,y)\in IR^2 /, -n\le x\le n, -n\le y\le n\}$$

بين انه يمكن كتابة التكامل $(1')$ على الشكل $\left(\int_{-n}^{n} e^{-t^2}\,dt\right)^2$

استنتج قيمة التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$

التمرين التاسع:

نعرف D كما يلي: $D=\{(x,y)\in IR^*\times IR /, 1/x\le y\le -4x+5\}$

جد قيمة التكامل الثنائي $\iint_D x^2 y\,dxdy$

التمرين العاشر: لتكن

$$V=\{(x,y,z)\in IR^3 /, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, z\le 1-y^2, et, x+y\le 1.\}$$

احسب التكامل: $\iiint_V z\,dxdydz$

التمرين الحادي عشر:

نعرف الحجم V كما يلي:

$$V = \{(x, y, z) \in IR^3 /, -1 \le y \le 1, .., 0 \le z \le 1 - x^2\}$$

اوجد قيمة التكامل $\iiint_V y^2 e^x dxdydz$

التمرين الثاني عاشر:

لتكن $V = \{(x, y) \in IR^3 /, 0 < z < 1.et, x^2 + y^2 < z^2.\}$

احسب التكامل $\iiint_V xyzdxdydz$

التمرين الثالث عاشر:

ليكن V حجم الكرة ذات المركز المبدأ $o(0,0)$ و نصف القطر $R = 1$ ما عدا النقطة $N(0,0,1)$ ، احسب التكامل $\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}}$

التمرين الرابع عشر:

لتكن $V = \{(x, y, z) \in IR^3 / z \le 1,$ و$x^2 + y^2 \le z\}$

استخدام الإحداثيات الاسطوانية لحساب التكامل الثلاثي $\iiint_V x^2 zdxdydz$

الفصل الثاني
التكامل المعمم(الموسع)

في المستويات السابقة تم دراسة تكامل الدوال المستمرة على مجال مغلق و محدود (متراص) أي مثل $[a,b]$ حيث a,b عددان حقيقيان، أما في هذا المقياس فسندرس التكاملات على مجالات غير متراصة أي المجالات من الشكل $[a,+\infty[$ ، $]a,+\infty[$ ، $]-\infty,b]$ ، $]-\infty,b[$ ، $]-\infty,+\infty[$ ، $[a,b[$ ، $]a,b]$ ، $]a,b[$ و يسمى أي تكامل على المجالات السابقة بالتكامل المعمم أو الموسع وهناك من المراجع من يسمي هذا التكامل بالمعتل للإشارة المراجع المعتمدة في هذا الفصل $[4]$ ، $[14-13]$ ، $[16]$

يمكن تقسيم هذا الفصل وفق المجالات السابقة

1-2- التكامل على مجال غير محدود

حالة المجال $[a,+\infty[$

تعريف(1.1.2): ليكن f تابعا معرفا على المجال $I=[a,+\infty[$ و قابل للمكاملة على كل مجال محدود ومغلق $[a,x]\subset I$ ، $x>0$ و بالتالي الدالة F حيث $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ معرفة على I

- إذا كانت F تقبل نهاية محدودة l عندما $x\to+\infty$ نقول أن التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ متقارب نحو l
- وإذا كانت F لا تقبل نهاية محدودة l عندما $x\to+\infty$ نقول عن التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ أنه متباعد.

ملاحظة(1.1.2): ليكن $\lambda\in\Re^*$ التكاملين $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ ، $\int_a^{+\infty}\lambda f(t)dt$ من نفس طبيعة.

مثال(1.1.2): أدرس طبيعة التكامل $\int_a^{+\infty} dt/t^k$ ، حيث (a>0،k>0)

الحل: نعلم بأن الدالة $t\to 1/t^k$ معرفة ومستمرة على كل مجال $[a,x]\subset I$ و بالتالي

1) في حالة $k\neq 1$

$F(x)=\int_a^x dt/t^k=\frac{1}{k-1}\left[a^{1-k}-x^{1-k}\right]$ و بالتالي

إذا كان $k<1$ فإن $\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ أي متباعدة و إذا كان $k>1$ فإن $\lim_{x\to+\infty}F(x)=a^{1-k}/(k-1)$ أي متقاربة

تكامل الدوال (التوابع)الموجبة:

نظرية(1.1.2): اذا كانت f دالة موجبة على المجال $I=[a,+\infty[$ و قابلة للمكاملة على المجال $I\subset[a,x]$ فإن التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ يكون متقاربا إذا وفقط إذا كان $\int_a^{x} f(t)dt$ محدودا من الأعلى.

البرهان: بما أن $f\geq 0$ فإن الدالة $F(x)=\int_0^{x} f(t)dt$ متزايدة وبالتالي فإن نهايتها لما $x\to+\infty$ محدودة إذا وفقط إذا كانت F محدودة من الأعلى أي

$\exists M>0,\forall x\in[a,+\infty[:F(x)\leq M$ ، ومنه $\int_a^{+\infty} f(t)dt<+\infty$

أما إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ يكون التكامل متباعد أي $\int_a^{+\infty} f(t)dt=+\infty$.

نظرية(2.1.2): إذا كان من أجل كل $t\geq a$ ، $0\leq f(t)\leq g(t)$. لدينا

- إذا كان التكامل $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ متقاربا فان التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ متقارب
- و إذا كان التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ متباعدا فان التكامل $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ متباعد.

البرهان: الدالتان g,f موجبتان و مستمرتين على $I=[a,+\infty[$ و تحققان $\forall t\in I,0\leq f(t)\leq g(t)$ ، كذلك قابلتين للمكاملة على كل مجال $[a,x]\subset I$ ، $x>a$

نعرف الدالتين $F(x)=\int_a^{x} f(t)dt$ ، $G(x)=\int_a^{x} f(t)dt$ واضح أن

$\forall t\in]a,x[,(G-F)'(t)\geq 0$ ومنه الدالة $G-F$ متزايدة و بالتالي $F(x)\leq G(x)$

إذا كانت $G(x)$ تنتهي إلى نهاية l عندما $x\to+\infty$ فإن $F(x)\leq G(x)\leq l$ ومنه نستنتج أن الدالة F محدودة و بالتالي فهي نهاية منتهية.

نتيجة(1.1.2): لتكن f دالة معرفة و موجبة على المجال $I=[a,+\infty[$ و قابلة للمكاملة على المجال $I\subset[a,x]$ ، إذا وجد $r\in IR$ بحيث $\lim\limits_{x\to+\infty}x^r f(x)=l$

- إذا كان $r>1$ فان التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ يكون متقاربا،

- و إذا كان $r\le 1$ فان التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ يكون متباعدا.

مثال(2.1.2): لتكن f دالة لمتغير حقيقي حيث $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+e^x)}}$ ، المعرفة و المستمرة على $]1,+\infty[$ و القابلة للمكاملة على المتراص $[1,x]\subset[1,+\infty[$ من أجل $r>1$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{r-1/2}}{\sqrt{1+e^x}}=0$ وبالتالي حسب النتيجة(1.2) التكامل $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ متقارب.

نتيجة(2.1.2): لتكن f ، g دالتين موجبتين معرفتين و مستمرتين على $I=[a,+\infty[$ و قابلتين للمكاملة على $[a,x]\subset[a,+\infty[$

- 1) اذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/g(x)=l$ ، $l\ne\infty$ ، $l\ne 0$ فإن التكاملين $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ ، $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ من نفس الطبيعة

- 2) اذا كان $l=0$ فان تقارب $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ يؤدي الى تقارب $\int_a^{+\infty} f(t)dt$

- 3) اذا كان $l=\infty$ فان تباعد $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ يؤدي الى تباعد $\int_a^{+\infty} g(t)dt$.

مثال(3.1.2): حقق النتيجة السابقة على الدوال التالية: $h(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ ،

$$T(x)=x^2e^x \quad ، \quad k(x)=\frac{e^x}{x} \quad \text{عندما} \quad x\to+\infty$$

ملاحظة(2.1.2): اذا اردنا أن نقسم تكامل متقارب الى مجموع تكاملين يجب التأكد من أن كل منهما متقارب.

مثال(4.1.2): لدينا التكامل $\int_{x}^{+\infty}\frac{2}{t^2-1}dt$ متقارب لان $\frac{2}{t^2-1}$ يكافئ في جوار ألانهاية $\frac{1}{t^2}$

(انظر مثال(1.1.2))، لكن لا يمكن كتابة $\int_{x}^{+\infty}\frac{2}{t^2-1}dt=\int_{x}^{+\infty}\frac{dt}{t-1}-\int_{x}^{+\infty}\frac{dt}{t+1}$ لان كلاهما متباعد.

حالة المجال $]-\infty,b]$:

ليكن f تابع معرف على $]-\infty,b]$ و قابل للمكاملة على $[x,b],(x<b)$

اذا كان $F(x)=\int_{x}^{b}f(t)dt$ يقبل نهاية محدودة l عندما $x\to-\infty$ فإن $\int_{-\infty}^{b}f(t)dt$ متقارب نحو l، في حالة $a=b$ و اذا كان $\int_{a}^{+\infty}f(t)dt$ ، $\int_{-\infty}^{a}f(t)dt$ متقاربين فإن التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt$ الناتج عن مجموعهما متقارب.

مثال(5.1.2): التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos^2 t}{t^2+1}dt$ موجود (متقارب) لان $\forall x\in\Re,\frac{\cos^2 x}{1+x^2}\leq\frac{1}{x^2+1}$

و $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos^2 t}{t^2+1}dt=2\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos^2 t}{t^2+1}dt$ تكامل دالة زوجية و بما أن التكامل $\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1}$ متقارب و بالتالي التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos^2 t}{t^2+1}dt$ متقارب

2-2- التكامل على مجال محدود غير متراص:

نظرية(1.2.2): ليكن f تابعا معرفا على المجال $J=[a,b[,a<b$ و قابل للمكاملة على كل مجال محدود ومغلق(متراص) $J\supset[a,x]$ ، $b>x>a$ و الدالة F حيث $F(x)=\int_{a}^{x}f(t)dt$ معرفة على J

- اذا كان $F(x)$ يقبل نهاية محدودة l' عندما $x\to b$ نقول أن $\int_{a}^{b}f(t)dt$ موجود وهو متقارب نحو l'

- اذا كان $F(x)$ لا يقبل نهاية منتهية عندما $x \to b$ نقول أن $\int_a^b f(t)dt$ متباعد

مثال(1.2.2): ادرس طبيعة التكامل $\int_{-1}^{0} t^2 \ln|t|dt$

الحل: ليكن $]-1,0[\subset [-1,x]$ و بالتالي $\int_{-1}^{x} t^2 \ln|t|dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln|t|\right]_{-1}^{x} - \frac{1}{3}\int_{-1}^{x} t^2 dt$

$$= \frac{x^3}{3}\ln|x| - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}$$

واضح أن $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^3}{3}\ln|x| - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}\right] = \frac{1}{9}$ ومنه نستنتج أن متقارب.

تكامل التوابع الموجبة:

نظرية(2.2.2): ليكن f تابعا موجبا معرفا على المجال $J = [a,b[, a < b$ و قابل للمكاملة على كل متراص $[a,x] \subset J$ ، $b > x > a$ ، يكون التكامل $\int_a^b f(t)dt$ متقاربا اذا و فقط إذا كان محدودا من الاعلى. أي $\exists M > 0, \forall x \in [a,b[\to \int_a^x f(t)dt \le M$

البرهان: بما أن $0 \le f$ فإن الدالة $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ متزايدة وبالتالي النهاية لما $x \to b$ محدودة إذا وفقط إذا كانت F محدودة من الأعلى أي $\int_a^b f(t)dt < +\infty$ أما إذا كانت $\lim_{x\to b} F(x) = +\infty$ يكون التكامل متباعد أي $\int_a^b f(t)dt = +\infty$.

نظرية(3.2.2): اذا كان $\forall t \in [a,b[, 0 \le f(t) \le g(t)$

و اذا كان $\int_a^x g(t)dt$ متقاربا عندما $x \to b$ يكون $\int_a^x f(t)dt$ متقاربا عندما $x \to b$

أما اذا كان $\int_a^x f(t)dt$ متباعدا عندما $x \to b$ يكون $\int_a^x g(t)dt$ متباعدا عندما $x \to b$.

نتيجة(1.2.2): لتكن f تابعا معرفا و موجبا على المجال $J=[a,b[$ و قابلة للمكاملة على المجال $[a,x]\subset J$، إذا وجد $r\in IR$ بحيث $\lim_{x\to b}(b-x)^r f(x)=l'$

- إذا كان $r<1$، و l' منتهي فان التكامل $\int_a^b f(t)dt$ يكون متقاربا،

و إذا كان و $l'=0$ فان التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ يكون متباعدا.

ملاحظة(1.2.2): كل النظريات المدرجة على المجال $[a,b[$ صحيحة على المجال $]a,b]$ و كذلك النتيجة (2.2.2) بحيث $\lim_{x\to a}(x-a)^r f(x)=l''$.

مثال(2.2.2): ادرس تقارب التكامل $\int_0^1 dt\Big/\sqrt{t(1+e^t)}$

لاحظ أن التابع $f(t)=1\Big/\sqrt{t(1+e^t)}$ معرف، موجب و مستمر على $]0,1]$ و قابل للمكاملة على المتراص $[x,1]\subset]0,1]$ وهو غير محدود لأن $\lim_{t\xrightarrow{>}0} f(t)=+\infty$، لكن $\lim_{t\xrightarrow{>}0} t^{1/2}f(t)=1/\sqrt{2}$ أي $r=1/2<1$ و بالتالي حسب النتيجة (1.2.2) و الملاحظة (1.2.2) التكامل المعطى متقارب.

ملاحظة(2.2.2): لدراسة التكامل المعمم غالبا ما نستعمل المقارنة مع تكامل من النمط التالي:

1) $\int_a^{+\infty} dt/t^r$ $(a>0)$ الذي هو متقارب اذا كان $r<1$ و متباعد اذا كان $r\geq 1$

2) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ الذي هو متقارب اذا كان $\alpha>0$ و متباعد اذا كان $\alpha\leq 0$

3) $\int_a^b dt/(t-a)^r$ الذي هو متقارب اذا كان $r<1$ و متباعد اذا كان $r\geq 1$

4) $\int_a^b \ln(t-a)dt$ الذي هو متقارب.

نظرية(4.2.2): **معيار كوشي**

1) يكون التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ متقارب اذا و فقط اذا تحقق

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A, A > 0 : \forall x_1, x_2 > A \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| < \varepsilon$$

2) يكون التكامل $\int_a^{b} f(t)dt$ متقارب اذا و فقط اذا تحقق

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in [a,b[; \forall x_1, x_2 \in [x_0,b[\Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| < \varepsilon$$

البرهان: يكفي تطبيق وجود النهاية عندما x تنتهي إلى b

2-3- التكامل المتقارب مطلقا:

ندرس التكامل المعمم $\int_a^{b} f(t)dt$ بحيث يمكن ($a = -\infty, b = +\infty$) عندما لا يكون للتابع f اشارة ثابتة في مجال المكاملة

مثال(1.3.2): لاحظ التكامل $\int_a^{+\infty} k(t)\cos t dt$ حيث $k(t)$ تابع موجب، لا يمكن دراسة طبيعته مباشرة لان التابع $k(t)\cos t$ ليست لديه اشارة ثابتة في المجال $[a,+\infty[$.

تعريف(1.3.2): نقول عن التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ أنه متقاربا مطلقا اذا كان التكامل $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ متقاربا.

نظرية(1.3.2): اذا كان التكامل $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ متقارب فإن التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ متقارب.

البرهان: لدينا f تابعا معرفا و مستمرا على المجال $I = [a,+\infty[$, و قابل للمكاملة على كل متراص $[a, x_0] \subset I$ ، $x_0 > a$ ، و بما أن $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ متقارب حسب معيار كوشي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 / x_0 > a, \forall x_1, x_2 \in [x_0,+\infty[\rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \right| < \varepsilon$$ و بما أن

و منه التكامل $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| \le \left|\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt\right| \Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| < \varepsilon$ متقارب حسب $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ معيار كوشي.

نتيجة(1.3.2): اذا كان من اجل كل x ، من مجال المكاملة $|f(x)| \le g(x)$ و كان تكامل التابع الموجب g متقاربا فإن تكامل التابع f متقارب.

مثال(2.3.2): التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}dt$ موجود (متقارب) لان $\forall x \in [1,+\infty[, \frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$

لكن التكامل $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}dt$ غير موجود (متباعد) لأن $\frac{|\sin x|}{x^2}$ يكافئ $\frac{1}{x}$ على $]0,+\infty[$.

2-4- التكامل المتقارب شرطيا:

تعريف(1.4.2): نقول عن التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ أنه متقارب شرطيا اذا كان متقاربا دون أن يتقارب مطلقا.

نظرية(1.4.2): اذا وجد x_0 بحيث من أجل كل x ($x > x_0$) التابع k متناقص نحو الصفر $\lim_{x\to+\infty} k(x) = 0$ فإن التكامل $\int_a^{+\infty} k(t)\cos t dt$ متقارب (يمكن $a < x_0$).

البرهان: نستعمل معيار كوشي

مثال(1.4.2): التابع $x \to 1/x$ متناقص نحو الصفر عندما $x \to +\infty$ و بالتالي التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ موجود(متقارب) لكن غير متقارب مطلقا فهو متقارب شرطي.

2-5- التكامل المعمم باستعمال المكاملة بتحويل المتغير او المكاملة بالتجزئة:

2-5-1- تحويل المتغير:

نذكر بالنتيجة الواردة في مقياس التحليل1 على صيغة التالية

نتيجة(1.5.2): ليكن f تابع مستمر على المتراص $I = [a,b]$ و اليكن g تابع قابل للشقاق مع للاستمرار على $J = [\alpha, \beta]$ بحيث $g(J) \subset I$ ، بوضع $u = g(t)$

و اذا كان g اميومورفيزم قابل للاشتقاق مع $\int_{\alpha}^{\beta}(f\circ g)(t)g'(t)dt=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)}f(u)du$

الاستمرار (متزايد تماما) من J نحو I فان $\int_{a}^{b}f(u)du=\int_{\alpha}^{\beta}(f\circ g)(t)g'(t)dt$.

يمكن تطبيق هذه النتيجة على التكاملات المعممة، ليكن f تابع مستمر على المجال غير المتراص $I'=[a,b[$ (يمكن $b=+\infty$) و g اميومورفيزم قابل للاشتقاق مع الاستمرار (نفرض انه متزايد تماما) من $J'=[\alpha,\beta[$ نحو I' فانه من اجل كل متراص $[\alpha,t]\subset J'$ و $[a,x]\subset I'$ حيث $x=g(t)$ لدينا $\int_{\alpha}^{g^{-1}(x)}(f\circ g)(t)g'(t)dt=\int_{a}^{x}f(u)du$ ، كذلك لما $x\to b$ فان $g^{-1}(x)\to\beta$

ايضا اذا كان احد التكاملين متقاربا او متقاربا مطلقا فالأخر كذلك ونحو نفس القيمة و العكس صحيح

مثال(1.5.2): ادرس تقارب التكامل $\int_{0}^{1}\cos\frac{1}{x}dx$

الحل: نضع $x=1/t$ و بما ان $x\in]0,1]$ فإن $t\in[1,+\infty[$ و بالتالي

$\int_{0}^{1}\cos\frac{1}{x}dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}dt$ كذلك لدينا $\frac{|\cos t|}{t^2}\le\frac{1}{t^2}$ و بالتالي التكامل $\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}dt$

متقارب مطلقا ومنه التكامل $\int_{0}^{1}\cos\frac{1}{x}dx$ متقارب مطلقا فهو متقارب.

2-5-2- المكاملة بالتجزئة:

ليكن f,g تابعين من الصنف C^1 على المجال غير المتراص $I=[a,b[$ (يمكن $b=+\infty$)

نطبق قانون المكاملة بالتجزئة على كل $[a,x]\subset I$ أي

$$\int_{a}^{x}f'(t)g(t)dt=f(x)g(x)-f(a)g(a)-\int_{a}^{x}f(t)g'(t)dt$$

كل طرف من هذه المساواة يمثل تابع اذا كان لأحدهما نهاية عندما $x\to b$ يكون للأخر نفس النهاية و التكامل المعطى متقارب أما اذا لم تكن لأحدهما نهاية عندما $x\to b$ فالأخر كذلك ليست له نهاية و التكامل متباعد.

مثال(2.5.2): ادرس تقارب التكامل $\int_{1}^{+\infty}\frac{Actgx}{x^2}dx$

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{Actgx}{x^2}dx=-\frac{Actgx}{x}\Big|_{1}^{+\infty}+\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\left(1+x^2\right)}$$

باستعمال المكاملة بالتجزئة نحصل على

$$=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_{1}^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

2-6- التكامل المعمم المتعلق بوسيط

يعطى المجال $[a,b[$ (bمنتهي أو غير منتهي) و المجال $I(I\subset\Re)$ محدود أو غير محدود و الدالة $f:[a,b[\times I\to C$ المستمرة على $[a,b[\times I$، نفرض من أجل كل x ثابتة من I التطبيق $t\to f(t,x)$ يقبل تكامل معمم متقارب على المجال $[a,b[$ وهو $F(x)=\int_{a}^{b}f(t,x)dt$، التابع F له كل خواص التابع f.

2-6-1-الاستمرار:

نظرية(1.6.2): لتكن f دالة مستمرة على $[a,b[\times I$. نفرض وجود دالة موجبة g والتي لها تكامل معمم متقارب على $[a,b[$ بحيث $\forall t\in[a,b[,\forall x\in I;\left|f(t,x)\right|\le g(t)$ فإن الدالة F و المعرفة بـ: $F(x)=\int_{a}^{b}f(t,x)dt$ مستمرة على المجال I.

البرهان: بما أن التكامل المعمم للدالة g متقارب وحسب معيار كوشي

$\forall\varepsilon>0,\exists b'\in[a,b[$ بحيث $\forall y\in I$ لدينا $\int_{b'}^{b}\left|f(t,x)\right|dt\le\int_{b'}^{b}g(t)dt<\varepsilon$

لتكن $x_0\in I$، و ليكن $J\subset I$ متراص بحيث $x_0\in J$ من المتباينة السابقة نستنتج أنه

$$\forall x\in J,\left|F(x)-F(x_0)\right|\le\int_{a}^{b'}\left|f(t,x)-f(t,x_0)\right|dt+2\varepsilon$$

و بما أن الدالة f مستمرة على المتراص $[a,b']\times J$ و بالتالي

$$\exists\eta>0;\left|x-x_0\right|<\eta\Rightarrow\left|f(t,x)-f(t,x_0)\right|\le\varepsilon/(b'-a)$$

و منه نستنتج أنه $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0;\left|x-x_0\right|<\eta\Rightarrow\left|F(x)-F(x_0)\right|\le 3\varepsilon$

أي أن الدالة F مستمرة عند x_0.

نتيجة(1.6.2): أضافة الى شروط النظرية السابقة إذا كان I متراص و كانت f مستمرة على المتراص $[a,b]\times I$ فإن الدالة F مستمرة على المتراص I.

2-6-2- الاشتقاق تحت التكامل:

نظرية(2.6.2): لتكن f دالة مستمرة على الشريط $[a,b[\times I$ نفرض أنه

1) الدالة f تقبل مشتقة جزئية أولى بالنسبة للمتغير x مستمر على $[a,b[\times I$

2) توجد دالة $g:[a,b[\to\Re_+$ تكاملها المعمم على $[a,b[$ متقارب و

$$\forall t\in[a,b[,\forall x\in I;\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|\le g(t)$$

3) من أجل كل x من I الدالة $t\to f(t,x)$ تقبل تكامل معمم متقارب على $[a,b[$

فإن الدالة F قابلة للاشتقاق مع الاستمرار على I و مشتقها يعبر عنه بـ:

$$F'(x)=\int_a^b\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}dt$$

البرهان: لتكن x_0 نقطة من I و اليكن $J\subset I$ بحيث $J=[x_0-\alpha,x_0+\alpha],\alpha>0$

حسب نظرية التزايدات المنتهية من أجل كل $t\in[a,b[$ و $0<|h|<\alpha$ توجد

$\theta(t,h)\in[0,1]$ بحيث $\dfrac{f(t,x+h)-f(t,x)}{h}=\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x_0+\theta(t,h)h)$

من جهة أخرى $\forall\varepsilon>0,\exists b'\in]a,b[$ بحيث $\displaystyle\int_{b'}^{b}g(t)dt\le\varepsilon$ و منه نستنتج أن

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\right|\le 2\varepsilon+\int_a^{b'}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0+\theta(t,h)h)-\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\right|dt$$

و بما أن المشتق الجزئي للدالة f مستمرة على $[a,b[\times I$ فهو مستمر بانتظام على المتراص $[a,b']\times J$ و بالتالي يوجد $\eta>0$ بحيث $\forall(t,x)\in[a,b']\times J$

$$|h|<\eta\Rightarrow\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x+\theta(t,h)h)-\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|\le\frac{\varepsilon}{b'-a}$$

و منه $\displaystyle\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|\le 3\varepsilon$ أي أن الدالة F قابلة للاشتقاق ومشتقها يمكن الحصول علية بالاشتقاق داخل رمز المكاملة.

أمثلة: 1) دراسة الدالة $F(x)=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt\,(x\geq 1)$

لاحظ أن الدالة $f:(t,x)\to t^{x-1}e^{-t}$ معرفة و مستمرة على $[0,1]\times[1,+\infty[$

إذن الدالة F معرفة و مستمرة على $[1,+\infty[$.

2) دراسة الدالة $F(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1-2\cos t+x^2\right)dt$

الدالة $f:(t,x)\to\ln\left(1-2x\cos t+x^2\right)$ معرفة و مستمرة على $[-\pi,\pi]\times]-1,1[$

إذن الدالة F مستمرة على $]-1,1[$، كذلك الجزئية للدالة f على $]-\pi,\pi[\times]-1,1[$

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(1-2x\cos t+x^2\right)=2\frac{x-\cos t}{1-2x\cos t+x^2}$$

ومنه الدالة F قابلة للاشتقاق و $F'(x)=2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x-\cos t}{1-2x\cos t+x^2}dt$

2-6-3- دوال اولر الا كثر استعمالا:

1) الدالة قامة و المعرفة كما يلي: $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$

لها الخواص التالية:

- $\Gamma'(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\log t\,dt$
- $\forall x>0,\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$
- $\forall n>0,\Gamma(n+1)=n!$

2) الدالة بيتا و المعرفة بـ: $\beta(x,y)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

لها الخواص التالية:

- $\beta(x,y)=\beta(y,x)$
- $\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$
- $\beta(1/2,1/2)=\pi\Rightarrow\Gamma(1/2)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$.

7-2- سلسلة تمارين للفصل الثاني

التمرين الأول:

باستعمال التعريف احسب التكاملات المعممة التالية:

$$\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}\ ،\quad \int_{0}^{1}\frac{\ln x\,dx}{(1+x)^2}\ ،\quad \int_{-1}^{0}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2-2x+2\right)^{3/2}}\ ،\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^7dx}{x^{16}+1}\ ،\quad \int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$$

التمرين الثاني:

ادرس طبيعة التكاملات الموسعة التالية:

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sin x}dx\ ،\ \int_{0}^{1}\frac{1-2x}{x(1-x)}dx\ ،\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x+1}{x^2+1}dx$$

ثم احسب $\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}$ و $\lim_{a\to 0}\int_{a}^{1-a}$ للتكاملين 1،2

التمرين الثالث:

ما هي طبيعة التكاملات التالية:

$$\int_{1}^{+\infty}\left(e^{-1/x}-\cos\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}\ ،\quad \int_{1}^{+\infty}\frac{e^{\sin x}}{x}dx$$

$$\int_{0}^{1}\frac{chx-\cos x dx}{shx}\ ،\quad \int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{shx}\ ،$$

التمرين الرابع:

بين ان التكاملات التالية متقاربة و أنها تساوي الصفر:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx\ ،\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\ln\left(1+x^2\right)}{x^4+1}dx\ ،\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+1}dx$$

التمرين الخامس:

1) بين أن $\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ متقارب (يمكن استعمال المكاملة بالتجزئة والتكامل المتقارب مطلقا)

2) بين أن $\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}dx$ متقارب

3) نضع $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$, $g(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+\frac{\cos^2 x}{x}$

4) بين أن g تكافئ f لكن التكاملين $\int_{1}^{+\infty}f(x)dx$ و $\int_{1}^{+\infty}g(x)dx$ ليس لهما نفس الطبيعة.

الفصل الثالث
السلاسل

السلاسل قسم من الاقسام المهمة في التحليل الرياضي وهو وظيفي في كثير من الجوانب سوى في الرياضيات البحة أم كخطوات عملية تطبق في كثير من الاختصاصات التقنية من هندسة أو إحصاء، بيولوجيا، فيزياء. فتقارب السلسلة معناه أن المسألة المدروسة سوي عن طريق الاضطراب او العينات أن لديها حظ وافر من صدقية الحل. حقيقتا لم يعد من السهل تدريس كثيرا من فروع الرياضيات فقط دون الرجوع الى هذا الجانب المهم من الرياضيات ألا وهو السلاسل وخاصة منها السلاسل الصحيحة أو فوري، لمزيدا من التفصيل يمكن الرجوع إلى المراجع المستعملة في هذا الفصل وهي على التوالي: $[9-10]$ ، $[13-14]$، $[16-17]$

3-1- السلاسل العددية

3-1-1- مفاهيم عامة

تعريف(3.1.1.1.): لتكن $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية عددية في مجموعة الاعداد K حيث K هي مجموعة الاعداد الحقيقية IR او مجموعة الاعداد المركبة C ، نسمي سلسلة عددية ذات الحد العام U_n متتالية المجاميع $(S_n)_{n\geq 1}$ ذات الحدود المتعاقبة المعطاة كالتالي:

$$S_1 = U_1$$
$$S_2 = U_1 + U_2$$
$$S_3 = U_1 + U_2 + U_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = U_1 + U_2 + \dots\dots U_n$$

اذا كانت للمتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ نهاية عندما $n \to +\infty$ نقول عن السلسلة ذات الحد العام U_n انها متقاربة نحو العدد الحقيقي S و نكتب ..... $S = U_1 + U_2 + \dots\dots U_n + \dots\dots$ او $S = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

و اذا كانت المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ لا تقبل نهاية محدودة او ليست لها نهاية عندما $n \to +\infty$ نقول عن السلسلة ذات الحد العام U_n انها ليست متقاربة او متباعدة.

ملاحظة(3.1.1): يمكن كتابة السلسلة ذات الحد العام U_n كما يلي:

$S = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n = \sum_{n=1}^{k} U_n + \sum_{n=k+1}^{+\infty} U_n, k \geq n$ او $S = S_n + R_n$ و يسمى R_n الباقي

مثال(3.1.1.1): ادرس تقارب السلاسل العددية التالية

1) لتكن $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ بوضع $U_n=\frac{1}{n(n+1)}$ فإنه يمكن كتابته على الشكل

$U_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ و اليكن المجموع الجزئي S_n من الرتبة n حيث

$$S_n=U_1+U_2+\dots U_n$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

لاحظ ان $\lim_{n\to+\infty}S_n=1$ أي تقبل نهاية محدودة وبالتالي السلسلة متقاربة.

2) نعتبر السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ و اليكن المجموع الجزئي S_n من الرتبة n حيث

$$S_n=\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\dots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\ln(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\dots\dots\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)$$

وبالتالي $\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$ ومنه السلسلة متباعدة.

3) لتكن السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ لاحظ ان المجموع الجزئي S_n من الرتبة n هو $S_n=1$ عندما يكون n زوجي $(n=2k,k\in IN)$ و $S_n=0$ عندما يكون n فردي وبالتالي S_n لانهاية له عندما $n\to+\infty$ و منه السلسلة متباعد.

الشرط اللازم لتقارب سلسلة:

مبرهنة(1.1.3): اذا كانت $\sum_{n=1}^{+\infty}U_n$ متقاربة فإن حدها العام ينتهي الى الصفر عندما $n\to+\infty$

البرهان: ليكن S_n ، S_{n-1} المجموعين الجزئيين من الرتبة n ، $n-1$ على الترتيب نلاحظ أن $S_n-S_{n-1}=U_n$ و بما أن السلسلة المعطاة متقاربة و بالتالي $\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}S_{n-1}=S$ ومنه نستنتج أن

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}S_n-\lim_{n\to+\infty}S_{n-1}=S-S=0$$ و-هـ-م.

مثال(2.1.3): انظر1) حل مثال(1.1.3) بما أن $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$ فالسلسلة متقاربة و بالتالي

حسب المبرهنة(1.1.3) فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$

ملاحظة(1.1.1.3): اذا كانت $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ لا يستلزم تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

مثال(2.1.1.3): انظر حل مثال(1.1.1.3) السلسلة ذات الحد العام $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ واضح أن

$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ لكن السلسلة متباعدة.

نتيجة(1.1.3): لدينا الاستلزام العكس النقيض($\lim_{n\to+\infty} U_n \neq 0 \leftarrow \sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ متباعدة).

مثال(3.1.3): نعتبر السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n+1}$ لاحظ أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \neq 0$ و بالتالي السلسلة المعطاة متباعدة.

خواص: لتكن السلسلتين $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ ، $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$

1) نعرف السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{+\infty} (U_n + V_n)$ بانها مجموع السلسلتين $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ ، $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$

2) كذلك $\forall \lambda \in IK$ السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda U_n)$ تعرف بأنها السلسلة ذات الحدود ناتجة عن جداء حدود السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ بالعدد λ

نظرية(1.1.3): اذا كانتا السلسلتين $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ ، $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ متقاربتين نحو العددين S_1 ، S_2 على الترتيب فإن السلسلتين $\sum_{n=1}^{+\infty} (U_n + V_n)$ ، $\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda U_n)$ تتقاربان على الترتيب نحو العددين $S_1 + S_2$ ، λS_1.

2-1-3 - السلاسل ذات الحدود الموجبة

السلاسل الاساسية

1) السلسلة الهندسية:

تعريف(1.2.1.3): نسمي سلسلة هندسية السلسلة ذات الحد العام $U_n = aq^n$ حيث $q, a \in IR$ و $n \in \mathbb{N}$.

ملاحظة(1.1.2.3): اذا كان $a = 0$ فإن حدود السلسلة معدومة كذلك إذا كان $q = 0$ عدا الحد الاول عندما $U_0 = a \neq 0$ فيما يلي من الفصل نعتبر $a, q \neq 0$

دراسة التقارب: نعلم بأنه إذا كان $|q| \geq 1 \Leftarrow \lim_{n \to +\infty} U_n \neq 0$ و بالتالي $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ متباعدة و إذا كان $|q| < 1$ لدينا المجموع الجزئي S_n من الرتبة n حيث

$S_n = a + aq + ...aq^n = a\dfrac{1-q^n}{1-q}$ و بما أن أي أن السلسلة متقاربة.

مثال(1.1.2.3): السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}$ سلسلة هندسية اساسها $q = 1/2 < 1$ فهي متقاربة كذلك السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(-3)^n}$ سلسلة هندسية واساسها يحقق $|q| = 1/3 < 1$ فهي متقاربة.

2) سلسلة ريمان

تعريف(2.2.1.3): نسمي سلسلة ريمان السلسلة من الشكل $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ حيث $\alpha \in IR$.

مبرهنة: تكون سلسلة ريمان $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha > 1$

البرهان: إذا كان $\alpha \leq 0 \Leftarrow \lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} \neq 0$ و بالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ متباعدة

أما إذا كان $\alpha > 0$ يمكن كتابة السلسلة بالشكل التالي

$$1 + \left[\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right] + \left[\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right] + \left[\frac{1}{8^\alpha} + ... + \frac{1}{15^\alpha}\right] + ...$$
$$\leq 1 + \left[\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right] + \left[\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right] + \left[\frac{1}{8^\alpha} + ... + \frac{1}{8^\alpha}\right] + ...$$
$$\leq 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}} + \frac{1}{2^{3(\alpha-1)}} + ...$$

لاحظ أن السلسلة الحادة من الاعلى تمثل سلسلة هندسية اساسها $1/2^{\alpha-1}$ و التي تكون متقاربة اذا و فقط اذا كان $1/2^{\alpha-1} < 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 0$ أي $\alpha > 1$ و هـ م.

ملاحظة(2.2.1.3): في حالة $\alpha = 1$ تسمى سلسلة ريمان $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ بالسلسلة التوافقية وهي متباعدة.

مقاييس التقارب للسلاسل ذات الحدود الموجبة:

نعتبر السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{+\infty}U_n$ ذات الحدود الموجب واليكن S_n ، S_{n-1} المجموعين الجزئيين من الرتبة n ، $n-1$ على الترتيب وبالتالي $S_n - S_{n-1} = U_n > 0$ ومنه لكي تكون المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ متقاربة يجب أن تكون محدودة من الأعلى وهو شرط تقارب السلسلة المعطاة

نظرية(1.2.1.3): نعتبر السلسلتين $\sum_{n=1}^{+\infty}U_n$ ، $\sum_{n=1}^{+\infty}V_n$ كل منهما ذات حدود موجبة بحيث

$$\forall n \in IN^*, U_n \leq V_n$$

1) إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}V_n$ متقاربة تكون $\sum_{n=1}^{+\infty}U_n$ متقاربة

2) و إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}U_n$ متباعدة تكون $\sum_{n=1}^{+\infty}V_n$ متباعدة.

مثال(2.2.1.3): ادرس طبيعة كل من السلسلتين العدديتين

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3+\cos^2 n}{2^{2n+2}} \quad ، \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2-\sin n}{n}$$

الحل: بما أن $3+\cos^2 n \leq 4$ ، $\forall n \in IN \Leftarrow \frac{3+\cos^2 n}{2^{2n+2}} \leq \frac{1}{2^{2n}}$ و بما أن $1/4^n$ يمثل حد عام في سلسلة هندسية اساسها $1/4$ فهي متقاربة و بالتالي حسب النظرية (1.2.1.3) و منه السلسلة 1) متقاربة.

كذلك واضح أن $\frac{1}{n} \geq \frac{2-\sin n}{n}$ و نعلم أن $\frac{1}{n}$ يمثل حد عام لسلسلة توافقيه فهي متباعدة و بالتالي حسب النظرية (1.2.3) و منه السلسلة 2) متباعدة.

النظرية (2.2.1.3): ليكن $\sum_{n=1}^{+\infty}U_n$ ، $\sum_{n=1}^{+\infty}V_n$ سلسلتين لحدود موجبة لدينا

1) إذا وجد عددان حقيقيان موجبان a, b بحيث $a \leq \frac{U_n}{V_n} \leq b$ فإن السلسلتين

$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ ، $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ من نفس الطبيعة

2) إذا كان U_n , V_n متكافئان فالسلسلتان من نفس الطبيعة.

مثال(3.2.1.3): السلسلتان $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{(n+1)(n+2)}$ ، $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{2(n+1)(n+2)}$ من نفس الطبيعة (متباعدتان) لان $\frac{1}{4} \leq \frac{U_n}{V_n} \leq 1$ حيث U_n و V_n يمثلان الحدين العامين للسلسلتين على الترتيب. كذلك $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ من نفس الطبيعة (متقاربتان) لأنهما متكافئتان أي $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+1/n^2)}{1/n^2} = 1$.

ملاحظة(2.2.1.3): اذا كان $\forall n \in IN^*; \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n}$ يمكن مقارنة السلسلتين $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ ، $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ حسب النظرية(1.2.3).

مقياس النسبة(مقياس دالنبر): لتكن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ ذات الحدود الموجبة و التكن النسبة $\forall n \in IN^*; \frac{U_{n+1}}{U_n} = k, k \in IR_+$ و كان

1) $k<1$ تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ متقاربة، 2) $k>1$ تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ متباعدة،

3) أما إن كان $k=1$ السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ لا متقاربة و لا متباعدة.

كذلك اذا كانت النسبة تتعلق بالعدد n نحسب $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l; l \in IR_+$ و بالتالي:

1) اذا كان $l<1$ تكون السلسلة متقاربة، 2) و اذا كان $l>1$ تكون السلسلة متباعدة، 3) اما ان كان $l=1$ السلسلة لا متقاربة ولا متباعدة.

مثال(4.2.1.3): ادرس طبيعة السلسلة التالية: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3\times5\times....\times(2n+1)}$

الحل: لاحظ ان النسبة تتعلق بالعدد n أي

$$\forall n\in IN^*;\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{(n+1)!}{3\times5\times\ldots\times(2n+1)\times(2n+3)}\times$$

$$\frac{3\times5\times\ldots\times(2n+1)}{n!}=\frac{n+1}{2n+3}$$ و بالتالي

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n+3}=\frac{1}{2}$$ ومنه السلسلة متقاربة.

مقياس كوشي:

نعتبر السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{+\infty}U_n$ ذات الحدود الموجبة و اليكن الجذر النوني $\sqrt[n]{U_n}$ اذا وجد عدد حقيقي موجب k بحيث $\sqrt[n]{U_n}=k$ و كان

1) $k<1$ تكون السلسلة متقاربة، 2) و اذا كان $k>1$ تكون السلسلة متباعدة،

3) أما إن كان $k=1$ السلسلة لا متقاربة و لا متباعدة

كذلك لما $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n}=l$، 1) و كان $l<1$ تكون السلسلة متقاربة، 2) و اذا كان $l>1$ تكون السلسلة متباعدة، 3) أما إن كان $l=1$ السلسلة لا متقاربة و لا متباعدة.

مثال(5.2.1.3): ناقش حسب قيم العدد الحقيقي a تقارب السلسلة ذات الحد العام

$U_n=\left(1+\frac{a}{n}\right)^{-n^2}$ واضح أن

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(1+a/n)^{-n^2}}=\lim_{n\to+\infty}(1+a/n)^{-n}=e^{-a}$$

اذا كان $a>0\Leftrightarrow -a<0\Leftrightarrow e^{-a}<1$ تكون السلسلة متقاربة و اذا كان $a<0\Leftrightarrow e^{-a}>1$ فالسلسلة متباعدة، أما ان كان اذا كان $a=0\Leftrightarrow e^{-a}=1$ السلسلة لا متقاربة ولا متباعدة

نعوض $a=0$ في عبارة الحد العام نجد $U_n=(1)^{-n^2}=1$ و $\lim_{n\to+\infty}U_n=1\neq0$ أي أن السلسلة متباعدة.

خاصية(1.2.1.3): (سلسلة برتر) تكون السلسلة العددية $n\geq2,T_n=\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ و تكون

1) متقاربة عندما $\forall\beta,\alpha>1$، 2) متباعدة عندما $\forall\beta,\alpha<1$

2) اذا كان $\beta>1,\alpha=1$ متقاربة و متباعدة اذا كان $\beta\leq1,\alpha=1$

نظرية(3.2.3): اذا كانت f دالة مستمرة ومتناقصة نحو الصفر على IR_+ تكون السلسلة $\sum_{n\geq1} f(n)$ و التكامل $\int_0^n f(t)dt$ من نفس الطبيعة.

3-1-3- السلاسل ذات الحدود الكيفية:

التقارب المطلق:

تعريف(1.3.1.3): نرفق بالسلسلة الكيفية $\sum_{n\geq0} U_n$ السلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum_{n\geq0} |U_n|$ عندما تكون هذه السلسلة متقاربة نقول عن السلسلة $\sum_{n\geq0} U_n$ انها متقاربة مطلقا

نظرية(1.3.3): كل سلسلة متقاربة مطلقا فهي متقاربة

مثال(1.3.1.3): ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n\geq1} \frac{e^{inx}}{n^2}, x\in IR$

لاحظ ان $\left|\frac{e^{inx}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ و الذي يمثل حد عام في سلسلة ريمان و $\alpha = 2$ فهي متقاربة و بالتالي $\sum_{n\geq1} \frac{e^{inx}}{n^2}$ متقاربة مطلقا وحسب النظرية فهي متقاربة.

ملاحظة(1.3.1.3): عكس النظرية السابقة غير صحيح

مثال(2.3.1.3): السلسلة $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة وليست متقاربة مطلقا.

ملاحظة(2.3.1.3): كل النظريات و مقاييس للتقارب المنصوص عليها في السلاسل ذات الحدود الموجبة تطبق على السلاسل المتقاربة مطلقا.

ملاحظة(3.3.1.3): اذا كانت السلسلة الكيفية ليست متقاربة مطلقا لتحديد طبيعتها نستخدم مقياس ابيل

نظرية(2.3.3): (مقياس ابل)

اذا كانت السلسلة الكيفية $\sum_{n\geq0} U_n$ ليست متقاربة مطلقا وكانت حدودها من الشكل $\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + ... + \alpha_n\beta_n + ...$ تكون السلسلة متقاربة اذا تحقق ما يلي:

1) (α_n) متتالية اعداد حقيقية موجبة و متناقصة نحو الصفر (اي $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\downarrow} 0$)

2) $\forall n,m \in \mathrm{N}, n>m; \exists k>0 : \left|\sum_{p=m}^{n} \beta_p\right| \leq k$

مثال(3.3.3): ادرس طبيعة(تقارب) السلسلة $\sum_{n\geq1}\frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}$ حيث $\theta\in IR,\alpha>0$

الحل: 1) اذا كان $\alpha>1$ السلسلة $\sum_{n\geq1}\frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}$ متقاربة مطلقا فهي متقاربة

2) واضح انه اذا كان $\alpha\leq1$ السلسلة $\sum_{n\geq1}\frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}$ ليست متقاربة مطلقا

ا) اذا كان $\theta\neq2k\pi,k\in Z$ لدراسة تقارب السلسلة $\sum_{n\geq1}\frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}$ نستخدم نظرية ابل

بوضع $\frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}=\lambda_n.\beta_n$ حيث $\lambda_n=\frac{1}{n^{\alpha}}$ ، $\beta_n=e^{in\theta}$

لاحظ اولا أن $\frac{1}{n^{\alpha}}=\lambda_n>\lambda_{n+1}=\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ اي (λ_n) متناقصة و $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n=0$

و الشرط للمتتالية الثانية $\left|\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}\right|=\left|\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right|$ لان $\theta\neq2k\pi,k\in Z$

$$=\left|\frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}}\right|\frac{\left|e^{i(n+1)\theta/2}-e^{-i(n+1)\theta/2}\right|}{\left|e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}\right|}$$

$$=\left|\frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}}\right|\frac{\left|2\sin(n+1)\theta/2\right|}{\left|2\sin\theta/2\right|}\leq\frac{1}{\left|\sin\theta/2\right|}=c$$ ، c ثابت

ومنه حسب نظرية ابل و في حالة $\alpha\leq1$ السلسلة $\sum_{n\geq1}\frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}$ متقاربة

ب) اما اذا كان $\alpha\leq1$ و $\theta=2k\pi,k\in Z$ فالسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=\sum_{n\geq1}\frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}$ متباعدة.

خاصية(1.3.1.3): من أجل أي تبديل (تجميع) لعناصر السلسلة المتقاربة مطلقا تبقى متقاربة مطلقا و بصورة خاصة السلسلة ذات الحدود الموجبة، و بالتالي مجموع السلسلة المتقاربة مطلقا هو مجموع تبديلي و تجمعي.

مثال مضاد(1.3.1.3): $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....+\frac{(-1)^{n+1}}{n}....=\ln2$

لكن $\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}....$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+....\right)=\frac{\ln 2}{2}$$

اي المجموع غير تجميعي.

نظرية(3.3.1.3): حاصل جمع، باقي طرح او حاصل ضرب سلسلتين متقاربتين سلسلة متقاربة.

جداء سلسلتين متقاربتين مطلقا:

تعريف(2.3.1.3): لتكن السلسلتين $\sum_{n\geq 0} x_n$ ، $\sum_{n\geq 0} y_n$ و المتقاربتين مطلقا في C من خلالهما نعرف السلسلة $\sum_{n\geq 0} z_n$ كما يلي: $z_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + ...x_{n-1} y_1 + x_n y_0$ وهو حد عام للسلسلة المتقاربة مطلقا

مثال(2.3.1.3): لتكن في C السلسلة $F(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...\frac{x^n}{n!}+...$

1) بين أن $F(x)$ سلسلة متقاربة مطلقا

2) أثبت أنه $\forall(x,y)\in C^2; F(x+y)=F(x)F(y)$ وهي سلسلة متقاربة مطلقا.

الحل: 1) حسب مقياس دالنبير $\lim_{n\to+\infty}\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{|x|^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{n+1}=0$

ومنه السلسلة $F(x)$ متقاربة مطلقا

2) جداء السلسلتين $F(x)$ ، $F(y)$ يعرف سلسلة الجداء

$$1\times\frac{y^n}{n!}+x\times\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}+....+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\times y+\frac{x^n}{n!}\times 1=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\times\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!x^k}{k!}\times\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k}$$

$$=\frac{(x+y)^n}{n!}=f_n(x+y)$$

و هو حد عام في سلسلة متقاربة مطلقا حسب مقياس دالنبر.

3-1-4- السلاسل المتناوبة:

تعريف(1.4.1.3) : تكون السلسلة $\sum_{n\geq 0} x_n$ للأعداد الحقيقية متناوبة اذا كان

$$\forall n\in \mathbb{N}; x_n=(-1)^{n+1}|x_n| \quad \text{او} \quad \forall n\in \mathbb{N}; x_n=(-1)^n|x_n|$$

مثال(1.4.1.3): السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ لاحظ أنه بوضع $x_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ فإن $|x_n|=\frac{1}{\sqrt{n}}$ ومنه $x_n=(-1)^n|x_n|$ و بالتالي السلسلة المعطاة متناوبة.

نظرية لبنز(1.4.1.3): لتكن $\sum_{n\geq 0}U_n$ سلسلة متناوبة وليست متقاربة مطلقا و تحقق $\lim_{n\to+\infty}|U_n|=0$ ، $\forall n\in\mathrm{N},|U_{n+1}|\leq|U_n|$ فإن السلسلة متقاربة.

مثال(2.4.1.3): واضح من المثال(1.4.1.3) أن $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ سلسلة متناوبة ليست متقاربة مطلقا وحدودها تحقق $\forall n\in\mathrm{N}^*,\frac{1}{\sqrt{n+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}$ ، $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ فهي متقاربة حسب لبنز

نتيجة(1.4.1.3): اذا كانت $\sum_{n\geq 0}U_n$ سلسلة متناوبة وتحقق شرطي نظرية لبنز وكان S هو القيمة المقربة لمجموعها و S_n مجموعها الجزئي من الرتبة n فإن $|S-S_n|\leq|U_{n+1}|$

ملاحظة(1.4.1.3): شرط التناقص للسلسلة $\sum_{n\geq 0}|U_n|$ ليس لازما، قد تكون السلسلة المتناوبة متقاربة و السلسلة $\sum_{n\geq 0}|U_n|$ ليست متناقصة مثل السلسلة $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$

3-1-5- السلسلة نصف متقاربة:

تعريف(1.5.1.3): تكون السلسلة الكيفية $\sum_{n\geq 0}U_n$ نصف متقاربة اذا كانت متقاربة وليست متقاربة مطلقا

نتيجة(1.5.1.3): مما سبق نستنتج ان السلاسل المتقاربة حسب ابيل او لبنز هي سلاسل نصف متقاربة.

مثال(1.5.1.3): واضح من المثال(1.4.1.3) أن $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ سلسلة متناوبة ليست متقاربة مطلقا وهي متقاربة حسب لبنز كما هو في المثال(2.4.1.3) و بالتالي فهي نصف متقاربة.

2.3- متتاليات الدوال- سلاسل الدوال

1.2.3- متتاليات الدوال:

لتكن $H(I,IR)$ مجموعة الدوال المعرفة على() $I(I\subset IR)$ و تأخذ قيمها في IR

تعريف(1.1.2.3): متتالية الدوال هي التطبيق من $\mathbb{N}$ في المجموعة $H(I,IR)$ الذي يرفق بكل n عدد طبيعي الدالة h_n و نرمز اليها $(h_n)_{n\geq 0}$.

مثال(1.1.2.3): لتكن متتالية الدوال $(g_n)_{n\geq 1}$ المعرفة كالتالي

$$g_n:[0,\pi]\rightarrow IR$$
$$x\rightarrow \sin nx/n$$

و حدودها $g_1(x)=\sin x$ ، $g_2(x)=\sin 2x/2$ ،...، $g_n(x)=\sin nx/n$.

ملاحظة(1.1.2.3): ينبغي ان نميز بين التقارب من أن كل نقطة x من I لمتتالية الدوال العددية ذات الحد العام $h_n(x)$ و التقارب على المجال I لمتتالية الدوال (h_n).

تقارب متتاليات الدوال

<u>التقارب البسيط:</u>

لتكن (h_n) متتالية الدوال من المجموعة $H(I,IR)$

تعريف(2.1.2.3): نقول عن متتالية الدوال (h_n) انها تتقارب ببساطة نحو الدالة h من $H(I,IR)$ اذا كان من اجل كل x من I المتتالية العددية $(h_n(x))$ تتقارب نحو $h(x)$ اي انه $\forall x\in I,\lim_{n\to+\infty}h_n(x)=h(x)$ او بعبارة اخرى

$$\lim_{n\to+\infty}h_n(x)=h(x)\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\forall x\in I;\exists N(x,\varepsilon),$$
$$n>N(x,\varepsilon)\rightarrow |h_n(x)-h(x)|<\varepsilon$$

مثال(2.1.2.3): نعتبر متتالية الدوال $(f_n)_{\geq 1}$ المعرفة بعبارة حدها العام كما يلي

$$\forall x\in IR_+,\ f_n(x)=e^{-nx}$$

الحل: لدينا $f_n(0)=1$ و بالتالي $\lim_{n\to+\infty}f_n(0)=1$

كذلك $\forall x\in IR_+,\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}e^{-nx}=0$ و منه نستنتج أن متتالة الدوال $(f_n)_{\geq 1}$ تتقارب ببساطة نحو الدالة f و المعرفة كما يلي $f(x)=\begin{cases}1,si;x\neq 0\\ 0،si\ ,x\succ 0\end{cases}$

<u>التقارب المنتظم:</u>

تعريف(2.1.2.3): نقول عن متتالية الدوال (h_n) انها تتقارب بانتظام نحو الدالة h من $H(I,IR)$ على المجال I اذا كان الحد الاعلى لـ $|h_n(x)-h(x)|$ ينتهي الى الصفر عندما

$n \to +\infty$ من اجل كل x من I أي، $\forall x \in I, \lim\limits_{n\to+\infty} \sup|h_n(x) - h(x)| = 0$

مثال(3.1.2.3):لتكن متتالية الدوال (f_n) ذات الحد العام $f_n(x) = \sin nx/n$ ، $n \geq 1$
تتقارب ببساطة نحو الدالة المعدومة و بالتالي

$\forall x \in [0, \pi], \sup|f_n(x) - f(x)| = \sup|\sin nx/n| = 1/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ و منه نستنتج أن

متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام نحو الدالة المعدومة على $[0, \pi]$.

مثال(4.1.2.3): نعتبر متتالية الدوال $(g_n)_{n\geq 0}$ بحيث $\forall x \in [0,1], g_n(x) = x(1-x)^n$

ادرس التقاربات لمتتالية الدوال $(g_n)_{n\geq 0}$ على المجال $[0,1]$

الحل: واضح أن $g_n(0) = g_n(1) = 0$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(1) = 0$

و إذا كان $x \in]0,1[\Leftrightarrow 0 < x < 1, \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x(1-x)^n = 0$

ومنه متتالية الدوال $(g_n)_{n\geq 0}$ تتقارب ببساطة نحو الدالة المعدومة

التقارب المنتظم: لدراسته نستعمل المشتقة لتحديد القيمة العظمى للدالة g_n أي

$\forall x \in]0,1[, g_n'(x) = (1-x)^{n-1}[1 - x(1+n)]$ ومنه $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/n+1$

وبالتالي

$$\forall x \in [0,1], \lim_{n\to+\infty} \sup|g_n(x) - g(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup|g_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} |g(1/n)|$$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = 0 \times e = 0$ ومنه $(g_n)_{n\geq 0}$ متقاربة بانتظام على $[0,1]$.

ملاحظة(2.1.2.3): التعاريف السابقة تدل على أن التقارب المنتظم لمتتالية الدوال يستلزم التقارب البسيط و ذلك لان $\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \sup|f_n(x) - f(x)|$

عكس هذه الملاحظة غير صحيح

مثال(5.1.2.3): متتالية الدوال $(k_n)_{n\geq 0}$ حيث $\forall x \in [0,1], k_n(x) = x^n$ تتقارب ببساطة نحو الدالة $k(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ لما لكن $\forall x[0,1], \lim\limits_{n\to+\infty} \sup|k_n(x)| = 1$ و بالتالي

$(k_n)_{n\geq 0}$ ليست متقاربة بانتظام على $[0,1]$.

متتالية الدوال و الاستمرار:

نظرية(1.1.2.3): النهاية المنتهية لمتتالية الدوال المستمرة و المتقاربة بانتظام على المجال $[a,b]$ مستمرة على $[a,b]$

البرهان: لتكن متتالية الدوال (f_n) نفرض انها مستمرة على $[a,b]$، لنبين أنها اذا كانت متقاربة بانتظام نحو الدالة f ، فان f مستمرة على $[a,b]$

ليكن
$$(x,x_0)\in[a,b]^2, \left|f(x)-f(x_0)\right| \le \left|f(x)-f_n(x)\right| + \left|f_n(x)-f_n(x_0)\right| + \left|f_n(x_0)-f(x_0)\right|$$

من التقارب المطلق للمتتالية (f_n) نستنتج انه،

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \Rightarrow \begin{cases} \left|f(x)-f_n(x)\right| < \varepsilon/3 ....(1) \\ \left|f_n(x_0)-f(x_0)\right| < \varepsilon/3 ....(2) \end{cases}$ ، و بما أن f_n مستمرة عند x_0

يمكن ان نجد $\alpha(\varepsilon, x_0)$ بحيث $\left|x-x_0\right| < \alpha \to \left|f_n(x)-f_n(x_0)\right| < \varepsilon/3 ....(3)$

من(1)، (2) و (3) نجد $\left|f(x)-f(x_0)\right| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \left|x-x_0\right| < \alpha \to$ اي f مستمرة على $[a,b]$.

مثال(6.1.2.3): من المثال(4.1.2.3) متتالية الدوال (g_n) مستمرة و متقاربة بانتظام على $[0,1]$ حسب النظرية السابقة نستنتج أن g مستمرة على $[0,1]$.

ملاحظة(3.1.2.3):اذا كانت متتالية الدوال المستمرة تتقارب نحو دالة ليست مستمرة فإنها ليست متقاربة بانتظام

مثال(7.1.2.3): انظر المثال(5.1.2.3).

مكاملة متتالية الدوال:

نظرية(2.1.2.3): اذا كانت متتالة الدوال المستمرة (f_n) تتقارب بانتظام على المجال $[a,b]$ نحو الدالة f فإن
$$\left|\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx\right|$$

او نكتب
$$\left|\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

البرهان: لتكن f نهاية منتظمة لمتتالية الدوال المستمرة فهي مستمرة حسب النظرية(1.1.2.3) و بالتالي قابلة للمكاملة ، اضافة لذلك يوجد $N(\varepsilon)$ لا يتعلق بالمتغير x بحيث

لدينا $\forall x \in [a,b], n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left|f_n(x)-f(x)\right| < \varepsilon$

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))dx\right| \le \int_a^b \left|f_n(x)-f(x)\right|dx$$

$$< \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a)$$ و منه نستنتج $$\int_a^b f_n(x)dx \Rightarrow \int_a^a f(x)dx$$

مثال(8.1.2.3): نعتبر متتالية الدوال المستمرة (h_n) بحيث

$\forall x\in[0,1], h_n(x)=nx^n(1-x)$ - بين ان (h_n) تتقارب ببساطة،

هل (h_n) تتقارب بانتظام على $[0,1]$ ؟ - ان كانت كذلك احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(x)dx$

الحل: 1) لدينا $h_n(0)=h_n(1)=0$ كذلك

$\forall x\in\left]0,1\right[, nx^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow h_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ و منه (h_n) تتقارب ببسطة نحو الدالة المعدومة h

3) لاحظ أنه $\forall x\in\left]0,1\right], h'(x)=n^2x^{n-1}(1-x)-nx^n$ و بالتالي

و منه $h'(x)=0\Rightarrow x=n/n-1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|h_n(x)-0|=\lim\limits_{n\to+\infty}h_n(n/n-1)=e^{-1}\neq 0$ اي ان (h_n) ليست متقاربة بانتظام على $[0,1]$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(x)dx\neq\int_0^1 h(x)dx=0$

الاشتقاق و متتالية الدوال:

نظرية(3.1.2.3): نعتبر (f_n) متتالية الدوال المستمرة و القابلة للاشتقاق مع الاستمرار على المجال $[a,b]$ و كان، 1) (f_n) تتقارب ببساطة نحو الدالة f

2) متتالية الدوال المشتقة (f'_n) تتقارب بانتظام نحو الدالة g على $\left]a,b\right[$

فان (f_n) تتقارب بانتظام نحو الدالة f القابلة للاشتقاق على $\left]a,b\right[$ و

$\forall x\in\left]a,b\right[, f'(x)=g(x)$ او بعبارة اخرى $\left|\lim\limits_{n\to+\infty}f'_n(x)\right|=\left|\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\right|'$

مثال(10.1.2.3): لتكن متتالية الدوال (f_n) بحيث $f_n:\underset{x\to\sqrt{x^2+1/n}}{[-1,1]\to IR}$

واضح أن $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=|x|$ لكن $\forall x\in\left]-1,1\right[, f'_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1/n}}$

(f'_n) تتقارب على $\left]-1,1\right[$ نحو الدالة g حيث $g(x)=x/|x|$ غير معرفة عند الصفر فهي تختلف مشتق الدالة f اي $g(x)\neq f'(x)$ و بالتالي (f_n) ليست متقاربة بانتظام.

3-2-2 - سلاسل الدوال

لتكن متتالية الدوال ذات الحد العام $f_n :]a,b[\to IR$ يمكن $(a=-\infty, b=+\infty)$

و التكن السلسلة

$$S_0(x) = f_0(x)$$
$$S_1(x) = f_0(x) + f_1(x)$$
$$-----------------$$
$$-------------------$$
$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + ... + f_n(x)$$

نسمي D مجموعة الاعداد x من $]a,b[$ بحيث تكون السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ متقاربة

وهي مجال تعريف دالة المجموع F و نكتب $\forall x \in D, F : x \to F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ ،

أو نكتب $S_n(x) \to F(x)$ لما $n \to +\infty$.

تقارب سلاسل الدوال:

<u>التقارب البسيط:</u>

تعريف(1.2.2.3): نقول سلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ أنها تتقارب ببساطة نحو دالة مجموعها F على المجال $]\alpha,\beta[\subset D$ إذا كانت السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ متقاربة من أجل كل x من $]\alpha,\beta[$

أي أن $S_n(x)$ تتقارب نحو $F(x)$

مثال(1.2.2.3): في المجال $[0,1]$ سلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ بحيث

$$\forall n \in IN, \forall x \in [0,1]; f_n(x) = x^n - x^{n+1}$$

لاحظ أن السلسلتين $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0)$ ، $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(1)$ متقاربتين

$\forall x \in]0,1[, \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{|x^{n+1} - x^{n+2}|}{|x^n - x^{n+1}|} = |x| < 1$ أي متقاربة مطلقا فهي متقاربة

ومنه سلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ تتقارب ببساطة على المجال $[0,1]$.

التقارب المنتظم:

تعريف(2.2.2.3):نقول عن سلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ أنها تتقارب بانتظام نحو دالة مجموعها F على المجال $]\alpha,\beta[\subset D$ يعني

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon); \forall n > m \geq N(\varepsilon) \to |R_n(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$|f_m(x) + f_{m+1}(x) + \ldots + f_n(x)| < \varepsilon$$

مثال(2.2.2.3): ادرس التقارب المنتظم لسلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ حيث

$\forall x \in [0,1]; g_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$ وهذا يمثل حد عام لسلسلة عددية متناوبة متقاربة حسب لبنز، من جهة اخرى إذا كان $R_n(x)$ باقي هذه السلسلة لدينا

$\forall x \in [0,1]; |R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ومنه نستنتج أن $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ تتقارب بانتظام على المجال $[0,1]$.

شرط كافي للتقارب المنتظم (التقارب النظيمي):

تعريف(3.2.2.3): نقول عن سلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ أنها تتقارب نظيميا على المجال $]\alpha,\beta[$ عندما توجد سلسلة عددية ذات حدود موجبة متقاربة $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ بحيث

$$\forall x \in]\alpha,\beta[, |f_n(x)| \leq V_n$$

نظرية(1.2.2.3)(نظرية ديني): إذا كانت سلسلة الدوال ذات الحد العام f_n متقاربة نظيميا على $]\alpha,\beta[$ فإنها تتقارب بانتظام عليه.

نظرية(2.2.2.3): إذا كانت سلسلة الدوال المحدودة $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ متقاربة مطلقا على I فإنها تقبل سلسلة حادة من الاعلى تحقق $\forall x \in I, \exists V_n > 0; |f_n(x)| \leq V_n$ أي أنها متقاربة نظيميا.

مثال(3.2.2.3): لتكن الدالة العددية f_n المعرفة كالتالي: $\underset{\forall n \in IN^*, \forall x \in IR; x \to \sin nx/n^2}{f : IR \to IR}$

واضح أنه $\forall n \in IN, \forall x \in IR, |f_n(x)| = 1/n^2$ وأن $1/n^2$ يمثل حد عام لسلسلة عددية متقاربة و بالتالي حسب النظرية(2.2.2.3) السلسلة المعطاة متقاربة نظيميا و منه فهي متقاربة بانتظام على IR.

سلاسل الدوال و الاستمرار:

نظرية(3.2.2.3): في الفضاء النظيمي المعرف على $I\left(I \subset IR\right)$ إذا كانت سلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ مستمرة و محدودة على I فإنها تتقارب بانتظام نحو دالة مجموعها F المستمرة على I.

مثال(4.2.2.3): نعتبر سلسلة الدوال $\sum_{n\geq 1} g_n$ بحيث $\forall x \in [0,1], g_n(x) = \dfrac{nx^2}{n^3 + x^3}$

بين أن دالة المجموع G لهذه السلسلة مستمرة

الحل: 1) إذا كان $x = 0$ لدينا $g_n(0) = 0$ و بالتالي $\sum_{n\geq 1} g_n(0)$ متقاربة

2) إذا كان $\forall x \in \left]0,1\right], \left|g_n(x)\right| \leq \dfrac{nx^2}{n^3} \leq \dfrac{1}{n^2}$ ، $\dfrac{1}{n^2}$ يمثل حد عام لسلسلة متقاربة و بالتالي سلسلة الدوال متقاربة نظيميا على $[0,1]$ و منه السلسلة متقاربة بانتظام على $[0,1]$ و بما أن الدوال g_n مستمرة على $[0,1]$ حسب النظرية(3.2.2.3) دالة المجموع G مستمرة على $[0,1]$.

تكامل سلاسل الدوال:

نظرية(4.2.2.3): إذا كانت $\sum_{n\geq 0} g_n$ سلسة دوال مستمرة ومتقاربة بانتظام على $[a,b] \subset \Re$ نحو دالة مجموعها G المستمرة على $[a,b]$ فإنه توجد سلسلة دوال $\sum_{n\geq 0} k_n$ معرفة على $[a,b]$ كالتالي: $\forall n \in \mathrm{N}, \forall x \in [a,b]; k_n(x) = \int_a^x g_n(t)dt$ تتقارب بانتظام على $[a,b]$ نحو الدالة $K(x) = \int_a^x G(t)dt$ و لدينا كذلك

$$\sum_{n\geq 1} \int_a^x g_n(t)dt = \sum_{n\geq 1} k_n(x) = \int_a^x \left(\sum_{n\geq 1} g_n(t)\right)dt$$ (تكامل السلسلة=سلسلة التكاملات)

مثال(5.2.2.3): استخدم تكامل السلاسل لحساب المجموع $\sum_{n\geq 0} (-1)^n / (3n+1)$

الحل: نعرف سلسلة الدوال بسلسلة صورها $\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{3n}$ على المجال $[0,1]$ وهي متقاربة بانتظام عليه وبالتالي حسب النظرية لدينا من جهة

$\displaystyle\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{3n}dx=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ من جهة اخرى $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{3n}$

يمثل نشر معمم في جوار الصفر للدالة $x\to 1/1+x^3$ و منه

$\displaystyle\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n}dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}=\ln 2+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt{3}}{2}$ وهي قيمة المجموع.

سلاسل الدوال و الاشتقاق:

نعتبر في المجال $I=]a,b[$ سلسلة الدوال $\sum_{n\geq 0}f_n$ و القابلة للاشتقاق مع الاستمرار(محدودة) أي من الصنف $C^1(I,IR)$ ، وبفرض أن $\sum_{n\geq 0}f'_n$ متقاربة بانتظام نحو الدالة G على I فإنه حسب متتالية الدوال و الاشتقاق و من أجل كل x_0 من I السلسلة $\sum_{n\geq 0}h_n$ و المعرفة بـ: $\forall n\in \mathrm{N},\forall x\in I;h(x)=\int_{x_0}^{x}f'(t)dt$

متقاربة بانتظام (نظيميا) على I نحو الدالة $H(x)=\int_{x_0}^{x}G(t)dt$

نظرية(5.2.2.3): لتكن الدوال f_n من المجال I ($I\subset IR$) في E ($E=IR$) او($E=C$)عناصر سلسلة الدوال من الصنف $C^1(I,IR)$ ، و لدينا

1) $\sum_{n\geq 0}f'_n$ سلسلة متقاربة بانتظام (نظيميا) على I نحو الدالة G

2) توجد على الاقل x_0 من I بحيث $\sum_{n\geq 0}f_n(x_0)$ تتقارب ببساطة نحو العدد μ

فإن سلسلة الدوال $\sum_{n\geq 0}f_n$ تتقارب بانتظام (نظيميا) على I نحو الدالة

$x\to \mu+\int_{x_0}^{x}G(t)dt$ ، و المساواة صحيحة $\displaystyle\sum_{n\geq 0}f'_n(x)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n\geq 0}f_n(x)\right)$

مثال(6.2.2.3): نعتبر سلسلة الدوال $\sum_{n\geq 0}f_n$ المعرفة بعبارة الحد العام للسلسة العددية

$$\forall n\in IN,\forall x\in IR,f_n(x)=(n+1)x^n e^{inx}$$

ادرس تقارب هذه السلسلة.

الحل: 1) إذا كان $|x|\geq 1\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}|f_n(x)|\neq 0$ و منه السلسلة $\sum_{n\geq 0}f_n$ متباعدة

2) إذا كان $|x|<1$ حسب دالنبير $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}<1$ فهي متقاربة على $D\supset\left]-1,1\right[$ كذلك

$\left]-a,a\right[\subseteq D,\ \sup\limits_{x\in\left]-a,a\right[}|f_n(x)|=(n+1)a^n\underset{n\to+\infty}{\to}0$ و بالتالي نستنتج أن سلسلة

الدوال متقاربة بانتظام على D .

نعتبر سلسلة الدوال $\sum\limits_{n\geq0}k_n$ حيث $k_n(x)=\left(xe^{ix}\right)^{n+1}$ واضح أن

$\forall x\in D, k'_n(x)=(1+ix)e^{ix}f_n(x)$ و التكن K دالة المجموع للسلسلة $\sum\limits_{n\geq0}k_n$

على D ، من أجل $x=0$ ، $\sum\limits_{n\geq0}k_n(0)$ تتقارب ببساطة نحو $K(0)$

كذلك لتكن F دالة المجموع للسلسلة $\sum\limits_{n\geq0}f_n$ حسب النظرية $K'(x)=\alpha(x)F(x)$ حيث

الدالة α تتعلق بـ x فقط، مما سبق نستنتج أن $K(x)=\frac{xe^{ix}}{1-xe^{ix}}$ و بالتالي

$K'(x)=\frac{(1+ix)e^{ix}}{\left(1-xe^{ix}\right)^2}$ نأخذ $\alpha(x)=(1+ix)e^{ix}$ ومنه نستنتج أن

$F(x)=1\big/\left(1-xe^{ix}\right)^2$ وهي صورة دالة المجموع لسلسلة الدوال $\sum\limits_{n\geq0}f_n$.

3-3- السلاسل الصحيحة(لمتغير حقيقي):

تعريف(1.3.3): نسمي سلسلة صحيحة لمتغير حقيقي x السلسلة التي حدها العام $\forall n\in \mathbb{N}, U_n(x)=a_n(x-x_0)^n$ ، x_0 قيمة ثابتة وتكتب بالعبارة

$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+......+....$$

و اليكن $S_n(x)$ مجموعها الجزئي من الرتبة n و بالتالي السلسلة الصحيحة تمثل كثير حدود معمم للمتغير x .

مثال(1.3.3) السلسلة الهندسية $\sum_{n\geq 0} x^n$ ذات الاساس x هي سلسلة صحيحة مجموعها الجزئي $S_n(x)$ حيث $S_n(x)=1+x+x^2+...+x^{n-1}=\dfrac{1-x^n}{1-x}$

و الذي له النهاية المحدودة $S_n(x)\underset{n\to+\infty}{\to} S(x)=\dfrac{1}{1-x}$ من أجل $|x|<1$

هذا المثال يوضح أن دالة المجموع لهذه السلسلة في حالة التقارب هي دالة للمتغير x و منه نستنتج أن المطلوب هو تحديد مجموعة قيم x التي من أجلها تكون السلسلة متقاربة ثم ندرس خواص دالة المجموع.

مجال تقارب السلاسل الصحيحة:

لتبسيط الدراسة ندرس السلاسل الصحيحة من الشكل $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ و سلسلة القيم المطلقة $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$

نظرية(1.3.3)(نظرية ابيل): إذا كانت السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ متقاربة من أجل x_0 فهي متقاربة مطلقا من أجل كل x يحقق $|x|\leq|x_0|$

البرهان: ليكن العدد الحقيقي x_0 بحيث تكون $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^{\,n}$ متقاربة فإن $a_n x_0^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ و بالتالي $\exists k>0 : |a_n x_0^n|<k$ ، و اليكن x بحيث $|x|<|x_0| \Rightarrow |a_n x^n|\leq |a_n x_0^n|\left|\dfrac{x}{x_0}\right|<k\left|\dfrac{x}{x_0}\right|$

لكن $\left|\dfrac{x}{x_0}\right|<1$ ومنه السلسلة $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$

محدودة من الاعلى بسلسلة متقاربة فهي متقاربة و بالتالي متقاربة مطلقا من أجل $|x|<|x_0|$

.

لتكن E مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة r بحيث $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ تكون متقاربة مما سبق ، إذا كان $r_0 \in E$ فإن $[0, r_0] \subset E$ أي E غير خالية نميز حالتين

1) المجموعة E تقبل عنصر حاد من الاعلى R تكون السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ متقاربة مطلقا إذا كان $|x|<R$ و تكون متباعدة إذا كان $|x|>R$ ، نسمي R نصف قطر التقارب كما يسمى $]-R, R[$ مجال التقارب عندما $R=0$ السلسلة متقاربة من أجل $x=0$

2) إذا كانت المجموعة E عنصر حاد من الاعلى فأن السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ متقاربة مطلقا من أجل كل $x \in IR$ و مجال تقاربها غير محدود.

الطريقة العملية لإيجاد نصف قطر التقارب

بتطبيق مقياسي دالنبير أو كوشي على السلاسل المتقاربة مطلقا أي

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| = l|x|$$ حيث $$l = \lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$ و حسب شرط دالنبير السلسلة $\sum_{n\geq 0}|a_n x^n|$ متقاربة إذا كان $l|x|<1 \Rightarrow |x|<1/l$

و متباعدة إذا كان $|x|>1/l$ ومنه نضع $R=1/l$ (في حالة $l=0 \Rightarrow R=+\infty$)

وبنفس الطريقة في حالة استخدام مقياس كوشي $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|} = l|x|$ و $R=1/l$

ملاحظة(1.3.3): في حالة $|x|=R$ أي عند حدود مجال التقارب تدرس كل حالة بمفردها

مثال(2.3.3): حدد نصف قطر التقارب و طبيعة كل سلسلة من السلاسل التالية عند حدود مجال تقاربها إن أمكن:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n} \text{ ،} \quad \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} \text{ ،} \quad \sum_{n\geq 1} n^{2n}x^n$$

الحل: 1) حسب مقياس دالنبير

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{|x|^n} = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1\times|x|$$ أي $l=1 \Rightarrow R=1$

طبيعة السلسلة على اطراف مجال تقاربها

من أجل $x=-1$ ، السلسلة $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/n$ هي سلسلة توافقية متقاربة حسب لبنز

من أجل $x=1$ ، السلسلة $\sum_{n\geq 1} 1/n$ هي سلسلة متباعدة

2) بنفس الطريقة السلسلة الثانية حسب مقياس النسبة

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{|x|^n}=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0\times|x|$$ أي $l=0\Rightarrow R=+\infty$

3) لتعيين نصف قطر التقارب للسلسة الثالثة نستعمل مقياس كوشي

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^{2n}|x|^n}=\lim_{n\to+\infty}n^2|x|=+\infty\times|x|$$ أي $l=+\infty\Rightarrow R=0$.

العمليات الجبرية و نصف قطر التقارب

نظرية(2.3.3): لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ، $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ سلسلتين للمتغير الحقيقي x و اليكن R_2, R_1 نصفي قطريهما على الترتيب فإن $R\geq \inf(R_1,R_2)$ يمثل نصف قطر التقارب للسلسلتين

$$\sum_{n\geq 0}(\lambda a_n+\mu b_n)x^n \text{ ،} \quad \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n;\quad \forall x, |x|<R$$.

التقارب المنتظم و الاستمرار

دراسة التقارب على مجال مفتوح

نظرية(3.3.3): السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ذات نصف قطر التقارب R تتقارب بانتظام (نظيميا) على كل مجال مفتوح محتوى في D_R (D_R مجال تقاربها).

نظرية(4.3.3): دالة المجموع F للسلسلة الصحيحة للمتغير الحقيقي x ذات نصف قطر التقارب R مستمرة على المجال المفتوح $]-R,R[$

مثال(3.3.3): نعتبر السلسلة الصحيحة التالية: $\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{n(n-1)}$ بين أنها متقاربة بانتظام على $]-R,R[$ و أن دالة مجموعها مستمرة عليه

الحل: السلسلة المعطاة متقاربة بانتظام على $]-1,1[$ و دالة مجموعها $x\to(x-1)\ln(1-x)+x$ مستمرة عليه.

التقارب عند اطراف المجال

السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ذات نصف قطر التقارب R متقاربة بانتظام على المجال المفتوح $]-R,R[$ و السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ المتناوبة متقاربة حسب لبنز نت أجل كل x من $[-R,R]$ و

بالتالي $\left|\sum_{k\geq 0} a_k x^k\right| \leq |a_{n+1}||x|^{n+1} \leq |a_{n+1}|R^{n+1}$, $\forall x \in [-R,R]$ حسب لبنز $\sum_{n\geq 0}|a_n|R^n$ متقاربة.

مثال(4.3.3): من المثال(3.3.3) $R=1$ و بالتالي السلسلتين $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ ، $\sum_{n\geq 2}\frac{(1)^n}{n(n-1)}$ متقاربتين أي السلسلة $\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{n(n-1)}$ متقاربة عند اطراف المجال.

3-3-2- تكامل سلسلة صحيحة (لمتغير حقيقي)

نظر**ية**(5.3.3): لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ سلسلة صحيحة للمتغير الحقيقي x و نصف القطر $R(R>0)$ فإنه

$$\forall x \in \Re, 0<|x|<R; \int_0^x\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right)dt = \sum_{n\geq 0} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n\geq 0} a_n\, x^{n+1}/n+1$$

نظرية(6.3.3): للسلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ و السلسلة الصحيحة الناتجة عن مكاملتها نفس نصف قطر التقارب $R(R>0)$.

مثال(5.3.3): بين أنه $\forall x \in]-1,1], \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

الحل: $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ سلسلة صحيحة ونصف قطر تقاربها $R=1$ ودالة مجموعها على المجال $]-1,1[$ هي $x \to \frac{1}{x+1}$ بالمكاملة نجد

$$\int_0^x \frac{dt}{t+1} = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

وباستبدال n بـ $n-1$ يكون لدينا $\forall x \in]-1,1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

من جهة اخرى لما $x=1$ السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة حسب لبنز و بالتالي

$$\forall x \in]-1,1], \ln(1+x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}x^n/n.$$

ملاحظة(2.3.3): للسلسلة الصحيحة و السلسلة الصحيحة الناتجة عن مكاملتها نفس مجال التقارب، لكن قد تكونا من طبيعتين مختلفتين عند أطرافه.

مثال(6.3.3): السلسلتين $\sum_{n\geq 1} x^{n-1}/n$ ، $\sum_{n\geq 1} x^{n}/n^2$ لهما نفس مجال التقارب $]-1,1[$ لكن من أجل $x=1$ لاحظ أن $\sum_{n\geq 1} 1/n$ متباعدة ، $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ متقاربة.

3-3-3- اشتقاق سلسلة صحيحة (لمتغير حقيقي)

تعريف(2.3.3): لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ سلسلة صحيحة للمتغير الحقيقي x ، نسمي $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ السلسلة المشتقة الأولى وإذا وجد عدد طبيعي $p(p\geq 1)$ نسمي السلسلة $\sum_{n\geq p} n(n-1)...(n-p+1)a_n x^{n-p}$ (باستبدال $n-p$ بـ n نتحصل على السلسلة $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_n x^n$) بالسلسلة المشتقة من الرتبة p للسلسلة المعطاة.

نظرية(7.3.3): للسلسلة الصحيحة والسلسلة الصحيحة المشتقة عنها نفس نصف قطر التقارب $R(R>0)$.

نظرية(8.3.3): اذا كانت F دالة المجموعة للسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ للمتغير الحقيقي x و نصف قطر التقارب $R(R>0)$ و كانت F_p دالة المجموع للسلسلة المشتقة من الرتبة $p(p\in \mathbb{N}^*)$ فإنه $\forall p\in \mathbb{N}^*, \forall x\in]-R,R[; F_p(x)=F^{(p)}(x)$ حيث $F^{(p)}$ تمثل الدالة المشتقة من الرتبة p للدالة F

وكذلك $$\forall p\in \mathbb{N}^*, \forall x\in]-R,R[; \sum_{n\geq p} \frac{d^p}{dx^p}(a_n x^n) = \frac{d^p}{dx^p}\left(\sum_{n\geq p} a_n x^n\right)$$

مثال(7.3.3): نعتبر السلسلة الصحيحة التالية $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$

1) عين نصف قطر التقارب، 2) جد السلسلتين المشتقتين الاولى والثانية
3) جد دالة المجموع للسلسلة المشتقة الثانية، 4) استنتج دالة المجموع للسلسلة المعطاة

الحل: 1) حسب مقياس النسبة $R=\lim_{n\to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to +\infty} \frac{n(n+1)}{n(n-1)} = 1$

2) السلسلة الصحيحة متقاربة بانتظام على كل مجال مغلق محتوى في $]-1,1[$ و بالتالي

حسب النظرية(8.3.3) لدينا $\left(\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{n(n-1)}\right)' = \sum_{n\geq 2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)}$

السلسلة الناتجة أيضا متقاربة بانتظام على كل مجال مغلق محتوى في $]-1,1[$ و

بالتالي $\left(\sum_{n\geq 2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)}\right)' = \sum_{n\geq 2}x^{n-2}$ و باستبدال $n-2$ بـ n تكون السلسلة

$\sum_{n\geq 2}x^{n-2} = \sum_{n\geq 0}x^n$ ، 3) نعلم بأن دالة المجموع للسلسلة $\sum_{n\geq 0}x^n$ هي الدالة $x \to \frac{1}{1-x}$

، 4) بالمكاملة مرتين للدالة المحصل عليها نستنتج الدالة $x \to (1-x)\ln(1-x)+x$

و التي تمثل دالة المجموع للسلسلة المعطاة.

3-3-4- النشر الى سلسلة صحيحة

الدوال القابلة للنشر:

تعريف(3.3.3): نقول عن الدالة $f\left(f : IR \to IR\right)$ أنها قابلة للنشر إلى سلسلة صحيحة في جوار الصفر(المبدأ) إذا وفقط إذا وجدت سلسلة صحيحة $\sum_{n\geq 0}a_n x^n$ ذات نصف قطر $R(R\geq 0)$ و جوار U للصفر بحيث

$$\forall x\in U, f(x)=\sum_{n\geq 0}a_n x^n \;.$$

مثال(8.3.3): $\underset{x\to 1/(1-x)}{f : IR \to IR}$ دالة قابلة للنشر في جوار الصفر الى سلسلة صحيحة و $\forall x\in IR, |x|<1; 1/(1-x)=\sum_{n\geq 0}x^n$

نظرية(9.3.3): إذا كانت $f : IR \to IR$ قابلة للنشر **في** جواره فإن $f\in C^{\infty}(U(0))$ و السلسلة هي $\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

نظرية(10.3.3): تعطى $f : IR \to IR$ بحيث $f\in C^{\infty}(U(a)), a\in IR$

$f\in C^{\infty}(U(a)), a\in IR_+$ نسمي السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0}\alpha_n (x-a)^n$ حيث

$\alpha_n = f^{(n)}(a)/n!$ نشر تايلور للدلة f في جوار النقطة a ، في حالة $a=0$ نسمي

$\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ سلسلة ماكلوران للدلة f

نظرية(11.3.3): إذا كانت $f: IR \to IR$ قابلة للنشر إلى سلسلة صحيحة في جوار0(جوار a) فإن هذا النشر وحيد.

النشر باستعمال شكل ماكلوران:

لتكن $f: IR \to IR$ من الصنف $C^{\infty}(]-a,a[), a \in IR_+$ قابلة الى النشر الى سلسلة ماكلوران بباقي($R_n(x) \neq 0$)

باستعمال متباينة تليلور-لاقرانج

لدينا باقي لاقرانج $\forall n \in \mathrm{N}^*, \forall x \in V(0); R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{n!} x^k$ و

بالتالي $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \sup_{t \in [0,x]} |f^{(n)}(t)| \Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \|f^n(t)\|_{\infty}$

حسب التعريف لكي تكون f قابلة للنشر الى سلسلة صحيحة في جوار0 يجب أن يوجد عدد $\alpha > 0$ بحيث $\forall x \in]-\alpha, \alpha[\subset V(0) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} |R_n(x)| = 0$

هذا الشرط يحقق وجود $M > 0$ بحيث $\forall t \in]-\alpha, \alpha[; |f^n(t)| \leq M$

وبالتالي $\forall x \in]-\alpha, \alpha[, |R_n(x)| \leq M \frac{\alpha^n}{n!}$ ، العدد $M \frac{\alpha^n}{n!}$ يمثل حد عام في سلسلة متقاربة حسب دالنبير ومنه $\lim_{n \to +\infty} |R_n(x)| = 0$.

باستعمال شكل تليلور بباقي تكاملي

لدينا $\forall n \in \mathrm{N}^*, \forall x \in V(0); f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$

أي $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$

و لكي تكون f قابلة للنشر الى سلسلة صحيحة في جوار0 يجب أن يوجد $\alpha > 0$ بحيث

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \lim_{n \to +\infty} R_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt = 0$$

تطبيقات:

1) $f(x) = e^x$ نعلم بأنه

$\forall n \in IN, \forall x \in IR; f^{(n)}(x) = e^x \leq e^R, R > 0, |x| < R$ و بالتالي

لاحظ أن $\left|R_n(x)\right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^x dx\right| < \frac{|x|^n}{n!} e^x$ يمثل حد عام في $\frac{|x|^n}{n!} e^x$

سلسلة عددية ذات حدود موجبة وهي متقاربة حسب مقياس دالبير و بالتالي

$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ أي أنه يمكن نشر الدالة f على شكل سلسلة صحيحة في جوار

الصفر تسمى سلسلة ماكلوران ونكتب $(R = +\infty)$ $e^x = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{x^n}{n!}$

2) $g(x) = \cos x$ كذلك يمكن التحقق من أنه

$$\forall x \in IR, \forall n \in IN; \cos^{(n)} x = \cos(x + n\pi/2) \Rightarrow \left|\cos^{(n)} x\right| \le 1$$

و بالتالي $\left|R_n(x)\right| \le \frac{R^n}{n!}$ أي محدود بحد عام لسلسلة متقاربة، و منه

$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ و بالتالي $(R = +\infty)$ $\cos x = \sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

بنفس الطريقة يمكن نشر الدالة $h(x) = \sin x$ إلى سلسلة ماكلوان أي

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... = \sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ (R = +\infty)$$

3) الدوال الزائدية: الدالتين $ch(x), shx$ من الصنف$C^\infty(IR^*)$ و $C^\infty(IR)$ على

الترتيب وبالتالي النشر غير المنتهي لمكلوران لكل منهما هو على الترتيب

$$shx = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ (R = +\infty) \quad ، chx = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ (R = +\infty)$$

4) الدوال من الشكل: $k(x) = (1+x)^\alpha; \alpha \in Q$ الدالة k من الصنف$C^\infty(I)$ حيث

$$\forall x \in I = \left]-1,+\infty\right], k^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

و بالتالي سلسلة ماكلوران المرفقة بالدالة k هي

$(R = 1)$

$$k(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n\ge1} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1)}{n!} x^{\alpha-n}$$

مثال(9.3.3): نشر ماكلوران للدالة $x \to \sqrt[3]{1+x}$ هو

$$\sqrt[3]{1+x}=1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}-\frac{5}{27}x^3+.....=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1/3(-2/3)....(1/3-n+1)}{n!}x^{1/3-n}$$

3-3-5- طرق اخرى للنشر على شكل سلسلة صحيحة

مكاملة نشر معلوم:

بتطبيق النظريات حول السلاسل و التكامل لدينا الأمثلة

نعلم بأنه $(R=1)$ $\forall x\in\left]-1,1\right[;\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{n=+\infty}x^n$ بالمكاملة طرفا الى طرف نجد

$(R=1)$ $\forall x\in\left[-1,1\right[;\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{x^n}{n}$ و باستبدال $(-x)$ بـ x

نتحصل على النشر $(R=1)$ $\forall x\in\left]-1,1\right];\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

كذلك باستبدال $(-x^2)$ بـ x نجد $(R=1)$ $\forall x\in\left]-1,1\right[;\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{n=+\infty}(-1)^n x^{2n}$

بالمكاملة طرفا الى طرف نجد $(R=1)$ $\forall x\in\left]-1,1\right[;Arctgx=\sum_{n=0}^{n=+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

كذلك باستبدال (x^2) بـ x نجد $(R=1)$ $\forall x\in\left]-1,1\right[;\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{n=+\infty}x^{2n}$

بالمكاملة طرفا الى طرف نجد $(R=1)$ $\forall x\in\left]-1,1\right[;Argthx=\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

اشتقاق نشر معلوم:

بتطبيق النظريات على النشر و الاشتقاق لدينا

مثال(3.3.9): جد دالة المجموع للسلسلة $(R=1)$ $\sum_{n=1}^{n=+\infty}n(n+1)x^n$ ،

لاحظ يمكن كتابة السلسلة المعطاة على الشكل$(R=1)$ $x\sum_{n=1}^{n=+\infty}n(n+1)x^{n-1}$

وباستبدال $n-1$ بـ n نجد

$(R=1)$ $x\sum_{n=1}^{n=+\infty}n(n+1)x^{n-1}=x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}$ كذلك لاحظ أن السلسلة

$(R=1)$ $\sum_{n=2}^{n=+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ تمثل السلسلة المشتقة الثانية للسلسلة $\sum_{n=0}^{n=+\infty} x^n$ و التي دالة مجموعها $x \to \frac{1}{1-x}$ ، اذن لإيجاد دالة المجموع للسلسلة المعطاة يكفي أن نشتق الدالة السابقة مرتين في المجال $]-1,1[$ ثم نضرب في x فنتحصل على الدالة $x \to \frac{2x}{(1-x)^3}$ وهو المطلوب.

3-4- سلاسل فوري

3-4-1- تذكير:

تعريف(3.4.1): f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة و مستمرة على المجال $J=[-a,a], a>0$ تكون الدالة f زوجية على J إذا وفقط إذا تحقق

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

مثال(3.4.1): واضح أن $\int_{-\pi}^{\pi}\cos xdx = \int_{-\pi}^{0}\cos xdx + \int_{0}^{\pi}\cos xdx$

$$= \int_{\pi}^{0}\cos(-x)d(-x) + \int_{0}^{\pi}\cos xdx = 2\int_{0}^{\pi}\cos xdx$$

تعريف(3.4.2): f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة و مستمرة على المجال $J=[-a,a], a>0$ تكون الدالة f فردية على J إذا وفقط إذا تحقق $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

مثال(3.4.2): لاحظ أن $\int_{-\pi}^{\pi}\sin xdx = \int_{-\pi}^{0}\sin xdx + \int_{0}^{\pi}\sin xdx$

$$= \int_{\pi}^{0}\sin(x)dx + \int_{0}^{\pi}\sin xdx = 0$$

تعريف(3.4.3): f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة و مستمرة على المجال $I=[a,b]$, تكون الدالة f دورية على I ودورها T إذا وفقط إذا تحقق

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx \quad \text{و} \quad \int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

مثال(3.4.3): لاحظ أن الدالة $x \to \sin x$ دالة دورية و دورها 2π و بالتالي

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin xdx = -\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \int_{0}^{2\pi}\sin xdx = 0$$

السلاسل الدورية

تعريف(3.4.4): نسمي سلسلة دورية (مثلثية) السلسلة ذات الحدود الحقيقية من الشكل

حيث $a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\omega nt+b_n\sin\omega nt\right)$ ، $\omega\in IR^*_+$ ، $(a_n),(b_n)$ متتاليتين عدديتين، وحدها العام $U_n(x)=a_n\cos\omega nt+b_n\sin\omega nt, n\in \mathrm{N}$ هو دالة للمتغير الحقيقي x مستمرة، قابلة للاشتقاق و دورية و دورها $T_n=2\pi/\omega n$. في حالة تقارب هذه السلسلة فإن دالة مجموعها هي دالة دورية و دورها $T=2\pi/\omega$.

ملاحظة(1.4.3): من التعريف(4.4.3) لدينا المتباينة التالية $\left|U_n(x)\right|<\left|a_n\right|+\left|b_n\right|$

البرهان: يكفي أن نكتب $\cos,\sin$ باستخدام صيغة أولر أي

$$\cos\omega nx=\frac{e^{in\omega x}+e^{-i\omega nx}}{2}\Rightarrow\left|\cos\omega nx\right|\leq\frac{\left|e^{i\omega nx}\right|+\left|e^{-i\omega nx}\right|}{2}\leq 1$$

كذلك $$\sin\omega nx=\frac{e^{i\omega nx}-e^{-i\omega nx}}{2i}\Rightarrow\left|\sin\omega nx\right|\leq\frac{\left|e^{i\omega nx}\right|+\left|e^{-i\omega nx}\right|}{2}\leq 1$$

ومنه نستنتج أن $\left|U_n(x)\right|<\left|a_n\right|+\left|b_n\right|$.

مثال(3.4.3): لتكن f دالة عددية معرفة كما يلي $f:\underset{x\to e^x}{[0,1]\to IR}$ و $a_0=1-e^{-1}$ ،

$$a_n=\frac{2\left(1-e^{-1}\right)}{1+4n^2\pi^2} \text{ ، } b_n=\frac{4n\pi\left(1-e^{-1}\right)}{1+4n^2\pi^2}\Rightarrow\left|f_n(x)\right|<\frac{2\left(1-e^{-1}\right)\left(1+2n\pi\right)}{1+4n^2\pi^2}$$

3-4-2- سلسلة فوري

تعريف(4.4.3): لتكن f دالة حقيقية دورية و دورها $T=\frac{2\pi}{\omega}, \omega\in IR^*$ ، قابلة لمكاملة على مجال I طوله الدور T نسمي سلسلة فوري المرفقة بالدالة f السلسلة الدورية

حيث $a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\omega nx+b_n\sin\omega nx\right)$ ، $n\in IN^*$ ، a_0,a_n,b_n تسمى معاملات فوري

حساب معاملات فوري:

نفرض أن السلسلة قابلة للمكاملة حدا بحد على المجال $[0,2\pi/\omega], \omega\in IR^*$ و بالتالي:

$$\int_0^{2\pi/\omega}f(x)dx=\int_0^{2\pi/\omega}a_0dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi/\omega}\left[a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x\right]dx$$ و بما أن

$$\int_0^{2\pi/\omega}[a_n\cos n\omega x+\sin n\omega x]dx=\left[a_n\frac{\sin n\omega x}{n\omega}-b_n\frac{\cos n\omega x}{n\omega}\right]_0^{2\pi/\omega}=0$$

ومنه $a_0=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}f(x)dx$ ، كذلك النسبة لحساب a_n ، b_n

نحسب التكاملين $\int_0^{2\pi/\omega}f(x)\cos p\omega x dx$ و $\int_0^{2\pi/\omega}f(x)\sin p\omega x dx$

لدينا $\int_0^{2\pi/\omega}f(x)\cos p\omega x dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi/\omega}[a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x]\cos p\omega x dx$ ، إذا كان

$$p\neq n,\ \int_0^{2\pi/\omega}\cos n\omega x\cos p\omega x dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi/\omega}[\cos(n+p)\omega x+\cos(n-p)\omega x]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+p)\omega x}{(n+p)\omega}+\frac{\sin(n-p)\omega x}{(n-p)\omega}\right]_0^{2\pi/\omega}=0$$

و إذا كان $n=p$ فإن $\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2 n\omega x dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi/\omega}(1+\cos n\omega x)dx=\frac{\pi}{\omega}$

كذلك إذا كان $n\neq p$ فإن

$$\int_0^{2\pi/\omega}\sin n\omega x\cos p\omega x dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi/\omega}[\sin(n+p)\omega x+\sin(n-p)\omega x]dx=0$$

و إذا كان $n=p$ فإن $\int_0^{2\pi/\omega}\sin n\omega x\cos p\omega x dx=\left[\frac{\sin^2 n\omega x}{2n\omega}\right]_0^{2\pi/\omega}=0$

مما سبق نستنتج أن $\int_0^{2\pi/\omega}f(x)\cos p\omega x dx=\frac{\pi}{\omega}a_n$ و منه

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega}f(x)\cos p\omega x dx$$

بنفس الطريقة يمكن تبسيط التكامل

و بطريقة $\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\sin p\omega x dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi/\omega}[a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x]\sin p\omega x dx$

مماثلة وفي حالة $n=p$ نجد $\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\sin p\omega x dx = \frac{\pi}{\omega}b_n$ ومنه

$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\sin p\omega x dx$ مثال(4.4.3): لتكن f دالة حقيقية دورية و دورها 2π ،

قابلة لمكاملة على المجال $[0,\pi]$

حيث $f(x)=2x$ ، - احسب معاملات فوري ثم استنتج سلسلة فوري الموفقة بهذه الدالة

باستعمال النتائج السابقة فإن $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}[x^2/2]_0^{2\pi} = \pi/2$

و $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right]$

$$= \frac{2}{\pi n}[\cos nx/n]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} -4/\pi n^2, n=2k+1 \\ 0, n=2k; k\in Z \end{cases}$$

كذلك $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi n}\left[-[x\cos nx]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos nx dx\right]$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} + \left[2\frac{\sin nx}{\pi n^2}\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 2/\pi n, n=2k+1 \\ -2/\pi n, n=2k; k\in Z \end{cases}$$

ومنه سلسلة المرفقة بهذه الدالة هي

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos nx + \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin nx\right)$$

ملاحظة(2.4.3): اذا كانت f دالة معرفة على مجال محدود $[a,b]$. لكي تكون قابلة للنشر الى سلسلة فوري من الضروري تمديدها الى دالة دورية.

و التكن إذن g الدالة ذات الدور $T=b-a$ و المطابقة للدالة f على المجال $[a,b]$ أي

$\begin{cases} g(x)=f(x), x\in]a,b[\\ g(x+T)=g(x) \end{cases}$ و التالي g تحقق النشر الى سلسلة فوري ذات الحد العام $U_n(x)$ من أجل

الدور T/n حيث $U_n(x)=a_n\cos n\frac{2\pi}{T}x+b_n\sin n\frac{2\pi}{T}x$، بوضع $\omega=\frac{2\pi}{T}$ ومن أجل

$x\in\left]a,b\right[$ لدينا $g(x)=f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\omega nx+b_n\sin\omega nx\right)$

ملاحظة(3.4.3): اذا كانت f دالة معرفة على مجال I طوله الدور T فإنه يمكن صياغة

معاملات فوري على الشكل التالي: $b_n=\frac{2}{T}\int_I f(x)\sin\omega nxdx$ ،

$a_n=\frac{2}{T}\int_I f(x)\cos\omega nxdx$ ، $a_0=\frac{1}{T}\int_I f(x)dx$.

حالات خاصة

لتكن f دالة حقيقية دورية و دورها $T=\frac{2\pi}{\omega},\omega\in IR^*$، قابلة للمكاملة على مجال I طوله

الدور T و اليكن $[-T/2,T/2]$

<u>الدوال الفردية:</u>

الدالة f دالة فردية على I و بالتالي

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)dx=\frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{T/2}f(x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{T}\left[-\int_{0}^{T/2}f(x)dx+\int_{0}^{T/2}f(x)dx\right]=0$$

كذلك بما أن الدالة cos زوجية على IR فهي زوجية على I و $IR\supset I$ و بالتالي الدالة

$x\to f(x)\cos x$ فردية على I و منه $a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos\omega nxdx=0$

لكن $b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\sin\omega nxdx=\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2}f(x)\sin\omega nxdx$

أي أن سلسلة فوري المرفقة بالدالة الفردية هي $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\omega nx$

مثال(5.4.3): لتكن f دالة دورية و دورها 2π معرفة كما يلي:

$$f(x)=x,x\in[-\pi,\pi]$$

الحل: واضح أن الدالة f فردية و قابلة للمكاملة على المجال المعطى و بالتالي سلسلة فوري المرفقة بالدالة f هي $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ حيث $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin nt dt$

أي $$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{t}{n}\cos nt\right]_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nt dt=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

و منه $f(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

<u>الدوال الزوجية:</u>

الدالة f دالة زوجية على I و بالتالي

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx=\frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(x)dx+\int_0^{T/2} f(x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} f(x)dx+\int_0^{T/2} f(x)dx\right]=\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx$$

كذلك بما أن الدالة $\cos$ زوجية على IR فهي زوجية على $I \subset IR$ و بالتالي الدالة $x \to f(x)\cos x$ زوجية على I

و منه $$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\omega nx dx=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\omega nx dx$$

لكن و بما أن الدالة $\sin$ فردية على IR فهي فردية على $I \subset IR$ و بالتالي الدالة $x \to f(x)\sin x$ فردية على I و بالتالي $b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\omega nx dx=0$

ومنه سلسلة فوري المرفقة بالدالة الفردية هي $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\omega nx$

مثال(6.4.3): لتكن f دالة دورية و دورها 2π معرفة كما يلي:

$$f(x)=|x|, x\in[-\pi,\pi]$$

الحل: واضح أن الدالة f زوجية و قابلة للمكاملة على المجال المعطى و بالتالي سلسلة فوري المرفقة بالدالة f هي $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx$ حيث

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}tdt=\pi$$

و

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t\cos ntdt$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{t}{n}\sin nt\right]_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin ntdt$$

أي

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

و منه

$$f(x)=\pi+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[(-1)^n-1\right]}{n^2}\cos nx$$

واذا كان n فردي أي $n=2k+1$ فإن $f(x)=\pi+\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$.

3-4-3- نشر دالة على شكل سلسلة فوري:

الدالة الدورية:

نعلم بأنه من أجل كل دالة f دورية و دورها $T=\frac{2\pi}{\omega},\omega\in IR^*$، قابلة لمكاملة على مجال I طوله الدور T يمكن أن نرفق السلسلة $a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos\omega nx+b_n\sin\omega nx)$ و التي تسمى سلسلة فوري، و السؤال الذي يمكن أن نطرحه هل إذا كانت لدينا سلسلة فوري متقاربة فهي تتقارب نحو الدالة f ، للإجابة لدينا النظرية التالية

نظرية(1.4.3): إذا كانت f دالة دورية و دورها $T=\frac{2\pi}{\omega},\omega\in IR^*$، مستمرة و قابلة للاشتقاق مع الاستمرار ماعدا عند عدد منتهي من النقط في مجال طوله الدور T بحيث للدالة f أو للدالة المشتقة الأولى f' تقبل نهاية من اليمين و نهاية من اليسار عند هذه النقط ، فإن سلسلة فوري المرفقة بالدالة f تتقارب على IR و دالة مجموعها $\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$

وفي كل نقط استمرار الدالة f لدينا $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n \cos\omega nx+b_n \sin\omega nx)$.

مثال(7.4.3): لدينا من المثال(5.4.3) الدالة f ($f(x)=x$) دورية و دورها 2π ، وهي فردية على المجال $[-\pi,\pi]$ ومرفقة بسلسلة فوري $f(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$

لاحظ من أجل $x=\pi$ السلسلة تحقق المجموع $0=\frac{1}{2}[f(\pi+0)+f(\pi-0)]$

أما من أجل $x=\pi/2$ نتحصل على المجموع $f(\pi/2)=2[1-1/3+1/5-1/7....]$

أي $\pi/4=1-1/3+1/5-1/7....$.

الدوال الكيفية:

لتكن f دالة معرفة ومحدودة على المجال $[a,b]$ ، لكي نتمكن من نشر الدالة f الى سلسلة فوري يجب تمديدها الى دالة دورية.

لتكن دالة g دورية دورها $T=b-a$ بحيث من أجل كل x من $[a,b]$ فإن

$$g(x)=f(x)$$

و $g(x+T)=g(x)$ ، الدالة وتحقق شروط النظرية السابقة و بالتالي فهي تقبل النشر الى سلسلة فوري ذات الحد العام $U_n(x)$ من أجل الدور T/n و المعرف بـ:

$$U_n(x)=a_n\cos(2\pi n/T)x+b_n\sin(2\pi n/T)x$$

ومنه بعد وضع $\omega=2\pi/T$ و من أجل $x\in\,]a,b[$ فإن

$$g(x)=f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)$$

و كما أسلفنا سابقا اذا كان المجال I طوله الدور T فإنه يمكن صياغة معاملات فوري كالتالي

$$a_0=\frac{1}{T}\int_I f(x)dx \quad ، a_n=\frac{2}{T}\int_I f(x)\cos\omega nx dx \quad ، \quad b_n=\frac{2}{T}\int_I f(x)\sin\omega nx dx$$

مثال(8.4.3): انشر على شكل سلسلة $\sin$ الدالة f المعرفة بـ:

$f(x)=1$ على المجال $[0,1]$

الحل: لتكن g دالة دورية و دورها $T=2l$ معرفة كما يلي: $g(x)=\begin{cases}1, 0<x<1\\ -1, -1<x<0\end{cases}$ ، الدالة g قابلة للنشر على شكل سلسلة $\sin$ و $g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin n\omega x$ حيث $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{l}$

و $b_n=\int_{-1}^{1} g(x)\sin n\omega x dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{1}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{n\pi}\left|-\cos\frac{n\pi x}{l}\right|_0^1$ ومنه

- إذا كان $n=2p$ فإن $b_{2p}=0$

- و إذا كان $n=2p+1$ فإن $b_{2p}=\frac{4}{\pi(2p+1)}$

و بالتالي من أجل $0<x<1$ فإن $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)}\sin(2p+1)\frac{\pi}{l}x$

3-4-4- الشكل المركب لسلسلة فوري

لتكن f دالة دورية و دورها $T=\frac{2\pi}{\omega},\omega\in IR^*$ قابلة للنشر إلى سلسلة فوري

$a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos\omega nx+b_n\sin\omega nx)$ بتطبيق قوانين اولر على الحد العام $U_n(x)$ يمكن كتابة

$$U_n(x)=a_n\frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2}+b_n\frac{e^{in\omega x}-e^{in\omega x}}{2i}$$

$$=\frac{a_n-ib_n}{2}e^{in\omega x}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-in\omega x}$$

نضع $c_n=\frac{a_n+ib_n}{2}$ مما سبق نستنتج أن

$$c_n=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_I f(x)\cos n\omega x dx-\frac{2i}{T}\int_I f(x)\sin n\omega x dx\right]$$

أي

$$c_n=\frac{1}{T}\int_I f(x)e^{-in\omega x}dx$$

و بالتالي $U_n(x)=c_n e^{in\omega x}+\bar{c}_n e^{-in\omega x}$ و بما أن

و منه $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(c_n e^{in\omega x}+c_{-n}e^{-in\omega x}\right)$

و إذا ما وضعنا $a_0=c_0$ يكون لدينا $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{in\omega x}$

مثال(9.4.3): لتكن f دالة عددية معرفة كما يلي $f:IR\to IR$ دورية ودورها 2π بحيث $f(x)=e^x$ على المجال $]-\pi,\pi]$

احسب معاملات فوري ثم ادرس التقارب (البسيط والمنتظم) لسلسلة فوري.

الحل: لدينا $$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(1-in)x}dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-in)x}}{(1-in)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}}{(1-in)}\right]=\frac{1}{2\pi}\left[(-1)^n\frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{(1-in)}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n(1+in)sh\pi}{2\pi\left(1+n^2\right)}$$

نعلم بأن سلسلة فوري المرفقة بهذه الدالة هي $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n(1+in)sh\pi}{2\pi\left(1+n^2\right)}e^{inx}$ و التي تتقارب نحو $f(x)$ إذا كان $x\in\left]-\pi,\pi\right[$، و تتقارب نحو $\left(f(\pi_+)+f(\pi_-)\right)/2=ch\pi$ لما $x=\pi$

من الملاحظ أن نهاية e^x عندما $x\to\pi$ تختلف عن $ch\pi$، ومنه دالة المجموع لهذه السلسلة غير مستمرة على$\left]-\pi,\pi\right[$ وبالتالي هذا التقارب غير منتظم.

3-4-5- دستور بيسل- برسفيل

نعرف الجداء السلمي للدالتين f,g المعرفتين على $I\,(I\subset IR)$ بأنه الشكل الثنائي الخطي المرفق $(f,g)\to\frac{1}{T}\int_I f(x)g(x)dx$، وبالتالي من الجداء السلمي (f,f) نبرهن مساواة بيسل-برسافيل $\frac{1}{T}\int_I f^2(x)dx=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2$ و بما أن $|c_n|^2=|c_{-n}|^2=\frac{a^2{}_n+b^2{}_n}{4}$

و منه نستنتج $\frac{1}{T}\int_I f^2(x)dx=a^2{}_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_n|^2+|b_n|^2}{2}$

نظرية(2.4.3): إذا كانت f دالة دورية و دورها $T=\frac{2\pi}{\omega},\omega\in IR^*$، و قابلة للمكاملة على مجال I طوله الدور T فإن $\frac{1}{T}\int_I f^2(x)dx=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}|c_n|^2=a^2{}_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_n|^2+|b_n|^2}{2}$.

مثال(10.4.3): لتكن f الدالة دورية و دورها 2π، حيث $f(x)=1$ على المجال $\left]0,\pi\right[$ و $f(\pi)=0$.

1) عين معاملات فوري ثم استنتج سلسلة فوري

2) استنتج قيم المجاميع $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ ، $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ ، $\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{1}{n^2}$

الحل: واضح أن المعاملات $a_n=0$ و منه الدالة فردية و $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{2\left[1-(-1)^n\right]}{\pi}$

و بالتالي $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin(2k+1)x$

إذا كان $x=\pi/2$ فإن $\sin(k\pi+\pi/2)=(-1)^k$ ومنه $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}=\frac{\pi}{4}$

بما أن الدالة f فردية وحسب دستور بارسفيل

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}|b_n|^2=\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$ و منه $$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

و $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{3}{4}\times\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}$$

3-5- سلسلة تمارين حول الفصل الثالث

التمرين الأول:

بين أن السلاسل التالية متقاربة ثم احسب مجموع كل منها:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}\ ،\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{(n-1)n(n+1)}\ ،\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n^4+n^2+1}\ ،$$

التمرين الثاني:

بين فيما إذا كانت السلاسل التالية و المعرفة بحدها العام متقاربة أم متباعدة: $n\in \mathrm{N}^*$

$$U_n=n!\ ،\ U_n=\frac{1}{e^n+e^{-n}}\ ،\ W_n=e^{\sin n}\ ،\ F_n=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$G_n=\frac{n!}{n^n}\ ،\ T_n=\left(a+\frac{1}{n}\right)^n\ ،\ K_n=na^{-n}\ ،\ H_n=\ln\cos\frac{1}{n}\ ،$$

$$E_n=e^{1/n}-1$$

التمرين الثالث:

ادرس طبيعة السلاسل التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2+\cos n}{3^{n+1}}\ ،\ \sum_{n=0}^{+\infty}\sin\frac{1}{2^n}\ ،\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2+\cos n}{3^{n+1}}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum_{n=1}\cos(1/n)-1\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2.4.6.....2n}{n^n}\ ،\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{n^2+1}\right)^{-n^2}\ ،\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

التمرين الرابع:

حدد طبيعة السلاسل التالية و المعرفة بحدها العام:

$$n\in IN^*\quad U_n=\frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\ ،\ W_n=\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}\ ،\ G_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}\ ،$$

$$H_n=\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^n\,dt}{(1+t^2)^n}\ ،\ V_n=\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right),k\in IR\ ،$$

$$Q_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\ ،\quad T_n=\frac{(-1)^n}{(n+\pi)^2-1}\ ،$$

التمرين الخامس: من أجل $f_n:IR\to IR,x\to\dfrac{x}{1+a^{2n}x^2};a\in IR,n\in IN$

أدرس حسب قيم العدد الحقيقي a تقاربات سلسلة الدوال ذات الحد العام f_n

التمرين السادس: أدرس التقارب البسيط ثم النظيمي لسلسلة الدوال $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ و المعرفة بالحد العام للسلسلة العددية $f_n(x)$ حيث $\forall x\in IR; f_n(x)=\left(\cos^2 x+n^{\pi/2}x^2\right)^{-1}$

التمرين السابع: ـ أدرس التقاربات سلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ و المعرفة بالحد العام f_n حيث $\forall x\in IR; f_n(x)=(-1)^n e^{-nx}/\left(n^2+1\right)$ ثم بين أن دالة مجموعها من الصنف $C^1(D_F)$.

التمرين الثامن: عين نصف قطر التقارب السلاسل ذات الحد العام ثم حدد طبيعتها عند الأطراف:

$$U_n=\frac{x^n}{n^2+1} \text{ ، } V_n=\frac{x^n}{n^n} \text{ ، } W_n=2^{n+1}(x-2)^n \text{ ، } H_n=\frac{x^n}{chn} \text{ ،}$$

$$K_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n \text{ ، } T_n=(-2)^n\frac{x^{3n+1}}{n^2+1} \text{ ، } R_n=\left(1+a^n\right)x^n, a\geq 0 \text{ ،}$$

$$F_n=\left(4^n+n^n+\frac{2n+1}{(n!)^2}\right)x^n$$

التمرين التاسع: حدد نصف قطر التقارب ثم عين دالة المجموع لكل من السلاسل التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n} \text{ ، } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \text{ ، } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} \text{ ، } \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2-3n+2} \text{ ،}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(n+1)!} \text{ ،} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(n+e^{-n}\right)x^n$$

التمرين العاشر: 1) أنشر كل من الدوال التالية الى سلسلة صحيحة في جوار المبدأ:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2x+1} \text{ ، } g(x)=\ln\left(1+x^2\right) \text{ ، } k(x)=Arctgx \text{ ، } h(x)=\int_0^x\frac{e^t-1}{t}dt$$

2) حدد نصف قطر التقارب وطبيعة السلسلة من أجل $x=\pm R$ والمعرفة بحدها العام

$f_n(x)=(-1)^n\frac{x^n}{n(n-1)}; n\geq 2$ عين دالة مجموعها $F(x)$ مستنتجا قيمة

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$$

التمرين الحادي عشر:

لتكن f دالة دورية دورها 2π معرفة على $[-\pi,\pi]$ كما يلي: $f(x)=x^2$

1) بين أن $a_0=\dfrac{\pi^2}{3}$ وانه $\forall n\in \mathbb{N}^*, a_n=\dfrac{4(-1)^n}{n^2}$ ، $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}...(1)$ ،

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}...(2)$$

2) استنتج نشر الدالة f الى سلسلة فوري و ماهو مجموع سلسلة فوري على المجال $[-\pi,\pi]$

3) استنتج قيمة المجموع (1) و باستعمال دستور بارسافيل قيمة المجموع(2)

التمرين الثاني عشر: لتكن f دالة دورية دورها 2π معرفة على $]-\pi,\pi[$ كما يلي:

$f(x)=\cos\alpha x$ حيث $\alpha\in IR/Z$ ، 1) عين معاملي فوري a_n و b_n

2)استنتج قيمتي المجموعين $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2-\alpha^2}$ ، $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2-\alpha^2}$ و استنتج قيمة $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$

التمرين الثالث عشر: نعتبر الدالة الدورية f ذات الدور 2π و المعرفة كما يلي:

$$f(x)=\pi-|x| \quad ، \quad \forall x\in[-\pi,\pi] ،$$

- **1**) انشر الى السلاسل فوري الدالة f

2) استنتج قيمة المجموع $\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p+1)^2}$ من أجل $x=0$

3) ادرس التقارب المنتظم لسلسلة فوري المرفقة بالدالة f .

المحتوى

قائمة المراجع

[1] م. أبوزيد، مراجعة ترجمة نخبة نت الاساتذة. سلسلة شوم كتاب حساب التكامل والتفاضل، الطبعة العربية الثامنة ،2006 الدار الدولية الاستثمارات الثقافية، مصر

[2] م. ر. شبيجل، سلسلة شوم كتاب التكامل و التفاضل، الطبعة العربية الثامنة، 2008 الدار الدولية الاستثمارات الثقافية، مصر

[3] إ. الحمصي، التحليل الشعاعي و التوابع العقدية، ديوان المطبوعات الجامعية

[4] ل . بن عيسى، م. سعود، التحليل الرياضي الجزء الثاني، ديوان المطبوعات الجامعية

[5] د. عبد الرقيب، محاضرات في التكامل المتقدم، جامعة عدن، كلية التربية ردفان2010

[6] ر. محمد جهيمة، أ. عبد العالي هب الريح، التفاضل و التكامل، الطبعة الثالثة الجزء الثاني، دار الكتاب الجديد المتحدة، الفصل الثاني و الثالث. 1999/09/01مصراطة ليبيا.

[7] و. عبد الحق، الرياضيات للمهندسين التحليل الرياضي، ديوان المطبوعات الجامعية .

[8] Y.Bougrov, S. Nikolski, Cours de mathématiques supérieurs Tome II, Mir moscou 1975.

[9] M. Cheline, C. Vorathemsche, Analyse concepts et Contextes fonctions plusières variables, Deboeck paris 2006

[10] A. Colin, C. Bernard, D.jacques, C. Adina, B. Françoise, Exercises d'analyse, paris 5, 1984.

[11] A. Donedou, Topologie. Fonctions réelles d'une variable réelle Tome4, Librairie vuibert, 75005paris 1979.

[12] L. Ferrand, Cours de mathématiques, Tome 4, Dunud 1974.

[13] G. Genet, G. Pupion, Anlyse moderne 2, Librairie vuibert, 75005 paris 1981.

[14] M. Goultier, Analyse exercises et problèmes, 5155-(II)-osB89 pub COD/002/2008 Belgiques.

[15] N. Piskounov, Calcul differentiel et integral Tome II Mir.Moscou ,1977.

[16] Z. Khlifa, Intégrales généralisées et séries, office des publiccations universitaires

[17] P. Thuillier, J-C. Belloc, Mathématiques 3 Analyse, Masson , paris 1982.