Module Master M2

Raisonnement et Décisions
Chapitre I : Raisonnement

Présenté par : Prof. Kholladi Mohamed-Khireddine
Département d'Informatique
Facultés des Sciences Exactes
Université Echahid Hamma Lakhdar d'El Oued
Tél. 0770314924
Email. kholladi@univ-eloued.dz et kholladi@yahoo.fr
Site Web. www.univ-eloued.dz
http://kholladi.doomby.com/ et http://kholladi.e-monsite.com/

I – Raisonnement
I.0 - Sommaire

I.1 - Raisonnement

I.1.1 - Introduction

Le raisonnement a pour préoccupation la modélisation et l'automatisation de processus de raisonnement et de prise de décision, dans une perspective d'assister l'utilisateur ou le décideur. Ils concernent les problématiques suivantes :

- La modélisation des croyances et leur dynamique, et le raisonnement automatisé :
- Modèles logico-mathématiques pour la modélisation des croyances incomplètes, incertaines et/ou partiellement incohérentes ;
- Révision des croyances ;
- Raisonnement sur l'action et la causalité ;
- Fusion de croyances ;
- Apprentissage automatisé.

Les modèles utilisés incluent différentes théories de l'incertain :

- Probabilités ;
- Fonctions de croyances ;
- Possibilités ;
- Et modèles purement ordinaux.

Et différentes logiques non-classiques :

- Logiques épistémiques ;
- Logique dynamique ;
- Logique possibiliste ;
- Logiques de l'incertain ;
- Et logiques para consistantes.

I.1.2 – Définition

Le raisonnement est un processus cognitif, qui permet d'obtenir de nouveaux résultats ou bien de vérifier la réalité d'un fait en faisant appel soit à différentes lois ou soit à des expériences, quel que soit leur domaine d'application : mathématiques, système judiciaire, physique, santé, pédagogie, etc. (voir la figure I.1).

Figure I.1 – Le penseur de Rodin

Les mathématiques tentent de distinguer le vrai du faux. Par exemple "Est-ce qu'une augmentation de 25%, puis de 35% est plus intéressante qu'une augmentation de 60% ?". On peut penser oui ou non, mais pour en être sûr il faut suivre une démarche logique qui mène à la conclusion. Cette démarche doit être convaincante aussi bien pour nous que pour les autres. On parle de raisonnement. Les mathématiques sont un langage, pour s'exprimer rigoureusement, adapté aux phénomènes complexes, qui rend les calculs exacts et vérifiables. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer aux autres. La figure I.2 illustre les étapes d'un modèle du traitement de l'information.

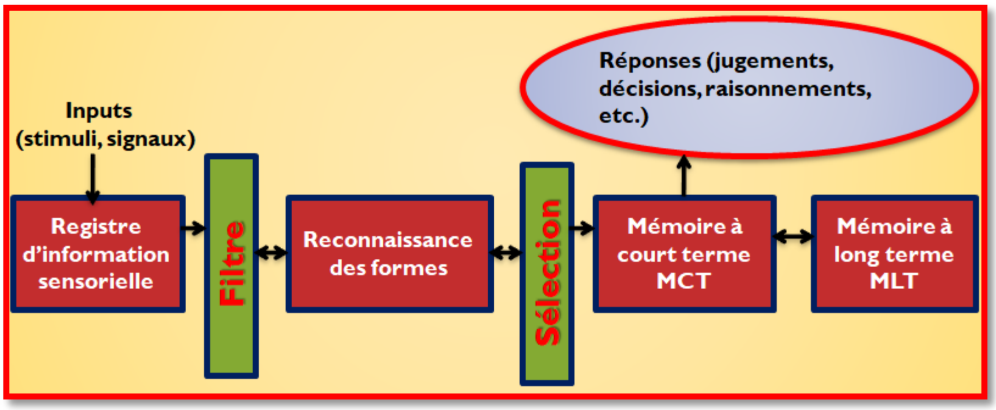


Figure I.2 - Les étapes d'un modèle du traitement de l'information

I.1.3 - Objectifs des raisonnements

On conduit des raisonnements pour des objectifs différents, qui peuvent se combiner la prise de décision, le test d'une argumentation et la conduite d'une démonstration d'un théorème, de la confirmation d'une hypothèse. On dit que l'individu effectue des inférences et que le mécanisme d'élaboration de ces inférences s'appelle le raisonnement.

I.2 - Les différents raisonnements

I.2.1 – Logiques formelles

Un système formel est constitué :

1. D'un alphabet fini de symboles;
2. D'un procédé de construction des mots du système formel;
3. D'un ensemble d'axiomes (qui sont des mots);
4. Et d'un ensemble fini de règles de déduction.

Une preuve est une suite finie de mots : M_1, M_2, …, M_n dans laquelle chaque M_i est soit un axiome, soit se réduit des mots précédents.

- Un théorème est un mot t, tel qu'il existe une preuve de $M_i \equiv t$.
- Tout axiome est un théorème.
- Tout théorème est une tautologie et vice versa : cela veut dire que toute interprétation (modification de la valeur de vérité de ses variables) de ce théorème est valide.

I.2.2 – Raisonnements formalisés et non formalisés

Il existe différentes typologies des raisonnements possibles. Un raisonnement est dit formalisé s'il s'énonce dans une langue formelle, obéissant à des règles de syntaxe strictes et évacuant ainsi toute ambiguïté sémantique. Typiquement, les raisonnements mathématiques sont des raisonnements formalisés. Un raisonnement peut également être exprimé en langue naturelle et respecter parfaitement des règles logiques d'inférences. Il existe ainsi des degrés plus ou moins élevés de formalisme.

I.2.3 - Raisonnements à priori et à posteriori

Le raisonnement à priori, dit aussi analytique, recourt souvent a une formalisation logique pour établir une preuve. Il repose surtout sur des principes et sur une analyse conceptuelle. À l'opposé des raisonnements à priori, il existe des raisonnements à posteriori reposant sur des données empiriques. Celles-ci peuvent être recueillies par des expérimentations ou des observations. Un raisonnement empirique peut être tout aussi rigoureux qu'un raisonnement analytique.

Descartes affirmait : "Il n'y a pas d'autres voies qui s'offrent aux hommes, pour arriver à une connaissance certaine de la vérité, que l'intuition évidente et la déduction nécessaire". Il admettait l'importance de l'intuition, importance qui fut reconnue aussi par Spinoza et Bergson.

I.3 - Raisonnement et résolution de problèmes

On a différents types de raisonnement comme suit :

- Raisonnement action basé sur la logique de l’action qui est une association répétitive entre demande et réponse ;
- Raisonnement concret basé sur le visible, le concret ;
- Raisonnement formel basé sur le bien raisonné par déduction logique
- Raisonnement naturel ou de bon sens raccourci basé sur l’expérience passée et la connaissance des résultats habituels ;
- Et raisonnement analogique basé sur les connaissances acquises dans un domaine particulier et appliquées dans un autre domaine.

On va détailler différentes méthodes classiques de raisonnement à savoir le raisonnement direct, le raisonnement de disjonction ou du cas par cas, le raisonnement par contraposition, le raisonnement par l’absurde, le raisonnement par contre-exemple et le raisonnement par récurrence.

a - Raisonnement direct

On veut montrer que l’assertion $P \rightarrow Q$ est vraie. On va supposer que P est vraie et on va montrer alors que Q est vraie. C’est la méthode habituelle.

Exemple : Montrer que si $a, b \in Q$ alors $a + b \in Q$

b - Raisonnement de disjonction ou du cas par cas

Si l’on souhaite vérifier une assertion P(x) pour tous les x dans un ensemble E, on montre l’assertion pour les x dans une partie A de E, ensuite pour les x n’appartenant pas à A. C’est la méthode de disjonction ou du cas par cas.

Exemple : Montrer que pour tout $x \in R$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$, pour cela on considère les deux cas de résolution pour $x \geq 1$ et $x < 1$.

c - Raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante : L'assertion $P \rightarrow Q$ est équivalente à $\neg(Q) \rightarrow \neg(P)$. Donc si l'on souhaite montrer l'assertion $P \rightarrow Q$, on montre en fait que si $\neg(Q)$ est vraie alors $\neg(P)$ est vraie.

Exemple : Soit $n \in N$, montrer que si n^2 est pair alors n est pair, pour cela on considère le cas où n est impair pour déduire que n^2 est impair alors par contraposition on déduira que si n^2 est pair alors n est pair.

d - Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer $P \rightarrow Q$ repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vrai et que Q est faux et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vrai et donc $P \rightarrow Q$ est vrai.

Exemple : Soient $a, b \geq 0$, montrer que si $a/(1+b) = b/(1+a)$ alors $a = b$, pour cela on raisonne par l'absurde en supposant que $a/(1+b) = b/(1+a)$ et $a \neq b$.

e - Raisonnement par contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type $\forall x \in E\ P(x)$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que P(x) est vrai. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que P(x) soit fausse. (Il faut se rappeler que la négation de $\forall x \in E\ P(x)$ est $\exists x \in E\ \neg P(x)$). Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion $\forall x \in E\ P(x)$ est vraie.

Exemple : Montrer que l'assertion suivante est fausse "Tout entier positif est somme de trois carrés". Les carrés sont les 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, etc. Par exemple $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$, pour cela on prend un contre-exemple l'entier positif 7 : les carrés inférieurs à 7 sont 0, 1, 4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

f - Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion P(n), dépendant de n, est vraie pour tout $n \in N$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes lors de l'initialisation on prouve P(0). Pour l'étape d'hérédité, on suppose $n > 0$ donné avec P(n) vraie, et on démontre alors que l'assertion P(n + 1) au rang suivant est vraie. Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout n $\in$ N.

Exemple : Montrer que pour tout n $\in$ N, $2^n > n$.

I.4 - Différents types de raisonnements : quelques exemples au collège (CEM)

On va pouvoir détailler un peu plus le raisonnement déductif, le raisonnement par disjonction de cas, l'infirmation par production d'un contre-exemple et le raisonnement par l'absurde

I.4.1 - Exemple de raisonnement au collège (CEM)

Le tableau suivant va nous donner pour chaque type de raisonnement des indications sur l'organisation de données, leur gestion et leurs fonctions dans le domaine du calcul et des nombres et celui de la géométrie.

Type de raisonnement	Organisation, gestion de données, fonctions	Nombres, calcul	Géométrie
Déductif	Proportionnalité et alignements de points	Quotients Ordre et addition Ordre et multiplication	Toute la géométrie
Avec un contre exemple	Situations de non proportionnalité	Opposé du produit et produit des opposés Somme des inverses de la somme	Si AM/AB = AN/AC alors (MN) et (BC) sont parallèles
Par disjonction de cas		Ordre et multiplication	Intersection droite-cercle
Par l'absurde (approche)	Suites de nombres non proportionnelles (graphique)	Tester si un nombre est solution d'une équation	Un triangle n'est pas rectangle

I.4.2 - Exemple de raisonnement par contre exemple

Pour une proposition mathématique, la production de plusieurs exemples non contradictoires n'apporte pas la preuve que la proposition soit toujours vraie. Mais un seul contre-exemple peut apporter la preuve qu'une proposition est fausse. L'inverse d'un produit de deux nombres non nuls est égal au produit des inverses de ces deux nombres :

$$\left(\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}\right) \times (ab) = \left(\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}\right) \times (a \times b)$$

$$\left(\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}\right) \times (ab) = \left(\frac{1}{a} \times a\right) \times \left(\frac{1}{b} \times b\right)$$

$$\left(\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}\right) \times (ab) = 1$$

$$\text{Donc } \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{a \times b}$$

Mais la proposition "Si la somme de deux nombres non nuls n’est pas nulle, alors l’inverse de cette est égal à la somme des inverses de deux nombres" est fausse. Soit a = 1 et b= 2, alors :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 + \frac{1}{2}, donc\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.5$$

$$et\ \frac{1}{a+b} = \frac{1}{3}, donc\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a+b}$$

Il existe deux nombres non nuls a et b, de somme non nulle, tels que :

$$\frac{1}{a+b} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

C’est un élément de logique difficile. Il faut bien le distinguer de la production d’exemples proposés pour proposer des conjectures.

I.4.3 - Exemple de raisonnement par l’absurde

Si un triangle est tel que $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors ce triangle n’est pas rectangle en A. Soit un triangle ABC tel que $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$. Le triangle ABC ne peut pas être rectangle en A, car s’il l’était, on aurait l’égalité $BC^2 = AB^2 + AC^2$, qui est en contradiction avec l’hypothèse. Donc si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n’est pas rectangle en A, Il faut bien le distinguer de la production d’exemples proposés pour proposer des conjectures.

I.4.4 - Exemple de raisonnement par disjonction de cas

On va voir l’ordre de deux nombres de même signe et de leurs carrés. Soit a et b deux nombres de même signe, tel que a < b.

1er cas : a et b sont tous les deux positifs, alors :

$$a < b \text{ et } a > 0, \text{ donc } a*a < b*a$$

$$a < b \text{ et } b > 0, \text{ donc } b*a < b*b$$

Donc par transitivité de la relation d'ordre, $a^2<b^2$.

2ème cas : a et b sont tous les deux négatifs, alors :

$$a < b \text{ et } a < 0, \text{ donc } a*a > b*a$$

$$a < b \text{ et } b < 0, \text{ donc } b*a > b*b$$

Donc par transitivité de la relation d'ordre, $a^2>b^2$.

Conséquence : Soient a et b deux nombres positifs si $a^2 < b^2$ alors $a < b$.

Application : dans tout triangle rectangle il existe un côté dont la longueur est plus grande que celle de chacun des deux autres, et le côté ayant la plus grande longueur est l'hypoténuse $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Donc $BC^2 > AB^2$, donc $BC > AB$ de même $BC > AC$.

I.5 - Logique du premier ordre

La logique du premier ordre ne permet pas de capturer un certain nombre de nuances exprimées par les langues humains naturelles. Par exemple, représenter : Le coq est mort après le coucher du soleil nécessite des connaissances temporelles, Le coq est peut-être mort impose de prendre en compte une notion de possibilité, et beaucoup de coqs sont des rois de la basse-cour suggère que les quantifications universelle et existentielle sont insuffisantes, etc. Pour remédier à ces carences, des logiques, souvent dites non classiques, ont été développées. Sans entrer dans les détails, on citera à titre d'illustration la logique d'ordre supérieur, les logiques modales (e.g. temporelle), les logiques multivaluée, la logique floue, les systèmes s'appuyant sur la théorie des probabilités, etc. Ces logiques peuvent être caractérisées en fonction de leur position ontologique, c'est-à-dire ce qui est supposé quant à la nature de la réalité et par leur position épistémologique, i.e., les états possibles des connaissances qu'elles autorisent compte tenu de chaque fait. Le tableau suivant synthétise les positions ontologiques et épistémologiques de cinq logiques différentes.

Langage	Position ontologique	Position épistémologique
Logique propositionnelle	Faits	Vrai/faux/inconnu
Logique du premier ordre	Faits, objets, relations	Vrai/faux/inconnu
Logique temporelle	Faits, objets, relations, temps	Vrai/faux/inconnu
Théorie des probabilités	Faits	Degré de croyance dans [0 ,1]
Logique floue	Faits avec degré de vérité dans [0 ,1]	Valeur dont l'intervalle est connu

Les différences logiques sont :

- Les logiques non classiques sont prises en compte et permettent d'augmenter l'expressivité de la logique de Frege.
- La logique multivaluée proposée par Jan Luckasiewicz (1878-1956) en 1920 prend ses valeurs de vérités sur l'intervalle [0,1] et redéfinit les opérateurs.
- Des logiques multivaluée avec un nombre limité de valeurs de vérité ont été aussi proposées : la logique trivalente par exemple (vrai, faux et peut-être).
- Lotfi Zadeh (né en 1921) a proposé en 1965 la logique floue, qui n'est pas une vraie logique mathématiquement parlant, mais utilise comme valeurs de vérité des sous-ensembles de [0,1].

En logique classique, l'énoncé $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ est toujours vrai, ce qui ne correspond pas à l'intuition. Clarence Irving Lewis (1883-1964), logicien propose en 1912 d'utiliser un opérateur de possibilité, noté◊, et introduit l'implication strict > : $A > B = \neg \lozenge (A \wedge \neg B)$. L'opérateur de nécessité est défini par : $A = \neg \lozenge (\neg A)$. Ces opérateurs caractérisent les logiques modales. Rien n'interdit d'ajouter d'autres opérateurs, par exemple les opérateurs F (dans le futur) et P (dans le passé) utilisés dans les logiques temporelles. Changer les axiomes de base de la logique classique permet également de développer d'autres logiques comme la logique intuitionniste, qui n'accepte pas le principe du tiers-exclu, $\models (A \vee \neg A)$, ni le principe de démonstration par l'absurde, $\models (S \wedge \neg A) \rightarrow \bot)$ $(S \rightarrow A)$. Pour faire face à l'explosion combinatoire dans les raisonnements, la logique classique est restreinte dans ses expressions et ses règles de raisonnements. John Alan Robinson (né en 1930) propose en 1965 de restreindre les expressions logiques aux clauses de Horn qui sont de la forme : $R_1 \wedge R_2 \wedge R_3 \wedge \ldots \rightarrow H$, ce qui peut également s'écrire : $(\neg R_1 \vee \neg R_2 \vee \neg R_3 \vee \ldots) \vee H$. Pour raisonner efficacement à partir de telles clauses, il propose d'utiliser le principe de résolution : A v B1 ¬A v C B v C. La figure I.3 illustre comment déduire H à partir de la règle ¬R1 v ¬R2 v H et des faits R_1 et R_2?

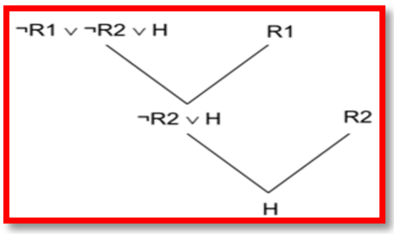


Figure I.3 – Logique de déduction de H

Alain Colmerauer (né en 1941) Philippe Roussel (né en 1945) développe à Marseille en 1972 le langage Prolog (Programmation Logique), au départ pour le langage. Un programme Prolog est une suite de clauses de Horn sur lesquelles opère un mécanisme de raisonnement utilisant le principe de résolution. Comme LISP, Prolog utilise massivement la structure de liste et est naturellement récursif.

```
factorielle(1,1).
factorielle(N,F) :- N =\= 1, X is N-1, factorielle(X,Y), F is Y*N.
mylength([ ], 0).
Mylenght([_|Y], L) :- mylenght (Y,L2), L is L2 + 1.
```

Prolog devient un des langages standards de l'Intelligence Artificielle, avec LISP.

I.6 - Résolution de problèmes

La résolution de problèmes peut être reproductive ou productive. Elle sera reproductive, si elle est associée directement une réponse à une difficulté identifiée (vie de tous les jours). Elle sera productive, si elle réarrange des données disponibles jusqu'à obtention d'une solution ou d'un système de solutions.

I.7 – Formalisation

I.7.1 – Formalisation du discours

La figure I.4 illustre la formalisation du discours aussi bien dans le monde réel que dans celui de la représentation.

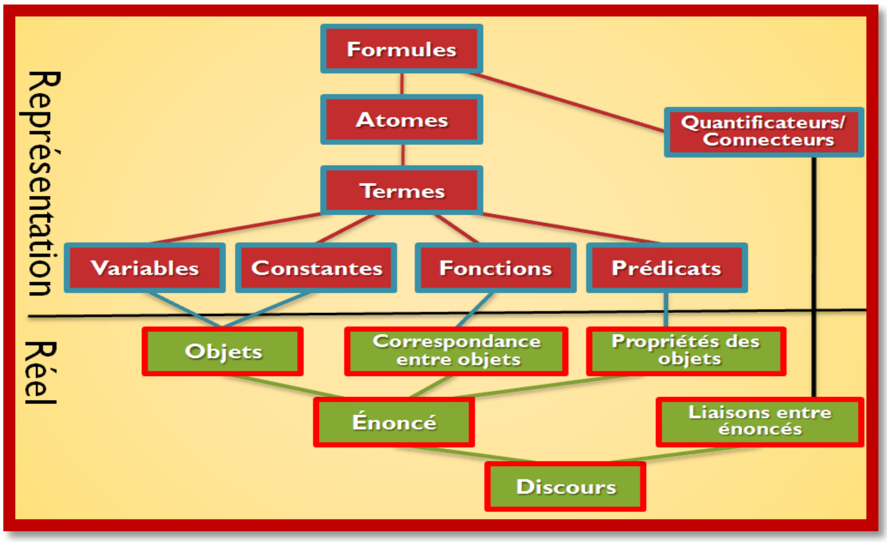


Figure I.4 – Formalisation du discours

I.7.2 – Formalisation du problème

Elle détermine les règles (briques) : la formulation d'un problème et le raisonnement c'est-à-dire la manière de résoudre un problème. On passe par des étapes cruciales pour généraliser et aussi pour prouver un raisonnement. Les avantages connexes sont le fait d'augmenter la clarté d'un raisonnement et nous oblige à réfléchir à certains détails qui ont leur importance.

I.8 - Capacité de raisonnement

La capacité de raisonnement est la capacité d'identifier un problème, d'analyser un problème, de choisir une solution et d'en évaluer l'impact. Cela implique de savoir comment prendre des décisions, planifier, organiser, et comparer des informations. C'est, par exemple, le fait de préparer un voyage, de comparer des points de vue, de gérer un conflit de groupe, de comprendre et d'analyser un changement.

I.8.1 - Mais où est la trousse CARS?

Monsieur Mohamed téléphone à la bibliothèque pour réserver la trousse CARS, un document multi-support qui semble très pertinent pour l'autoformation de ses mécaniciens. Après une vérification rapide, la technicienne, Ourida B. lui répond que la trousse est déjà empruntée mais qu'elle sera de retour dès le lendemain. Monsieur Mohamed se présente donc à la bibliothèque le lendemain mais oh malheur, la trousse CARS a mystérieusement disparu. Pouvez-vous aider la technicienne à la retrouver? À travers ce petit parcours simple, vous pourrez répondre à quelques questions faisant appel à votre capacité de raisonnement.

I.8.2 - Comment définit-on la compétence en capacité de raisonnement?

La compétence en capacité de raisonnement est la capacité à trouver et évaluer des renseignements ainsi que la capacité à identifier et analyser un problème, choisir une solution et évaluer l'impact de celle-ci. Elle consiste en :

1. Résoudre des problèmes;
2. Prendre des décisions éclairées;
3. User (faire preuve?) de pensée critique;
4. Organiser et planifier son travail;
5. Utiliser sa mémoire dans un but spécifique;
6. Rechercher des renseignements.

La compétence en capacité de raisonnement est une compétence complexe dont le développement s'entrelace à celui d'autres compétences. Le développement d'une compétence ou d'une sous-compétence se produit non seulement en contextes de formation structurée. Mais aussi et nécessairement dans des situations réelles de la vie de la personne dans la famille, au travail et dans la communauté. La compétence en capacité de raisonnement et ses sous-compétences sont développées, construites ou acquises dans divers contextes. Elles sont acquises ou construites par la personne, dans l'action et dans des contextes particuliers qui sont significatifs pour la personne. Certains aspects sont acquis traditionnellement en formation, d'autres in situ dans la vie quotidienne : la capacité de raisonnement, comme il en va pour toute compétence, comprend des aspects cognitifs (savoir), pratiques (savoir-faire), et affectifs ou relatifs à des qualités personnelles (savoir-être).

I.8.4 – Évaluation : Comment peut-on mesurer l'atteinte de cette compétence?

Tout comme la capacité de raisonnement est acquise, développée ou construite dans divers contextes, tel que discuté dans la section précédente, elle est aussi évaluée dans des contextes multiples comme l'évaluation du volet résolution de problème, selon le niveau de complexité. La résolution de problème dans la vie quotidienne est pertinente dans le domaine de l'apprentissage et l'évaluation des compétences essentielles chez les adultes peu scolarisés, car la vie représente leur lieu privilégié d'apprentissage. L'échelle de complexité comporte quatre niveaux et est basée sur les quatre dimensions suivantes :

- La complexité du problème;
- La complexité de la tâche consistant à déterminer le problème;
- La complexité de la tâche consistant à déterminer les mesures à prendre en guise de solution;
- Et la complexité de la tâche consistant à évaluer la solution.

Chaque niveau de l'échelle d'évaluation appliquée à la résolution de problèmes est défini par rapport à toutes ces dimensions. L'échelle applicable à la prise de décisions comporte quatre niveaux et est basée sur six dimensions :

1. La conséquence des erreurs;
2. La réversibilité de la décision;
3. Le caractère adéquat de l'information disponible;

4. L'existence d'une procédure préétablie ou une hiérarchie décisionnelle;
5. La pertinence des décisions antérieures semblables avec lesquelles faire la comparaison;
6. Le jugement dont il faut faire preuve pour prendre une décision appropriée.

Chaque niveau de l'échelle de la prise de décisions est défini par rapport à toutes ces dimensions. On propose des tâches d'utilisation de la mémoire au travail, sous forme de trois types de mémoire :

1. Le type 1 de mémorisation intentionnelle de procédures, de codes, de numéros de pièces, etc., ou la mémorisation par la répétition.
2. Le type 2 de se rappeler les renseignements pour une courte période, par exemple, quelques minutes ou quelques heures.
3. Et le type 3 de mémorisation s'effectuant sur une seule exposition, lors d'événements particuliers.

L'échelle d'évaluation de la recherche de renseignements comporte quatre niveaux et est basée sur deux dimensions :

1. la complexité de la tâche consistant à localiser les renseignements voulus;
2. la complexité de la tâche consistant à extraire et à traiter les renseignements.

Chaque niveau de l'échelle appliqué à la recherche de renseignements est défini par rapport à ces deux dimensions.

I.9 - Capacité de représentation

C'est la capacité de modéliser et donc de réduire ou de simplifier le monde en tenant de la vision globale et de la vision immédiate.

I.10 - Induction, déduction et abduction

La logique générale s'appuie sur la tradition des syllogismes, c'est-à-dire sur des raisonnements formalisables par des règles. En logique on s'accorde à considérer trois moyens de construction de raisonnements :

- La déduction ou raisonnement par déduction ;
- L'induction ou raisonnement par induction ;
- L'abduction ou raisonnement par abduction.

Elles se présentent schématiquement ainsi, en s'appuyant sur les notations classiques de la logique (➔ pour l'implication).

I.10.1 - Déduction

Le terme déduction se retrouve en logique, la déduction est l'un des trois types d'inférence, voir raisonnement déductif et en logique mathématique, par exemple en calcul des propositions et déduction naturelle, la relation de déduction lie des prémisses à des conclusions par l'intermédiaire de règles d'inférences, voir déduction logique. La règle de la déduction se lit ainsi :

si a est vrai,
et si si a est vrai alors b l'est aussi est vrai,
alors b est vrai.

$$\frac{a \qquad a \rightarrow b}{b}$$

I.10.2 - Abduction

Le terme abduction se retrouve en logique, c'est l'action d'inférer les prémisses les plus vraisemblables permettant de parvenir, par déduction, à une conclusion concordante aux observations. Elle est utilisée pour faire des diagnostics et en psychologie cognitive, c'est la forme de raisonnement intuitif qui consiste à supprimer les solutions improbables et qui s'oppose à une logique d'exploration systématique. La règle de l'abduction se lit ainsi :

si b est vrai,
et si si a est vrai alors b l'est aussi est vrai,
alors a est vrai.

$$\frac{b \qquad a \rightarrow b}{a}$$

I.10.3 - Induction

Le terme induction se retrouve en logique, c'est l'induction est un genre de raisonnement qui se propose de chercher des lois générales à partir de l'observation de faits particuliers, sur une base probabiliste et en logique mathématique, c'est l'induction est l'inférence menant de plusieurs affirmations particulières à une affirmation. La règle de l'induction se lit ainsi :

si b est vrai,
et si a est vrai,
alors si a est vrai alors b l'est aussi vrai.

$$\frac{b \qquad a}{a \rightarrow b}$$

I.10.4 – Modus ponens et modus tollens

Le processus de construction d'un raisonnement simple consiste à appliquer au moins l'une de ces trois règles sur une théorie initiale. C'est donc un moyen d'y ajouter de nouvelles propositions. Un raisonnement est dit déductif s'il ne s'appuie que sur la règle de déduction. Il est dit hypothétique s'il s'appuie sur au moins l'une des règles d'abduction ou d'induction. Seule la déduction conserve la cohérence d'une théorie : si la théorie initiale est cohérente, alors toute théorie qui en est une conséquence déductive reste cohérente. Une n-conséquence déductive D d'une théorie initiale I est une théorie obtenue après application d'un nombre quelconque mais fini de déductions sur I. La clôture déductive D d'une théorie initiale I est sa n-conséquence déductive, n étant infini. Une théorie est dite maximalement cohérente (ou cohérente au sens de Hilbert) si sa clôture déductive ne contient pas la proposition faux. Dans la plupart des systèmes du calcul des propositions, on trouve les règles suivantes :

$$\frac{\begin{array}{c} a \\ a \rightarrow b \end{array}}{b} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c} \neg b \\ a \rightarrow b \end{array}}{\neg a}$$

Modus ponens   Modus tollens

Le modus tollens est considéré en général comme une règle dérivée. La déduction naturelle y ajoute des règles d'introduction et d'élimination. Le calcul des séquents ne considère que des règles d'introduction et en plus la règle de coupure. Un séquent est une suite d'hypothèses suivie d'une suite de conclusions.

I.11 - Calcul des propositions

Le calcul des propositions ou calcul propositionnel est une théorie logique ayant pour objet l'étude des relations logiques entre propositions et définissant les lois formelles selon lesquelles, au moyen de connecteurs logiques, les propositions se coordonnent et s'enchaînent pour produire des raisonnements valides. La logique des propositions traite des propositions atomiques du type Ourida aime les crêpes ou Ourida mange des crêpes. Soit P la proposition Ourida aime les crêpes et Q la proposition Ourida mange des crêpes. Les propositions P et Q peuvent être vraies ou fausses. À partir de ces propositions, on peut construire des expressions, des phrases ou formules bien formées en combinant les propositions et les connecteurs logiques.

- $P \land Q$: Ourida aime les crêpes et Ourida mange des crêpes.
- $P \lor Q$: Ourida aime les crêpes ou Ourida mange des crêpes.
- $\neg P$: Ourida n'aime pas les crêpes.
- $P \rightarrow Q$: Si Ourida aime les crêpes alors Ourida mange des crêpes.

Les formules bien formées sont des formules (expressions) qui respectent la syntaxe du langage. Par exemple, les formules suivantes sont des formules bien formées :

- $(\neg Q) \rightarrow P$
- $P \rightarrow (P \rightarrow Q)$
- $(Q \lor P) \land P$

Les formules bien formées peuvent être vraies ou fausses. Leurs valeurs logiques dépendent de la valeur logique des propositions de base et les tables de vérité reliées aux connecteurs. On peut remarquer que $P \rightarrow Q$ et $\neg P \lor Q$ ont les mêmes tables de vérité quelles que soient les valeurs logiques de P et de Q. Ces deux expressions sont égales ou équivalentes. La logique des propositions possède les propriétés suivantes :

- Non contradictoire : t et $\neg$t ne sont pas simultanément dérivables.
- Complète : les théorèmes sont des tautologies.
- Décidable : il est possible de dire en un temps fini, si une phrase est un théorème ou non.

En fait, il suffit de choisir une interprétation donnée et démontrer la véracité d'un théorème selon cette interprétation. L'une des interprétations les plus simples est celle de l'algèbre de Boole. Pour démontrer un théorème, il suffit donc que sa table de vérité soit toujours vraie.

Après analyse, on a recueilli les connaissances suivantes :

- Si Ali est intéressé à la LF (logique formelle), Ali s'inscrira aux cours d'IA (Intelligence Artificielle) et PROLOG ou Ali est paresseux;
- Si Ali a lu un livre sur la LF (logique formelle), alors Ali est intéressé à la LF (logique formelle);
- Ali a lu un livre sur la LF (logique formelle); Ali n'est pas paresseux.

Ces connaissances semblent formalisables par la logique des propositions. Pour cela, on pose :

- A : Ali s'inscrira aux cours d'IA (Intelligence Artificielle) et de PROLOG

- B : Ali est paresseux
- C : Ali a lu un livre sur la LF (logique formelle)
- D : Ali est intéressé à la LF (logique formelle)

À partir de ces connaissances, on obtient une théorie avec 4 axiomes:

- Axiome 1 : $D \rightarrow A \vee B$
- Axiome 2 : $C \rightarrow D$
- Axiome 3 : C
- Axiome 4 : $\neg B$

Avec la logique du premier ordre, elle est un des langages formels privilégiés de la logique mathématique pour la formulation de ses concepts en systèmes formels. En raison de son applicabilité aux fondements des mathématiques et de la richesse de ses propriétés relevant de la théorie de la démonstration. Elle peut être considérée comme la forme moderne de la logique stoïcienne. Le calcul propositionnel (ou la logique propositionnelle) est un préliminaire absolument indispensable pour aborder une formation en sciences, philosophie, droit, politique, économie, etc. Ce type de calcul autorise des procédures de décisions ou tests. Ceux-ci permettent de déterminer dans quel cas une expression (proposition) logique est vraie et en particulier si elle est toujours vraie.

Définitions

La valeur de vérité finale d’une formule P dépendra des valeurs attribuées à chaque proposition atomique qui la compose. On appelle table de vérité la table constituée des valeurs de vérité de la formule finale en fonction des valeurs de vérité de ses atomes. Il existe alors trois cas :

1. Une expression toujours vraie quel que soit le contenu linguistique des variables qui la composent est appelée une expression valide, une tautologie, ou encore une loi de la logique propositionnelle. On dit que la formule P est une formule valide et on notera $\models P$.
2. Une expression toujours fausse est appelée une contradiction ou anthologie ou antilogie. C’est la négation de la tautologie. On dit que P est insatisfiable.
3. Une expression qui est parfois vraie, parfois fausse est appelée une expression contingente ou une formule synthétique.

On appelle assertion une expression dont on peut dire sans ambiguïté s'il elle est vraie ou fausse. Le langage objet est le langage utilisé pour écrire les expressions logiques. Le métalangage est le langage utilisé pour parler du langage objet dans la langue courante.

Remarques

- R1.
  - Il existe des expressions qui ne sont effectivement pas des assertions.
  - Par exemple, l'énoncé : cet énoncé est faux, est un paradoxe qui ne peut être ni vrai, ni faux.
- R2.
  - Soit une expression logique A.
  - Si celle-ci est une tautologie, on la note fréquemment |=A,
  - et s'il l'expression est une contradiction, on la note A|=.

I.11.1 - Introduction

La notion de proposition a fait l'objet de nombreux débats au cours de l'histoire de la logique. L'idée consensuelle est qu'une proposition est une construction syntaxique censée parler de vérité. En logique mathématique, le calcul des propositions est la première étape dans la définition de la logique et du raisonnement. Il définit les règles de déduction qui relient les propositions entre elles, sans en examiner le contenu. Il est ainsi une première étape dans la construction du calcul des prédicats, qui lui s'intéresse au contenu des propositions et qui est une formalisation achevée du raisonnement mathématique. Le calcul des propositions est parfois appelé logique des propositions, logique propositionnelle ou calcul des énoncés, et parfois théorie des fonctions de vérité.

Logique des propositions (logique d'ordre 0)

- Alphabet :
  - Des lettres propositionnelles : p, q, r, s t, etc.
  - Des opérateurs logiques : $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, etc.
  - Et des parenthèses.
- Formation des mots :
  - Une lettre propositionnelle est un mot.
  - Si m est un mot alors (m) est un mot.
  - Si m est mot alors $\neg$m est un mot.

- Si m_1 et m_2 sont des mots alors $m_1 \rightarrow m_2$ est un mot.

- Axiomes :
  - $\alpha : m_1 \rightarrow (m_2 \rightarrow m_1)$
- $: (m_1 \rightarrow (m_2 \rightarrow m_3)) \rightarrow ((m_1 \rightarrow m_2) \rightarrow (m_1 \rightarrow m_3))$
- $: (\neg m_2 \rightarrow \neg m_1) \rightarrow (m_1 \rightarrow m_2)$
- Règle de déduction unique : (modus ponens)
  - Si m_1 et $(m_1 \rightarrow m_2)$ sont des théorèmes, alors on en déduit (m_2).
  - Soit formellement : (m_1) et $(m_1 \rightarrow m_2) \rightarrow m_2$.

I.11.2 - Définition d'une proposition

Quoique le calcul des propositions ne se préoccupe pas du contenu des propositions, mais seulement de leurs relations, il peut être intéressant de discuter ce que pourrait être ce contenu. Une proposition donne une information sur un état de chose. Ainsi 2 + 2 = 4 ou le livre est ouvert sont deux propositions. En logique classique (logique bivalente), une proposition peut prendre uniquement les valeurs vrai ou faux. Une phrase optative (qui exprime un souhait comme Que Dieu nous protège !), une phrase impérative (viens !, tais-toi !) ou une interrogation n'est pas une proposition. Que Dieu nous protège ! ne peut être ni vraie ni fausse : elle exprime uniquement notre souhait. En revanche, une phrase comme Dans ce calcul, toutes les variables informatiques sont strictement positives est une proposition dont le contenu a été modifié par le quantificateur toutes et qui est supposée s'avérer dans la durée. Ce type de proposition est étudié dans la logique modale, plus précisément dans la logique temporelle dans ce cas, à cause de l'affirmation de sa pérennité. On peut distinguer quatre façons de combiner les variables propositionnelles, les parenthèses et les connecteurs comme sur la tableau suivant :

	Nom	Description	Exemple
1	Enoncé mal formé	Non-sens, Ni vrai, Ni faux	$(\vee P) Q$
2	Tautologie	Enoncé toujours vrai	$P \vee \neg P$
3	Contradiction	Enoncé toujours faux	$(P \wedge \neg P)$
4	Enoncé contingent	Enoncé parfois vrai, parfois faux	$(P \vee Q)$

La méthode des tables de vérité permet de déterminer le type d'expression bien formée face auquel on se trouve. Elle n'exige en principe aucune invention, c'est une procédure mécanique. Les procédures axiomatisées, en revanche, ne sont pas entièrement mécaniques.

I.11.3 - Proposition et prédicat

Logique des prédicats (logique d'ordre 1)

- Alphabet :
  - Constantes : A, B, C, D, E, etc.
  - Variables : t, u, v, w, x, y, z, etc.
  - Prédicats : Π, Λ, Γ, etc.
  - Opérateurs logiques : $\neg$, $\rightarrow$, etc.
  - Et des quantificateurs : $\forall$ et $\exists$.
- Formation des mots : (Logique des propositions + des nouveautés)
  - On affecte à chaque prédicat un poids k.
  - $\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ est un mot ssi le poids de Λ est k.
  - $(\forall x_1)\ \Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ est un mot pour lequel x_1 est une variable liée et x_i sont des variables libres.
- Axiomes : (Logique des propositions + des nouveautés) :
  - $(\forall t)\ \Gamma(t) \rightarrow \Gamma(A)$ - c'est une particularisation.
  - $(\forall t)\ (m_1 \rightarrow m_2) \rightarrow (m_1 \rightarrow (\forall t)\ m_2)$ – attention ici t ne doit pas être une variable libre dans m1.
- Règle de dérivation :
  - Si m_1 et $(m_1 \rightarrow m_2) \rightarrow m_2$ (modus ponens).
  - $m_1 \rightarrow (\forall t)\ m_1$ (t est une variable libre dans m_1 – c'est une généralisation).

Si une proposition est une assertion ayant une valeur de vérité, un prédicat est lui une proposition dont la valeur de vérité dépend de variables qu'elle renferme. Le prédicat Mon pays se situe en Afrique sera vrai ou faux en fonction de la valeur de la variable Mon pays. Si le lecteur est algérien, on obtiendra la proposition L'Algérie se situe en Afrique, qui est vraie ; si le lecteur est américain, on obtiendra la proposition Les Etats unis se situe en Afrique qui est fausse.

I.11.4 - Définition d'un système déductif

Un calcul ou un système déductif est, en logique, un ensemble de règles permettant en un nombre fini d'étapes et selon des règles explicites de déterminer si une proposition est vraie. Un tel procédé s'appelle une démonstration. On associe aussi aux propositions une structure mathématique qui permet de garantir que ces raisonnements ou démonstrations ont du sens, on dit qu'on lui a donné une certaine sémantique. En calcul des propositions classique, cette sémantique n'utilise que deux valeurs, vrai et faux (souvent notés 1 et 0). Une proposition entièrement déterminée (c'est-à-dire dont les valeurs des constituants élémentaires sont déterminées) ne prend qu'une seule de ces deux valeurs. À la base de la syntaxe du calcul des propositions sont les variables propositionnelles ou propositions atomiques, notées p, q, etc., qui constituent généralement un ensemble infini dénombrable. Les deuxièmes constituants de base du langage du calcul des propositions sont les opérateurs ou connecteurs. Ce sont des symboles qui permettent de construire des propositions plus élaborées. Les plus courants de ces connecteurs logiques sont sur le tableau suivant :

et	$\wedge$
ou	**v**
non	$\neg$
implique	$\rightarrow$ ou $\Rightarrow$
équivaut	$\leftrightarrow$ ou $\Leftrightarrow$

On considère souvent aussi la constante notée $\perp$, prononcée taquet vers le haut, type vide, qui vise à représenter le faux.

I.11.5 - Les formules propositionnelles

Le calcul des propositions repose de plus sur des règles de formation indiquant comment construire des propositions complexes à partir des propositions élémentaires, ou atomes, que sont les variables propositionnelles, et d'éventuelles constantes comme $\perp$. Ces règles déterminent quels assemblages de signes, quels mots, sont bien formés et désignent des propositions. La définition dépend d'un choix de connecteurs, et d'un choix d'atomes. On se donne un ensemble de variables propositionnelles. L'ensemble des formules du calcul des propositions (sur), ou simplement des propositions, est défini par induction, c'est-à-dire que c'est le plus petit ensemble tel que :

1. une variable propositionnelle p de est une formule ;
2. $\perp$ est une formule ;
3. si P et Q sont des formules, alors $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \leftrightarrow Q)$ et $\neg P$ sont des propositions.

Exemples :

- Si P, Q et R sont des propositions,
- $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ est une proposition.

- $(P \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$ est une proposition.
- $P \wedge \neg P$ est une proposition.
- $(P \wedge Q) \vee R$ est une proposition.
- $P \wedge Q \vee$ n'est pas une proposition.

Quelques concepts et notations logico-mathématiques

N°	Opérateurs ou connecteurs	Mathématiques et logiques	Significations
1	^	conjonction	...et...
2	$\rightarrow$	conditionnel	si...,alors...
3	$\leftrightarrow$	biconditionnel	...si, et seulement si,...
4	$\neg$	négation	il est faux que...
5	$\forall$	quantificateur universel	pour tout...
6	$\exists$	quantificateur existentiel	il existe...
7	$\in$	appartient à	appartient à
8	$\notin$	n'appartient pas à	n'appartient pas à
9	$\subseteq$	inclusion	Inclusion large
10	$\varnothing$	ensemble vide	ensemble vide
11	$\{x \in X: \ldots\}$	l'ensemble des x de X tels que...	l'ensemble des x de X tels que...
12	$\cup$	union	union (de deux (02) ensembles)
13	$\cup_{i \in I}$	union d'ensembles indexés par i	union d'ensembles indexés par i
14	$\cap$	intersection de deux (02) ensembles	intersection de deux (02) ensembles
15	$\cap_{i \in I}$	Intersection d'ensembles indexés par i	intersection d'ensembles indexés par i
16	(x,y)	couple x, y	couple x, y
17	AxB	produit cartésien	produit cartésien
18	$F: A \rightarrow B$	fonction de A vers B	fonction de A vers B
19	N	ensemble des entiers naturels	ensemble des entiers naturels
20	$\sum^{n}_{i=0}$	$\sum^{n}_{i=0} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$	somme généralisée de a_0 à a_n
21	$\prod^{n}_{i=0}$	produit généralisé (de a_0 à a_n) $\prod^{n}_{i=0} a_i = a_0 x a_1 x \ldots x a_n$	produit généralisé (de a_0 à a_n
22	R	ensemble des nombres réels	ensemble des nombres réels

N°	Opérateurs ou connecteurs	Mathématiques et logiques	Significations
23	$\succ$	a $\succ$ b	a est (strictement) préféré à b
24	^	conjonction (a $\succ$ b)∧(b $\succ$ c)	a est préféré à b et b est préféré à c.
25	→	conditionnelle (a $\succ$ b ^ b $\succ$ c) →a $\succ$ c	Si …Alors… si a est préféré à b et b à c, alors a est préféré à c
26	↔	biconditionnelle (b ~c) → (a $\succ$b ↔ a $\succ$c)	.. si, et seulement si,.... s'il y a indifférence entre b et c, alors a est préféré à b si, et seulement si, a est préféré à c
28	¬	négation (a $\succ$ b) →¬(b $\succ$ a)	négation si a est préféré à b, alors b n'est pas préféré à a
29	∀	quantificateur universel ∀x a $\succeq$ x	Tous ou toutes a est préférée (largement) à toute option pour toute option x, a est préférée à x
30	∃	quantificateur existentiel ∃x x $\succeq$ a	Quantificateur existentiel Quelque option est préférée à a Il existe une option x telle que x est préférée à a
31	$\succeq$	a $\succeq$ b	a est (largement) préféré à b
32	~	a ~ b	Indifférence entre a et b
33	|=	((p ∧ ¬q) → r) ∧ ¬r ∧ p |= q	q est une conséquence logique de ((p ∧ ¬q) → r) ∧ ¬r ∧ p
34	{…}	A = {…}	L'ensemble désigné par A est constitué des éléments qui sont entre les deux (02) accolades
35	R	x R y	R est une relation binaire sur A x A (x∈A et y∈A). C'est une relation qui relie des éléments de A à des éléments de B est un sous-ensemble du produit cartésien de A et B
36	f	f :A→B	La relation f entre A et B est une fonction ssi pour tout élément x ∈ A il existe une et une seule paire dans f dont x est le premier élément

I.11.6 - Les systèmes déductifs

Le calcul des propositions permet de présenter les trois systèmes déductifs les plus connus. On se limite pour cela aux propositions contenant, outre les variables propositionnelles, seulement des implications, des disjonctions et des occurrences de faux autrement dit de ⊥. On admet que ¬P est une abréviation de P → ⊥. Si P est un théorème, autrement dit une proposition qui a une démonstration, on note cela par ⊢P. Les systèmes déductifs utilisent des règles de déduction (appelées aussi règles d'inférence) qui s'écrivent :

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n) / \psi$$

Les φ_i sont appelées les prémisses et ψ est appelée la conclusion.

I.11.7 - Déduction à la Hilbert

Il n'y a qu'une seule règle appelée le modus ponens. Elle s'écrit :

$$\frac{\vdash\ (P \rightarrow Q)\ \ \vdash\ P}{\vdash\ Q}$$

Elle peut se comprendre ainsi : si P → Q est un théorème et P est un théorème alors Q est un théorème. À cela, on peut ajouter trois axiomes pour l'implication et le faux :

$$\vdash P \rightarrow (Q \rightarrow P)$$
$$\vdash (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$$
$$\vdash (\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$$

Et trois axiomes pour la disjonction :

$$(P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R))$$
$$P \rightarrow (P \vee Q)$$
$$Q \rightarrow (P \vee Q)$$

I.11.8 - Exemples de théorèmes

On indique ci-dessous une liste de théorèmes qu'on peut démontrer à l'aide des règles précédentes, ainsi que le nom usuel qui leur est attribué par la tradition.

Identité	$(A \rightarrow A)$
Tiers exclu	$A \vee \neg A$
Double négation	$A \leftrightarrow \neg\neg A$
Double négation classique	$\neg\neg A \rightarrow A$
Loi de Peirce	$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
Loi de non Contradiction	$\neg (A \wedge \neg A)$
Lois de Morgan	$\neg (A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
	$\neg (A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
Contraposition	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
Modus ponens (propositionnel)	$((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
Modus tolens (propositionAnel)A v	$((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$
Modus barbara (propositionnel)	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$
Modus barbara (implicatif)	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
Distributivité	$(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
	$(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

I.11.9 - Calcul propositionnel quantifié

On peut introduire les quantificateurs ∃ (il existe) et ∀ (quel que soit) pour quantifier les propositions (ce qui est à distinguer de la quantification du calcul des prédicats). Ainsi pour exemples on aura comme formules valides du calcul propositionnel quantifié, appelé aussi calcul propositionnel du second ordre : $\forall p\ (\bot \rightarrow p)$. Pour toute proposition le faux l'implique $\forall p\ (p \rightarrow T)$. Le vrai est impliqué par toute proposition. $\exists p\ (p \vee q)$. Prendre $p \leftrightarrow \neg q$ (en logique classique) ou $p \leftrightarrow T$ (plus généralement), pour exemples.

I.11.10 - Interprétation des connecteurs

On explicite le comportement, puis donne la table de vérité associée.

P v Q prendra la valeur 1 si et seulement si au moins l'une des deux propositions P ou Q prend la valeur 1.

P	Q	P v Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

P ∧ Q prendra la valeur 1 si et seulement si les deux propositions P et Q prennent simultanément la valeur 1.

P	Q	P ∧ Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

P → Q prendra la valeur 0 si et seulement si P prend la valeur 1et Q prend la valeur 0.

P	Q	P → Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

¬ P prendra la valeur 1 si et seulement si P prend la valeur 0.

P	¬ P
0	1
1	0

P ↔ Q prendra la valeur 1 si seulement si P et Q ont la même valeur.

P	Q	P ↔ Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemple 1

$(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ est une tautologie.

En effet, si on attribue à A la valeur 0 alors $\neg A$ prend la valeur 1, $(\neg A \rightarrow A)$ prend la valeur 0 et $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ prend la valeur 1. De même si on attribue à A la valeur 1 alors $\neg A$ prend la valeur 0, $(\neg A \rightarrow A)$ prend la valeur 1et $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ prend la valeur 1.

Exemple 2

$A \rightarrow (A \rightarrow \neg A)$ n'est pas une tautologie.

En effet, si on attribue à A la valeur 1, alors $\neg A$ prend la valeur 0. $(A \rightarrow \neg A)$ prend la valeur 0, et $A \rightarrow (A \rightarrow \neg A)$ prend la valeur 0.

I.12 - Les systèmes experts

Un système expert est un logiciel qui reproduit le comportement d'un expert humain accomplissant une tâche intellectuelle dans un domaine précis. On peut souligner les points suivants :

- Les systèmes experts sont généralement conçus pour résoudre des problèmes de classification ou de décision (diagnostic médical, prescription thérapeutique, régulation d'échanges boursiers, etc.)
- Les systèmes experts sont des outils de l'Intelligence Artificielle, c'est-à-dire qu'on ne les utilise que lorsqu'aucune méthode algorithmique exacte n'est disponible ou praticable

I.12.1 - Vision globale d'un système expert

La figure I.5 illustre la vision globale d'un système exper.

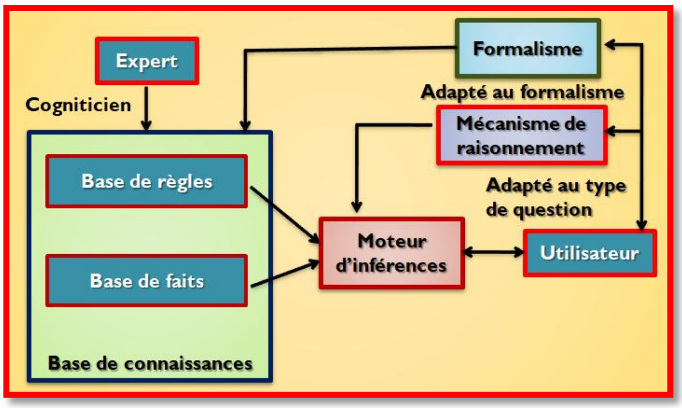


Figure I.5 – Vision global d'un système expert

Des moteurs d'inférences efficaces vont rapidement être développés de façon indépendante. Ils sont alors réutilisables dans les différents systèmes experts. Développer un système expert ne consiste pas à développer un mécanisme d'inférence, mais à représenter les connaissances. La première difficulté est de récupérer la connaissance auprès des experts humains. La deuxième de la représenter sous forme de règle.

Le problème de la circularité :

- SI démarrage impossible ALORS absence d'essence
- SI absence d'essence ALORS démarrage impossible

Le problème de la redondance :

- SI démarrage impossible ALORS absence d'essence
- SI démarrage impossible et batterie neuve ALORS absence d'essence

Le problème de l'incompatibilité :

- SI démarrage impossible ALORS absence d'essence
- SI démarrage impossible et jauge d'essence > 0 ALORS présence d'essence

I.12.2 - Les systèmes experts propositionnels

Une base de connaissances elle-même composée d'une base de règles qui modélise la connaissance du domaine considéré, d'une base de faits qui contient les informations concernant le cas que l'on est en train de traiter et un moteur d'inférence, qui est u module qui implémente des algorithmes capables de raisonner à partir des informations contenues dans la base de connaissances, de faire des déductions, etc.

Un système expert = Base de connaissances + moteur d'inférence.

Note

L'objectif est de résoudre des problèmes. Les données du problème sont les observations (les faits) et on veut expliciter et déduire ce qui est implicite dans les règles ➔ modus ponens.

I.12.3 - Les systèmes experts propositionnels : les règles

Elle rassemble la connaissance et le savoir-faire de l'expert. Elle n'évolue donc pas au cours d'une session de travail. Une règle est de la forme :

<conjonction de formule> → <conclusion>

Où les conclusions sont de la forme

<Fait> = <valeur>.

Exemples

1. si population > 200000 et ville-universitaire alors cinémaArtEtEssai=vrai
2. si revenu-imposable = connu et quotient-familial = connu alors calculerMontantImpot=vrai

Le dernier exemple montre comment un système expert peut être utilisé en association avec des programmes classiques. On peut supposer que le passage à la valeur vrai du fait booléen calculerMontantImpot déclenche une procédure calculant le montant de l'impôt en question et l'attribuant au fait réel MontantImpôt.

La signification Logique est la conjonction de la signification logique de chacune des règles. En particulier, on peut aisément coder dans le formalisme précédent des règles de la forme :

si A ou B alors C

ou

si A alors B et C

Il n'en est pas de même de

si A alors B ou C

Déclenchable : une règle est déclenchable quand la précondition est évaluée à vrai en accord avec l'interprétation donnée dans la base des faits.

I.12.4 - La base des faits

Ce sont en quelque sorte les formules (les faits) dont le contenu (valeur de vérité) est connu par le système (ou l'utilisateur). On peut dire que les faits consistent à attribuer une interprétation qui correspond à une instance du domaine considéré. C'est un espace de travail, modifié par les nouveaux faits déduits par le raisonnement. Toute formule déduite ou prouvée est considérée comme un fait.

I.12.5 - Le moteur d'inférence

Il est essentiellement un raisonnement par règles d'inférence (modus ponens). On désigne par : BR un {} des règles, BF un {} des faits et F un fait à prouver (appelé but). Un moteur d'inférence doit BR U BF |- F ? En utilisant les règles d'inférences.

I.12.6 - Trois algorithmes d'inférence : R U F |= G ?

On distingue essentiellement trois modes principaux de fonctionnement des moteurs d'inférences le chaînage avant, le chaînage arrière et le chaînage mixte.

I.12.7 - Chaînage avant

Pour déduire un fait particulier, on déclenche les règles dont les prémisses sont connues, jusqu'à ce que le fait à déduire soit également connu ou qu'aucune règle ne soit plus déclenchable (comme sur la figure I.6).

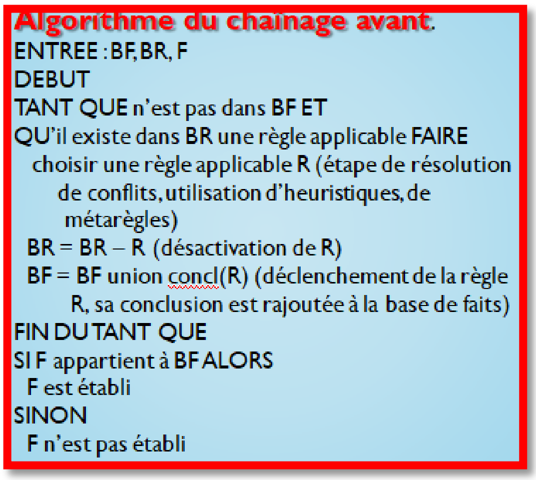


Figure I.6 – Algorithme du chaînage avant

a - Chaînage avant – Exercices

a) fleur ∧ graine → phanérogame

b) phanérogame∧ graine-nue → sapin

c) phanérogame∧ 1-cotylédone → monocotylédone

d) phanérogame ∧ 2-cotylédone → dicotylédone

e) monocotylédone∧ rhizome → muguet

f) dicotylédone → anémone

g) monocotylédone ∧ ¬ rhizome → lilas

h) feuille∧ fleur → cryptogame

i) cryptogame ∧ ¬ racine → mousse

j) cryptogame ∧ racine → fougère

k) ¬ feuille ∧ plante → thallophyte

l) thallophyte ∧ chlorophylle → algue

m) thallophyte∧ ¬ chlorophylle → champignon

n) ¬ feuille∧ ¬ fleur∧ ¬ plante → colibacille

Déterminer la plante ayant les caractéristiques suivantes : rhizome, fleur, graine, 1-cotylédone?

b - Chaînage avant : propriété

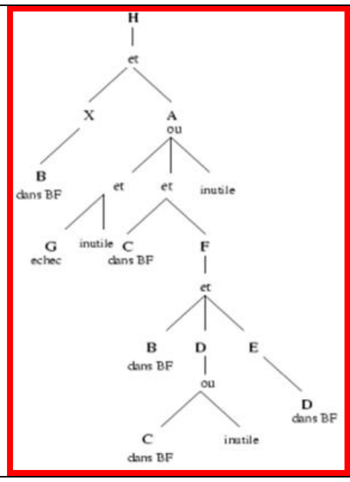
Cet algorithme peut être très pénalisant pour certaines bases. L'algorithme de chaînage avant s'arrête toujours, Si l'on utilise des règles dont les conclusions peuvent être des faits négatifs, pour tout fait F, il peut se produire quatre situations :

1. F ∈BF : le fait est établi.
2. ¬ F ∈ BF : la négation du fait est établie.
3. ni F, ni ¬ F ne sont dans BF : le système ne déduit rien à propos du fait.
    a. C'est une troisième valeur de vérité qui apparaît naturellement et dont l'interprétation peut être diverse selon les cas.
4. F et ¬ F Î BF : la base est incohérente.
    a. On peut prévoir un fait qui rend la base de faits incohérente et une métarègle de la forme : s’il existe un fait qui appartient, ainsi que sa négation, à BF alors on a une base de faits incohérente.

I.12.8 - Chaînage arrière

Le mécanisme de chaînage arrière consiste à partir du fait que l'on souhaite établir, à rechercher toutes les règles qui concluent sur ce fait, à établir la liste des faits qu'il suffit de prouver pour qu'elles puissent se déclencher puis à appliquer récursivement le même mécanisme aux faits contenus dans ces listes. Ces faits deviennent à leur tour des faits à démontrer. La récurssion s'arrête quand le but à établir appartient à la base des faits.

a - Arbre ET-OU

Soit **BF = {B,C}**, **Fait = H** et **BR** composée des règles : 1. **B ∧ D et E → F** 2. **G ∧ D→ A** 3. **C ∧ F → A** 4. **B → X** 5. **D → E** 6. **X ∧ A → H** 7. **C → D** 8. **X ∧ C → A** 9. **X ∧ B → D**	

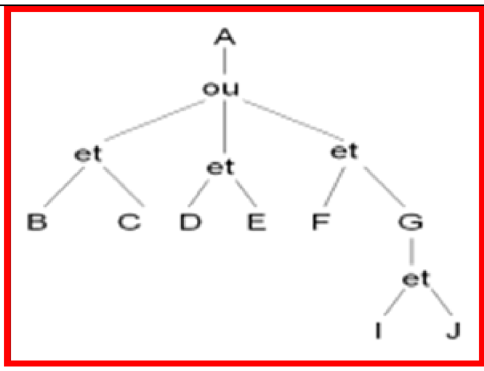
b - Algorithme de chaînage

- Problème de terminaison :
  - S'il n'a pas de mémoire avec deux règles récursives deux faits apparaissant l'un et l'autre dans les préconditions mutuels.
- Avantages du chaînage arrière :
  - Gain en rapidité on déclenche que les règles qui on un rapport de dépendance avec le fait à prouvé;
  - Et constitue une approche intéressante pour définir des systèmes d'interaction puissante avec l'utilisateur.
- Principes : définir des faits comme demandables (voir si on peut demander les valeurs de vérité à l'utilisateur,
- Si on a un fait est à prouver, on régresse ce fait et on favorise les règle où les conditions contiennent le plus de faits demandable ou encore des but avec des faits demandable. Ceci permet de calculer l'ensemble minimal des questions pertinentes pour prouver des faits.

c - Chaînage arrière avec faits demandables

1. B ∧ C → A
2. D ∧ E → A
3. F ∧ G → A
4. I ∧ J → G
5. J → ¬ E

On suppose que les faits B, D, F et I sont les seuls faits demandables. La mémoire de travail est initialisée avec l'information J est vrai. La question posée au système est : A est-il vrai ? Quelles sont les questions pertinentes à poser à l'utilisateur ?

1. $B \wedge C \rightarrow A$ 2. $D \wedge E \rightarrow A$ 3. $F \wedge G \rightarrow A$ 4. $I \wedge J \rightarrow G$ 5. $J \rightarrow \neg E$ B est-il vrai n'est pas un question pertinente.	

Aucune règle ne conclut sur le fait **C** qui n'est pas non plus demandable.

Le fait B ne peut être utilisé que conjointement à C, la valeur de vérité de B n'apportera aucune information sur celle de A. D est-il vrai n'est pas non plus pertinente. En effet, comme on sait que J est vrai, que cela implique que E est faux et que D n'est utilisé que conjointement à E. F est-il vrai est pertinente. En effet, le fait G est encore déductible. Mais si la réponse à cette question est non, I est-il vrai n'est plus pertinente car la valeur de G ne sert plus à rien.