TD Formulation variationnelle

Exercice 1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné à frontière Γ assez régulière, $f \in L^2(\Omega)$, et $q(x) = (q_1(x), \ldots, q_2(x))$ pour $x \in \Omega$ un champ vectoriel de classe $\mathcal{C}^1$ uniformément borné et à divergence nulle sur Ω : $div(q) = 0$ en tout point de Ω. A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution (faible) de

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + q(x).\nabla u(x) = f(x), & pour\ x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & pour\ x \in \Gamma. \end{cases}$$

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$, telle que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Exercice 2. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné à frontière Γ assez régulière, $f \in L^2(\Omega)$, et g la trace sur Γ d'une fonction de $H^1(\Omega)$. Donner une formulation variationnelle de

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & pour\ x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + u(x) = g(x), & pour\ x \in \Gamma. \end{cases}$$

1. Pour montrer que le problème variationnel est bien posé, démontrer d'abord l'inégalité suivante [1]

$$\exists C > 0 : \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Gamma)}\right), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

2. Montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel formulé.

Exercice 3. Soit $f \in L^2(]0, 1[)$. Formuler le problème variationnel, pour lequel on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram, et montrer l'existence et l'unicité de la solution faible de

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & pour\ x \in]0, 1[, \\ u'(0) = u(0),\ u'(1) = -1. \end{cases}$$

Exercice 4. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné à frontière Γ assez régulière, $f \in L^2(\Omega)$. Considérons le problème avec le bilaplacien suivant

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = f(x), & pour\ x \in \Omega, \\ u(x) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0, & pour\ x \in \Gamma. \end{cases}$$

Donner une formulation variationnelle du problème, et montrer l'existence et l'unicité de la solution.[2]

Exercice 5. Soit $f \in L^2(]0, 1[)$. Considérons le problème

$$(P) \qquad \begin{cases} -u''(x) = f(x), & pour\ x \in]0, 1[, \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

1. Déterminer une condition nécessaire sur f, pour que le problème (P) ait une solution. On admettra cette condition dans la suite.
2. Démontrer l'inégalité de Poincaré pour le sous-espace des fonctions à moyenne nulle dans $H^1(\Omega)$.
3. Donner une formulation variationnelle de (P), et montrer que le problème variationnel formulé est bien posé.

[1] Raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Rellich

[2] Indication : $\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme dans $H_0^2(\Omega)$ équivalente à celle de $H^2(\Omega)$.