Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hamma Lakhdar El-Oued

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Introduction à la théorie des opérateurs

Cours et Exercices

Said Beloul

2019-2020

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, on présente quelques éléments de la théorie des opérateurs, définitions, concepts et théorèmes. Ce travail s'adresse principalement aux étudiants de troisième année, ainsi qu'à toute personne s'intéressant à l'analyse fonctionnelle. On décompose en quatres chapitre avec des exercices à la fin de chaque chapitre :

Le premier chapitre : Opérateurs linéaires bornés.

Le deuxième chapitre : Théorème Hahn Banach et applications.

Le troisième chapitre : Opérateurs linéaires bornés sur des espaces de Hilbert.

Le quatrième chapitre : Opérateurs linéaires compacts.

Dans le premier chapitre, on donne quelques définitions concernant un opérateur linéaire, norme d'un opérateur et opérateur inverse avec certains théorèmes fondamentaux, théorème de Banach Steinhaus, théorème de graphe fermé et théorème de l'application ouverte.

Le deuxième chapitre a été reservé au théorème de Hahn Banach et ses applications, on cite ses deux formes, analytique et géométrique.

Pour le troisième chapitre, on présente quelques définitions qui concernent les espaces de Hilbert, ainsi que des opérateurs linéaires bornés définis sur des espace de Hilbert, on donne aussi un aperçu sur la théorie spectrale d'opérateurs.

Dans le dernier chapitre, on fait une étude sur des opérateurs compacts, définitions et théorèmes.

Chapitre 1

Opérateurs linéaires bornés

1.1 Espaces de Banach

1.1.1 Espaces véctoriels normés

Définition 1.1. *Soit E un espace véctoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$). On appelle une norme sur E toute application $N : X \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propiétés suivantes :*

1. *Pour tout $x \in E$, $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;*
2. *Pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;*
3. *Pour tout $x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.*

Le couple (E, N) est appelé un espace vectoriel normé.

Exemple 1.1. 1. *Normes sur $\mathbb{R}^n$. $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $N_2(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$,*
$N_3(x) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i|$.
Il est clair que $N_i, i = 1, 2, 3$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

2. *Normes sur $\ell^p(\mathbb{C})$(espaces des suites).*
Soit $\ell^p(\mathbb{C}) = \{(x_n) \subset \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$, $p \in [p, \infty[$, l'application :

$$x \mapsto \|x\|_{\ell^p} = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \text{ est une norme sur } \ell^p(\mathbb{C}).$$

Définition 1.2. *Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont dites **équivalentes** s'il existe deux constantes α et β strictement posives telles que, pour tout x de E,*

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$$

1.1.2 La convergence et la continuité dans les e.v.n

Définition 1.3. *Soient E un e. v.n et (x_n) une suite dans E. On dit que la suite (x_n) est*

1. *de Cauchy si et seulement si* $\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$*, i.e.,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

2. *convergente vers x si et eulemet si* $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$*, i.e.,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Exemple 1.2. $x_n = \frac{1}{n}$

Définition 1.4. *On dit qu'une fonction definie sur un e. v.n est continue en x_0 si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \|x - x_0\| < \alpha \to \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

1.1.3 Espaces v.n complets

Définition 1.5. *Soit E un espace métrique, on dit que est complet si et seulement si toute de Cauchy dans E est convergent dans E.*

Définition 1.6. *On appelle espace de Banach tout espace véctoriel normé et complet.*

Exemple 1.3. *1. 1* $\mathbb{R}^n$ *où* $\mathbb{C}^n$ *muni de l'une des normes :* $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ *et* $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ *sont des espaces de Banach, pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$.

2. *Soit* $\ell^p(\mathbb{C}) = \{(x_n) \subset \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$ *l'espace des suites dans* $\mathbb{C}$ *muni de la norme* $\|x\|_p = (\sum_{n=0}^{n} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ *est un espace de Banach.*

   $\ell^\infty(\mathbb{C}) = \{(x_n) \subset \mathbb{C}, |x| \leq M\}$ *l'espace des suites bornées dans* $\mathbb{C}$ *muni de la norme*

   $\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |x_n|$ *est un espace de Banach.*

Proposition 1.1. *Soient* $(E_1, \|\|_1), (E_2, \|\|_2)$ *deux espacesde Banach sur le même corp* $\mathbb{K}$*, alors l'espace de produit* $E_1 \times E_2$ *muni de la norme* $\|x\|_{E_1\times E_2} = \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$ *ou* $\|x\|_{E_1\times E_2} = \|x\|_1 + \|x\|_2$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit (x_n, y_n) une suite de Cauchy dans $E_1 \times E_2$, alors pour $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $n, m > n_0$,on a

$$\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_{E_1\times E_2} = \max\{\|x_n - x_m\|_{E_1}, \|y_n - y_m\|_{E_2}\}$$

cequi implique que (x_n) et (y_n) sont de Cauchy dans E_1 et E_2 (resp), alors elles sont convergentes vers x, y (rep), donc

$$\|x_n, y_n) - (x, y)\|_{E_1\times E_2} = \max\{\|x_n - x\|_{E_1}, \|y_n - y\|_{E_2}\} \max\{\varepsilon, \varepsilon'\}$$

Par conséquent, (x_n, y_n) est convergente vers (x, y). ■

1.2 Espace des opérateurs lnéaires bornés

Définition 1.7. *Soient* E *et* F *deux e.v.n sur un corp* $\mathbb{K}$*. On dit q'un opérateur de* E *dans* F *est linéaire si et seulement si*

1. *pour tout* $x, y \in E$, $T(x + y) = T(x) + T(y)$.

2. *pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in E$, $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.*

T est dit additive si pour tout $x, y \in E$, $T(x+y) = T(x) + T(y)$.
T est dit homogène si pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in E$, $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.
T est semi homogène si pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in E$, $T(\alpha x) \leq \alpha T(x)$.

Exemple 1.4. *Soit l'application $T : C([a,b]) \to \mathbb{R}$, définie par $Tx(t) = \int_0^b x(t)dt$. T linéaire.*

On note par $L(E,F)$ l'espace d'opérateurs linéaires de E dans F.

Définition 1.8. *Soit T un opérateur linéaire sur E, on dit que T est borné (ou continue) si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que $\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E$, pour tout $x \in E$.*

Théorème 1.1. *T est continue si et seulement si T est borné.*

Démonstration. Supposons T est continue et n'est pas borné. Alors pour tout $M > 0$ il existe x_M tel que

$$\|Tx_M\| > M\|x_M\|$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe unesuite (x_n) dans E telle que

$$\|Tx_n\| > n\|x_n\|.$$

Posons $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$, il est clair $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, puisque T est continue, on obtient $\|Tx_n\| \to \infty$, et donc

$$\|Ty_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|x_n\| \to 0.$$

Mais

$$\|Ty_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|x_n\| \geq \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1,$$

ce qui est une contradiction.

Réciproquement, si T est borné, soit (x_n) une suite dans E converge vers x. Alors,

$$\|T(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \to \infty$$

ce qui implique $Tx_n \to Tx$. Donc, T est continue. ■ On note par $\mathcal{L}(E, F)$ à l'espace d'opérateurs linéaires bornés (continues).

Théorème 1.2. *Pour tout opérateur linéaire $T \in L(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est borné.*
2. *T est continu sur l'espace E.*
3. *T est continu en un point* 0 *de l'espace E.*

Démonstration. (1) ⇒ (2)

Soit x_0 vecteur quelconque de H et (x_n) une suite dans H. Comme

$$\|Tx_n - Tx_0\| = \|T(x_n - x_0)\| \leq \|T\|\|x_n - x_0\|,$$

on a donc $Tx_n \to Tx_0$ quand $x_n \to x_0$, d'où la continuité de S.

L'implication (2) ⇒ (3) est claire.

(3) ⇒ (1)

Soit T un opérateur linéaire sur E, continu en $x_0 \in E$, supposons le contraire, (soit non borné). Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un vecteur non nul $x_n \in H$ tel que $\|Tx_n\| \geq n\|x_n\|$. Si on pose $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$, alors $\|y_n\| = \frac{1}{n}$.

Or $y_n \to 0$, donc $y_n + x_0 \to x_0$, mais

$$\|T(y_n + x_0) - Tx_0\| = \|Ty_n\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1,$$

donc T n'est pas continu en x_0 d'où la contradiction, et par conséquent T est borné. ■

Théorème 1.3. *Si T un opérateur additive et continu sur une espace v.n, alors il est hmogène.*

Démonstration. 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$T(nx) = T(\sum_{1}^{n} x) = nTx.$$

2. Pour $n = 0$, on a

$$T(x + 0) = Tx = Tx + T0 \to T0 = 0.$$

3. Pour $n \in \mathbb{Q}$, on a

$$T(\frac{m}{n}x) = mT(\frac{x}{n}$$

Posons $y = \frac{x}{n}$, alors

$$Tx = T(ny) = nTy \to T(\frac{x}{n} = \frac{1}{n}Tx$$

$$\to T(\frac{m}{n}x) = \frac{m}{n}Tx.$$

4. Pour λ irationnelle, alors il existe une suite $(\lambda_n \subset \mathbb{Q}$ telle que $\lambda_n \to \lambda$, car $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Alors

$$T(x\lambda_n) \to T(x\lambda,$$

d'autre part, on a

$$T(x\lambda_n) = \lambda_n Tx \to \lambda Tx$$

Donc $T(\lambda x)\lambda Tx$.

$\blacksquare$

1.2.1 Norme d'un opérateur

Définition 1.9. *Soint E, F deux espaces v.net $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle norme de T le plus petit nombre strictement positif cqui vérifie $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$. C(est à dire*

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = \inf\{M > 0, \|Tx\|_F \leq \|x\|_E\}.$$

Proposition 1.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors on a*

1. $\forall x \in E, \|Tx\|_F \leq \|T\|_{\mathcal{L}}\|x\|_E$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E, \|Tx_\varepsilon\|_F \geq (\|T\|_{\mathcal{L}} - \varepsilon)\|x\|_E$
3. $\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|_F$, $\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|}$

Démonstration. 1. Si $\|T\| = M_0$, alors on a $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M_0$, donc

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$$

2. Soit $M_0 = \sup \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$, alors par la définition de la supermum, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x_\varepsilon \in E$, tel que

$$\frac{\|Tx_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} \geq M_0 - \varepsilon$$

$$\rightarrow \|Tx_\varepsilon\| \geq (M_0 - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|.$$

3. Si $\|x\| \leq 1$, utilisant la propriété (1) on a

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \leq \|T\|$$

$$\rightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq \|T\|. \tag{1.1}$$

Posons $y_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}$, alors on a

$$\|Ty_\varepsilon\| = \frac{1}{\|x_\varepsilon\|}\|Tx_\varepsilon\| \geq \frac{1}{\|x_\varepsilon\|}(\|T\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$$

$$\rightarrow \|Ty_\varepsilon\| \geq \|T\| - \varepsilon$$

$$\rightarrow \|T\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \tag{1.2}$$

Par conséquent, de (1.1) et (1.2), on arrive au résultat desiré.

■

Exemple 1.5. *Soit $T : C([a,b],\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definie par $Tx(t) = \int_a^b x(t)dt$.*

$$\|Tx\| \leq (b-a)\|x\|$$

$$\rightarrow \|T\| \leq (b-a).$$

Soit x_0 une fonction de $C([a,b])$ définie pour tout $t \in (a,b]$ par $x_0(t) = 2$, alors on a

$$\|Tx_0\| = 2(b-a) \rightarrow \frac{\|Tx_0\|}{x_0} = (b-a) \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|$$

Donc $\|T\| = b-a$.

1.3 Prologement d'un opérateur par continuité

Soit E un e.v.n et soit $T : D \subset E \rightarrow E$, où D est sous espace vectoriel de E. On dit T est borné sur D si il existe $M > 0$, tel que pour tout $x \in D$, on a $\|Tx\| M\|x\|$. Le plus petit $M > 0$ qui verifie l'inégalité précédente est dit la norme de T, on note par $\|T\|_D$.

Théorème 1.4. *Soient E un espace de Banach, D un sous espace de E tel que $\overline{D} = E$ et $T : D \subset E \rightarrow E$. Alors T admet un prolongement à E tout entier.*

Démonstration. On définit un opérateur $\tilde{T}$ sur E par

$$Tx = \begin{cases} \tilde{T}x = Tx, & \forall x \in D, \\ \|\tilde{T}\|_E = \|T\|_D \end{cases}$$

Soit $x \in E$, puisque D est danse dans E, alors il existe une suite $(x_n) \subset D$, telle que $x_n \to x$. Donc elle est de Cauchy, c'est à dire $\|x_n - x_m\| \to 0$, quand $n, m \to 0$, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0, \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Donc pour $n, m > n_0$, on a

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\|_D \|x_n - x_m\| \to 0$$

Ce qui implique que (Tx_n) est une suite de Cauchy dans E qui est complet, alors (Tx_n) est convergente dans E.
Par coséquent, $Tx_n \to \tilde{T}x$. C'est à dire si $x \in E/D$, alors l'image de x par T est une limite d'une suite de D. L'unicité de $\tilde{T}$
Si (y_n) une suite dans D qui converge vers x. Alors on a

$$\|x_n - y_n\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - x\|$$

$$\to \|Tx_n - Ty_n\| = \|T(x_n - y_n)\| \leq M\|x_n - y_n\| \to 0.$$

Donc $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \tilde{T}x$.
$\tilde{T}$ est linéaire
Pour $x_1, x_2 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$\tilde{T}(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} T(x_n^{(1)} + x_n^{(2)}) = \tilde{T}x_1 + \tilde{T}x_2$$

$$\tilde{T}(\alpha x_1) = \lim_{n\to\infty} T(\alpha x_n^{(1)}) = \alpha\tilde{T}x.$$

$\tilde{T}$ est borné

$$\|\tilde{T}x\| = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\| \leq \|T\|_D \|x\|$$

$$\to \|\tilde{T}x\| \leq \|T\|_D \|x\|$$

$$\to \|\tilde{T}\| \leq \|T\|_D$$

Par ailleurs,

$$\|\tilde{T}\| = \sup_{x\in E} \frac{\|\tilde{T}x\|}{\|x\|} \geq \sup_{x\in D} \frac{\|\tilde{T}x\|}{\|x\|} = \|T\|_D$$

Donc $\|\tilde{T}\|_E = \|T\|_D$. ∎

1.4 La convergence dans l'espace d'opérateurs linéaires

Proposition 1.3. *Soient E, F et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. L'espace $\mathcal{L}(E,F)$ est espace véctoriel normé.*

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace véctoriel.

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = 0 \leftrightarrow \sup_{x\in E} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = 0$$

$$\Leftrightarrow T = 0$$

$$\|\alpha T\|_{\mathcal{L}} = \alpha \sup_{x\in E} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \alpha \|T\|_{\mathcal{L}}.$$

$$\|S+T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{x\in E} \frac{\|(S+T)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\in E} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} + \sup_{x\in E} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Donc $\|.\|_{\mathcal{L}}$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$. ∎

1.4.1 La convergence simple

Soient E, F et $T_n, T \in \mathcal{L}(E,F)$. On dit que la suite (T_n) converge simplement vers T si et seulement si pour tout $x \in E, T_n x \to Tx$ et on note par $T_n \overset{s}{\longrightarrow} T$.

On écrit $T_n \to T \Leftrightarrow \forall x \in E, T_n x \to Tx$.

D'autre manière

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \|Tx_n - Tx\|_F < \varepsilon.$$

Exemple 1.6.

$$T_n : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C}), T_n x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0...\}$$

Montrons que $T_n \to I_{\ell^2}$?.

Premièrement, on va voir $T_n \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{C}))$.

En effet pour $x \in \ell^2$, *on a*

$$\|T_n x\| = (\sum_{k=1=1}^{n} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq (\sum_{k=1=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{\ell^2}$$
$$\to \|T_n x\|_{\mathcal{L}} \leq 1$$

Pour $z = (1, 0, 0, ...)$ *on a* $T_n z = z$, *donc* $\|T_n z\| = 1 \leq \sup x \in \ell^2 \|T_n x\| = \|T_n\|$.

Pour tout $x \in \ell^2$, *on a*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x - I_{\ell^2} x\| = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=n+1=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\lim_{n\to\infty} (R_n)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Donc $\lim_{n\to\infty} T_n = I_{\ell^2}$.

1.4.2 La convergence uniforme

Soient E, F et $T_n, T \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que la suite (T_n) est uniformément convergente vers T si et seulement si

pour tout $x \in E, \lim_{n\to\infty} \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n x - Tx\|_F = 0$.

On écrit $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n - T\|_{\mathcal{L}} = 0$. On note par $T_n \overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow} T$.

1.4.3 La convergence faible

Définition 1.10. *Soit E un e.v.n sur un corp $\mathbb{K}$. On appelle espace dual de E, l'espace E^* des formes linéaires continues de E dans $\mathbb{K}$.*

Le dual algèbrique est strictement inclus dans le dual topologique.
On dit qu'une suite (x_n) dans E est faiblement convergente vers x si et seulement si pour tout $f \in E^*$ fx_n converge vers fx.
Une suite d'opérateurs (T_n) est faiblement convergente vers T siet seulement si

$$f(T_n x) \to f(Tx), \quad \forall x \in E, \forall f \in E^*.$$

On note par $T_n \xrightarrow{w} T$.

Théorème 1.5. *Si (T_n) une suite d'opérateuts d'un espace v.n E dans F. Alors on a*

$$T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T \Rightarrow T_n \xrightarrow{s} T$$

$$\xrightarrow{s} T \Rightarrow T_n \xrightarrow{w} T.$$

Démonstration. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|T_n x - T_x\|_F = \|(T_n - T)\| \leq \|T_n - T\| \|x\|_E \to 0$$

Pour tout $x \in E$ et $f \in F^*$, on a

$$|f(T_n x) - f(Tx)| = |f(T_n x - Tx)| \leq |f| \|T_n x - Tx\| \to 0.$$

■

1.5 Théorème de Banach Steinhaus

Définition 1.11. *On dit q'une suite $T_n \in \mathcal{L}(E,F)$ est uniformémént bornée si elle est est bornée pour la norme $\|.\|_{\mathcal{L}}$. C'est à dire*

$$\exists M>0, \forall n \in \mathbb{N}, \|T_n\|_{\mathcal{L}} \leq M.$$

Ce qui est équivalente à

$$\exists M>0, \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\|x\|=1} \|T_n x\|_{\mathcal{L}} \leq M.$$

(T_n) est dite bornée(ou ponctuelement bornée) si et seulement si pour tout $x \in E$, elle est convergente pour la norme $\|.\|_F$. C'est à dire

$$\forall x \in E, \exists M>0, \forall n \in \mathbb{N}, \|T_n x\|_F \leq M.$$

Exemple 1.7. *1.* $T_n : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C}), T_n x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0...\}$.

On a dèja vu $\|T_n\|_{\mathcal{L}} \leq 1$. Donc (T_n) est uniformémént bornée.

2. $T_n : \ell^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, T_n x = n x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$.

$$\begin{aligned} \|T_n x\| \leq n|x_1| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} &\leq n|x_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq (n+1) \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \\ &= (n+1)\|x\| \end{aligned}$$

$$\to \|T_n\| \leq (n+1).$$

Soit $z=(1,0,0,...)$, il est clair que $z \in \ell^1$ et $)\|z\|=1$ et $)\|T_n z\| = (n+1)$.

Donc $\|T_n\| = (n+1) \to \infty$, alors la bornetude n'est pas uniforme.

Théorème 1.6. *Soient E un espace de Banach et F un e.v.n et $T_n \in \mathcal{L}(E,F)$. Si la suite (Tn) est ponctuelement bornée, alors elle esr unformémént bornée. C'est à dire*

$$\forall x \in E, \sup_{n \geq 0} \|T_n x\|_F < \infty \to \sup_{n \geq 0} \|T_n\|_{\mathcal{L}} < \infty.$$

1.6 Théorème de graphe fermé

Définition 1.12. *Soint E et F deuxespacesde Banach et soit $T : D \subset E \to F$. Onappelle graophe de T les sous espace de $E \times F$ défini par*

$$G(T) = \{(x, Tx), x \in D\}$$

Proposition 1.4. *Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors G est fermé.*

Démonstration. Soit $(x_n, y_n) \to (x, y)$, alors $x_n \to x$, par continuité de T il devient $Tx_n \to Tx$, mais $y_n = Tx_n \to y$, donc $y = Tx$ et G est fermé. ■

Théorème 1.7. *Soint E, F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$. Si G est fermé alors T est continue.*

Démonstration. Puisque G est fermé, alors il est complet, donc de Banach.
Soit $P_E : G \to E, P_E(x, Tx) = x$ la projection sur E. P_E est linéaire et continue, car

$$\|P_E(x, Tx)\| = \|x\| \leq \max\{\|x\|_E, \|Tx\|_F\} = \|(x, Tx)\|_G.$$

De même manière on defini la projection sur F.

$$P_F : G \to E, P_F(x, Tx) = Tx,$$

la projection sur F. P_F est linéaire et continue, car

$$\|P_F(x, Tx)\| = \|Tx\| \leq \max\{\|x\|_E, \|Tx\|_F\} = \|(x, Tx)\|_G.$$

Donc $T = P_E \circ P_F \in \mathcal{L}(E, F)$. ■

Théorème 1.8. *(Isomorphisme de Banach)*
Soint E, F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si T est bijective, alors il existe un opérateur linéaireet continue T^{-1} de F dans E.

Théorème 1.9. *(Théorème de l'application ouverte)*

Soint E, F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si T est surjective alors T est ouvert.

1.7 Opérateurs inversibles

Proposition 1.5. *Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, H)$,alors $T \in \mathcal{L}(E, H)$ et $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.*

Démonstration. Pour tout $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$ST(\alpha x + y) = S(T(\alpha x + y)) = S(\alpha Tx + Ty)$$

$$= \alpha STx + STy.$$

Donc ST est linéaire. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|STx\| \leq \|S\|\|Tx\|$$

$$\leq \|S\|\|T\|\|x\|$$

Alors $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$ ■

Définition 1.13. *Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$, où Eet F sont des espaces v.n. On dit que T est inversible si et seulement s'il existe $S \in \mathcal{L}(F, E)$, tel que $\forall x \in E, STx = x$ et $\forall y \in F, TSy = y$. On note à l'inverse de T par T^{-1}.*

Théorème 1.10. *Sient E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. Si $\|T\| \leq 1$, alors $(I - T)$ est inversible, de plus $(I - T)^{-1}$ est borné et on a*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n = I + T + T^2 + \ldots$$

Démonstration. On a $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=0}^{k} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{k} \|T\|^n$.

$$\|T\| \leq 1 \to \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|} < \infty$$

$$\to \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{L}(E).$$

$$\|(I-T)\sum_{n=0}^{k} T^n - I\| = \|\sum_{n=0}^{k} \|T^n - \sum_{n=1}^{k} T^n - I\|$$
$$= \|I - T^{k+1} - I\| = \|T^{k+1}\| \leq \|T\|^{k+1}$$

Passant à la limite on obtient

$$\lim_{k\to\infty} \|(I-T)\sum_{n=0}^{k} T^n - I\| \leq \lim_{k\to\infty} \|T\|^{k+1} = 0$$

$$\to (I-T)\sum_{n=0}^{\infty} T^n = I \to (I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

■

Théorème 1.11. *Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$, si Test inversible alors T^{-1} est unique. De plus, si $S \in \mathcal{L}(,F,H)$ et inversible, alors ST est inversible et on a $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.*

Démonstration. Si U et V sont deux inverses à T, on a

$$U = UI = U(TV) = (UT)V$$

$$= IV = V.$$

Si T et S sont inversibles, alors on a

$$(T^{-1}S^{-1})(ST) = T^{-1}(S^{-1}S)T = T^{-1} = I$$

$$(ST)(T^{-1}S^{-1}) = S(TT^{-1})S^{-1} = SS^{-1} = I.$$

■

Définition 1.14. *On dit qu'un opérateur est inversible à droite (gauche) s'il existe S_1 (S_2) tel que $TS_1 = I$ ($S_2T = I$).*

Théorème 1.12. *SOient E, F et T . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est invesible à gauche.*
2. *F est injectif et $Im(T) = R(T)$ est fermée.*
3. *Il existe $c > 0$, tel que pour tout $x \in E, \|Tx\| \geq c\|x\|$.*

Démonstration.

1. Supposons $T \in \mathcal{L}(E)$ est inversible à gauche, alors pour tout $x_1, x_2 \in E$, ona

$$Tx_1 = Tx_2 \rightarrow T^{-1}Tx_1 = T^{-1}Tx_1$$

$$\rightarrow x_1 = x_2.$$

Soit (x_n une suite dans E, telle que $x_n \rightarrow x$, alors $(Tx_n) \in R(T)$ et puisque $T \in \mathcal{L}(E)$, il devient $Tx_n \rightarrow Tx$ ce qui implique $Tx \in R(T)$.

2. Comme E et F sont de Banach, alors l'opérateur $\tilde{T} : E \rightarrow T(E)$ est bijevtive, donc par le théorème d'isomorphisme de Banach il existe T^{-1} continue de $T(E)$ dans E, cest à dire

$$\exists c > 0, \|x\| \geq c\|Tx\|.$$

3. T est injectif, car si $Tx = 0 \rightarrow x = 0$, donc $KerT = \{0\}$. De plus, $R(T)$ est fermé, ce qui implique la bijectivité de T. Donc il admet un inverse T^{-1}.

■

1.8 Exercices

Exercice 01 : Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour tout $a, b \geq 0$ on a

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + +\frac{1}{q}b^q.\text{Inégalité de Young}$$

(Ind : remarquer que pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tout $x, y > 0, \ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \ln x + (1-\lambda)\ln y$).)

2. Pour $x = (x_1, x_2, ...x_n), y = (y_1, y_2, ...y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_p = (\sum i = 1^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad \|y\|_q = (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p|}\Big)^{\frac{1}{p}}.\Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{q|}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

3. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p|}\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{q|}\Big)^{\frac{1}{q}}$$

Exercice 02 : Soit E un espace vectoriel muni de deux normes qui sont équivalentes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. Montrer si E est de Banach pour la norme $\|.\|_1$, alors il est aussi pour $\|.\|_2$.

Exercice 03 : Soit $E = C^1([-1,1], \mathbb{C})$

1. On muni E de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{-1\leq x\leq 1} |f(x)|$. Montrer que $(E, \|.\|)$ n'est pas de Banach. (Utiliser la suite $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$).

2. On muni E de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer si $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach.

Exercice 04 : Soient $E = C_b(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme. On considère l'opérateur linéaire de E dans lui meme défini par $(Tf)(x) = 3f(x) - 2f(x+4)$

1. Montrer que T est continue et calculer $\|T\|_{\mathfrak{l}}$.
2. Même question pour $S : \mathcal{C}_0 \to \mathbb{R}$ tel que $S(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$.

Exercice 05 : Soient $(\alpha_n) \in \ell^{\infty}(\mathbb{C})$ et $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$, tels que $T(x_n) = (\alpha_n x_n)$

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{C}), \ell^2(\mathbb{C}))$.
2. Calculer $\|T\|_{\mathcal{L}}$.

Exercice 06 : Soient $(a_i), (x_i)$ deux suites de $\ell^2(\mathbb{C})$ et l'opérateur T_n de $\ell^2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, tels que $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$.

1. Montrer que $T_n \in (\ell^2)^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $\|T_n\|_{(\ell^2)^*} = (\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.
3. Soit $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, tel que $Tx = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$
   - Montrer que $T \in (\ell^2)^*$ et $\|T\|_{(\ell^2)^*} = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.
   - Montrer que (T_n) converge ponctuelement vers T dans $(\ell^2)^*$.

Exercice 07 : Soient (a_i) une suite des nombres complexes, $(x_i) \in \ell^2$, tels que la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ sera convegente dans $\mathbb{C}$ et $T_n : \ell^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ tel que $T_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

1. Montrer que (T_n) est bornée ponctulement.
2. En utilisant le théorème de Banach Steinhaus, montrer que $a_i \in \ell^2(\mathbb{C})$.

Chapitre 2

Théorème de Hahn Banach et applications

2.1 Forme analytique de théorème de Hahn Banach

Définition 2.1. *On appelle un sous norme sur un ensemble E toute application $p : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall \lambda \geq 0$ *;*
2. *Pour tout* $x, y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *;*

Toute norme sur E est une sous norme.

Lemme 2.1. *Tout ensemble ordonné inductif, non vide, possède un élément maximal.*

Rappelons que l'ordre est inductif si toute partie totalement ordonnée possède un majorant.

2.1.1 Théorème de Hahn Banach réel

Théorème 2.1. *(Théorème de Hahn Banach réel)*

Soient E un espace véctoriel réel, G un sous espace de E, p une sous norme sur E et $f \in G^*$, tels que

$$\forall x \in G, f(x) \leq p(x).$$

Alors il existe $\tilde{f} \in E^*$ telque

$$\forall x \in G, \tilde{f}(x) = f(x);$$

$$\forall x \in E, \tilde{f}(x) \leq p(x).$$

Démonstration. Supposons $G \neq E$, alors il existe $x \in E/G$, pour x_0 on definit G_1 le sous espace de E comme suit :

$$G1 = \{tx + x_0, x0 \in G, t \in \mathbb{R}\}.$$

On va montrer l'existence d'une extension f_1 à f sur G_1.
Pour $t \in G_1$, posons

$$f_1(y) = f_1(tx + x_0) = tf_1(x) + f_1(x_0) = tc + f(x_0),$$

tel que $f_1(x) = c$ une constante que l'on choisit d'une manière tel que

$$f_1(tx + x_0) = p(tx + x_0), \tag{2.1}$$

i.e., $\forall y \in G_1, f_1(y) \leq P(y)$. Par définition, f_1 est linéaire et vérifie

$$\forall x \in G, f_1(x) = f(x),$$

on montre l'inégalité (2.1), dans le cas $t > 0$ l'inégalité (2.1)est équivalente à

$$f_1(x + \frac{x_0}{t}) \leq p(x + \frac{x_0}{t}),$$

puisque f_1 est linéaire et $\frac{x_0}{t} \in G$, alors l'inégalité précédente est équivalenteà la suivante :

$$c + f(\frac{x_0}{t}) \leq p(x + \frac{x_0}{t}),$$

i.e.,

$$p(x + \frac{x_0}{t}) - f(\frac{x_0}{t}) \geq c. \tag{2.2}$$

Si $t < 0$, l'inégalité (2.1) est équivalente à

$$f_1(x + \frac{x_0}{t}) \leq p(x + \frac{x_0}{t}),$$

ce implique l'inégalité suivante :

$$-p(-x - \frac{x_0}{t}) - f(\frac{x_0}{t}) \leq c. \tag{2.3}$$

Donc, pour arriver au résultat desiré il suffit de montrer l'existence de c qui vérifie (2.2)et (2.3). Pour $x', x'' \in G$, on a

$$f(x'') - f(x') \leq p(x'' - x') = p\Big((x'' + x') - (x' + x)\Big) \leq p(x'' + x) + p(-x' - x),$$

c'est à dire

$$-f(x'') + p(x'' + x) \geq -f(x') + p(x' + x).$$

Posons

$$c' = \sup_{x' \in G}(-f(x') - p(x' - x)), \quad c'' = \sup_{x'' \in G}(-f(x'') - p(x'' + x)),$$

c' et c'' existent et $c' \leq c''$), de plus f_1 définie par $f_1(tx + x_0) = tc + f(x_0)$ est une forme linéaire sur G_1' et est une extension à f sur G_1' vérifie

$$f_1(tx + x_0) \leq p(tx + x_0),$$

alors $\forall y \in G_1, f_1(y) \leq p(y)$.

Maintenant pour démontrer le théorème on a deux cas :

1. Il existe un ensemble dénombrable engendre l'espace E, c'est à dire $E = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$, alors il existe une extension f_1 à f sur G_1 et f$_2$ à f_1 sur G_2...etc. Par récurence on arrive à f_n une exentension à f sur G_n et vérifie

$$\in G_n, f_n(y) \leq p(y),$$

puisque $E = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$, alors il existe une extension f^* à f sur E vérifie

$$\forall x \in E, f^*(x) \leq p(x).$$

2. Dans le cas général on note par A_{G_n} à toutes les extensions possibles g de f vérifient :

$$\forall x \in E, g(x) \leq p(x).$$

On définit sur A_{G_n} une relation $\prec$, pour tout $f_1, f_2 \in A_{G_n}$ par

f$_1 \prec f_2 \Leftrightarrow \begin{cases} G_1 \subset G_2, \\ \forall x \in G, f_1(x) = f_2(x) \end{cases}$ $Larelation \prec$ est une relation d'ordre partiel, soit $(f_i)_{i \in I}$ un ensemble ordonné de A_{G_n}, il est clair que f' définie sur $G' = \cup_{i \in I} G_i$, G_i l'ensemble de définiton de f_i et vérifie

$$\forall x \in G_i, f'(x) = f_i(x), i \in I$$

appartient à A_{G_n} et est un élément majoré de (f_i). D'après le lemmede Zorn l'esemble $'f_i)$ a un émément maximal f^* dans A_{G_n}.

On va démontrer que f' est l'extension desirée dans le théorème, pour cela il suffit de montrer que f^* est définie sur E tot entier. Par l'absurde, sopposons f$^{*\prime}$ n'est pas définie sur E tout entier, alors il existe une extension à f^* et ça est une contradicton que f^* est un élément maximal.

Par conséquent, il existe une forme linéaire f^* définie sur E et vérifie :

$$\begin{cases} \forall x \in G, f^*(x) = f(x), \\ \forall x \in E, f^*(x) \leq p(x) \end{cases}$$

■

Théorème 2.2. *Soient E un espace vectoriel réel, G un sous espace de E et f une forme linéaire définie sur G. Alors, f admet une extension $\tilde{f}$ sur E tout entier avec $\|\tilde{f}\|_{E^*} = \|f\|_{G^*}$.*

Démonstration. Il suffit de prendre $p(x) = \|f\|_G\|x\|$ et appliquer le théorème de Hahn Banach. ■

Corollaire 2.1. *Soit E un e.v.n, pour tout $x \neq 0$ de E il existe $f \in E^*$, tel que $f(x) = \|x\|$ et $\|f\| = 1$.*

Démonstration. Il suffit de prendre $G = \mathbb{K}x$ et $f(\lambda x) = \lambda\|x\|$.
Alors soit $G = \{tx_0, t \in \mathbb{R}\}$. On definit la forme linéaire $f(x) = f(tx_0) = t\|x_0\|$.
Il est clair que $f(x_0) = \|x_0\|$ et

$$\|f(x)\| = |t|\|x_0\| = \|tx_0\| = \|x\|$$

$$\to \|f\|_G = 1.$$

■

Corollaire 2.2. *Soit E un e.v.n, pour tout $x \in E$ et $f \in E^*$, on a*

$$\|x\| = \sup_{\|f\|\leq 1} |fx| = \max_{\|f\|\leq 1} |fx|.$$

Démonstration. On a

$$\sup_{\|f\|\leq 1} |fx| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\|.$$

Par ailleurs, il exite f_0 vérifie $f_0(x) = \|x\|$ et $\|f_0\| = 1$. Posons $f = \frac{1}{\|x\|} f_0(x)$, on obtient

$$\sup_{\|f\|\leq 1} |fx| \leq \sup_{\|f\|\leq 1} \frac{f_0(x)}{\|x\|} \leq 1$$
$$\to \|f\|.$$

■

Corollaire 2.3. *Pour tout $f \in E^*$, $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

Démonstration. Si $x = 0$, il est clair que $f(x) = 0$.
Si $f(x) = 0$, alors pour tout $f \in \overline{B}(0,1) \subset E^*$, on a

$$\|f(x)\| = 0 \to \sup \|f(x)\| = \|x\| = 0.$$

■

2.1.2 Théorème de Hahn Banach complexe

Théorème 2.3. *Soient E un e.v complexe, G un sousespace de E et p une fonctions définie sur E vérifie les conditionssuivantes :*

1. $\forall x \in E, p(x) \geq 0$;
2. $\forall x, y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$;
3. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

Si f est une forme linéaire complexe sur G, tel que pour tout $x \in G, f(x) \leq p(x)$, alors il existe une forme linéaire complexe $\tilde{f}$ vérifie $\forall x \in G, \tilde{f}(x) = f(x)$ et $\forall x \in E, |\tilde{f}(x)| \leq p(x)$.

Démonstration. D'après l'hypothèse on a :

$$f(x) = g(x) + ih(x),$$

oùg et h sontdes formes linéaires réelles. D'autre part pour tout $x \in G$, on a

et

$$f(x) = g(ix) + ih(x) = ig(x) - h(x)$$

$$= if(x)$$

Donc, pour tout $x \in G$, on a $h(x) = -g(ix)$.

D'après le théorème de Hahn Banach réel, il existe une extension $\tilde{g}$ à g sur E vérifie

$$\forall x \in G, \tilde{g}(x)(x)$$

$$\Rightarrow -\tilde{g}(x) = \tilde{g}(-x)(-x) = p(x)$$

$$\Rightarrow |\tilde{g}(x)|(x)$$

Difinissons $\tilde{f}$comme suit

$$\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) - i\tilde{ig}$$

mais

$$\tilde{f}(ix) = \tilde{g}(ix) - i\tilde{g}(-x)$$

$$= \tilde{g}(ix) + i\tilde{g}(x) = i\tilde{f}(x).$$

Alors,$\tilde{f}$ est une forme linéaire complexe. Pour tout $x \in G$, on a

$$\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) - i\tilde{g}(ix) = g(x) - ig(ix)$$

$$= g(x) + ih(x) = f(x).$$

Donc $\tilde{f}$ est une prolongement à f. Maintenant, on va montrer que :

$$\forall x \in E, |\tilde{f}(x)| \leq p(x).$$

En effet, utilisant la formule expontielle d'un nombre complexe, on obtient

$$\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) - i\tilde{g}(ix) = re^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow |\tilde{f}(x)| = r = e^{i\theta}\tilde{f}(x) = \tilde{f}(xe^{i\theta}).$$

La dernière valeur est réelle positive, on a aussi

$$\tilde{f}(xe^{i\theta}) = \tilde{g}(xe^{i\theta}) - i\tilde{f}(xe^{i\theta})$$

$$\Rightarrow |\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(xe^{i\theta}) = |\tilde{g}(xe^{i\theta})|$$

$$\Rightarrow |\tilde{f}(x)| = |\tilde{g}(xe^{i\theta})| \leq p(xe^{i\theta} = e^{i\theta}p(x).$$

Par conséquent, $\forall x \in E, |\tilde{f}(x)| \leq p(x)$. ■

2.2 Forme géométrique de théorème de Hahn Banach

Théorème 2.4. *Soit E un espace vectoriel normé. Soit C et G deux parties non vides de E disjointes et telles que C soit convexe et fermée, et G soit convexe et compacte. Alors, il existe une forme linéaire continue $\varphi \in E^*$ telle que :*

$$\sup_{x\in C} Re\varphi(x) < \inf_{y\in G} Re\varphi(y).$$

2.3 Exercices

Exercice01 : Soit Soit E, F deux espaces de Banach, et $T : E \to F$ linéaire.

Montrer que T est coninue si et seulement si pour tout $f \in F^*$, on a $f \circ T \in E^*$.

Exercice02 : Soient E un espace vectoriel normé, F un sous espace vectoriel fermé de E et $x_0 \in E/F$.

Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$, telle que $\|\varphi\| = 1$ et pour tout $x \in F, \varphi(x) = 0$.

Exercice03 : Soient E un espace vectoriel normé et F un sous espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{F} = \cap\{\ker f, f \in E^*, F \subset \ker f\}$.
2. En déduire que F est dense dans E si et seulement si toute forme linéaire continue sur E qui s'annule sur F s'annule sur E,avec $\overline{F} = E \Leftrightarrow F^{\perp}$.

Exercice04 : Soient E,F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Rappelons qu'il existe $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$, appelé adjoint de T, telle que $T^*\psi(x) = \psi(Tx)$, pour tout $\psi \in F^*$ et $x \in E$.

1. Montrer queTEest dense dans F siet seulement si T^* est injectif.
2. Montrer que si T est surjectif, alors il existe $c > 0$, tel que $\|T^*\psi\| \geq \|\psi\|, \forall\psi \in F^*$.

Exercice05 : Montrer qu'il existe $\varphi \in (\ell^{\infty})^*$ tel que pour tout $(x_n) \subset \ell^{\infty}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n \leq \varphi(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup x_n.$$

Chapitre 3

Opérateurs linéaire bornés sur des espaces de Hilbert

3.1 Espaces de Hilbert

Définition 3.1. *Soit E un espacevéctoriel sur uncorps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle un produit scalaire sur E toute application $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ qui vérifie les propriétéssuivantes :*

1. $\langle x, y \rangle = 0 \leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
3. $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overleftarrow{\langle y, x \rangle}$;
4. $\forall x, y, z \in E, \langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$.

Le couple $(E, \langle , \rangle)$ est appelé espace préhilbertien.

Exemple 3.1. 1. *Soit $\ell^2(\mathbb{C})$ l'espace des suites à valeurs complexes, tel que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. L'application $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x\overline{y}$ définie un produit scalaite sur $\ell^2(\mathbb{C})$.*

2. *$E = \mathbb{R}^n$, l'application $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n xy$ définie un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.*

3. *$E = \mathbb{C}^n$, l'application $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x\overline{y}$ définie un produit scalairesur $\mathbb{C}^n$.*

4. *$E = L^2([a, b], \mathbb{C}^n)$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$ est un espace préhilbertien.*

Si E est un espace véctoriel muni d'un produit scalaire, alors la relation $\|x\| = \langle x, \rangle^{\frac{1}{2}}$ définie une norme sur E dite norme associée au produit scalaire.

Inégalité de Cauchy Schawarz

Lemme 3.1. *Si E un espace préhebertien, alors pour tout $x, y \in E$, on a*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Démonstration. Pour tout $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$\langle x + \alpha y, x + \alpha y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, \alpha y\rangle + \langle \alpha y, x\rangle + \langle \alpha x, \alpha y\rangle \geq 0,$$

alors pour $y \neq 0$, on a

$$\langle x, x\rangle + (\alpha + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle})(\overline{\alpha} + \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle})\langle y, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle} \geq 0$$

, pour $\alpha = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$, on obtient :

$$\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \geq \langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} = |\langle x, y\rangle|^2$$

$$\Rightarrow |\langle x, y\rangle|^2 \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Pour $y = 0$, l'inégalité est vérifie, car

$$\langle y, y\rangle = 0 \text{ et } \langle x, 0\rangle = 0.$$

■

Corollaire 3.1. *Soit H un espace préhilbertien, la forme linéaire $f_y : y \mapsto \langle x, y\rangle$ pour tout $x \in H$ est continue et $\|f_y\| = \|y\|$.*

Démonstration. D'après Cauchy Schawrz, pour tout $x \in H$, on a :

$$\|f_y(x)\|^2 \leq \|x\|\|y\|$$

$$\rightarrow f_y \in H^*$$

On a $\|f_y\| \leq \|x\|$ et pour $x = y$, on obtient $f_y(y) = \|y\|^2$ ce qui donne $\|f_y\| = \|y\|$. ■

Définition 3.2. *Deux éléments x, y dans un espace préhelbertient H sont dites orthogonaux si et seulement si $\langle x, y\rangle = 0$.*
Si $A \subset H$, on note par $A^\perp = \{x \in H, \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in A\}$

Définition 3.3. *Soit H un espace préhilbertien, H est dit un espace de Hilbert si il est complet par rapport à la norme associée àsonproduit scalaire.*

Exemple 3.2.
1. *$\mathbb{C}$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x\overline{y}$ est un espace de Hilbert.*
2. *$\ell^2()$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x\overline{y}$ est un espace de Hilbert.*
3. *$L^2([a, b])$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$ est un espace de Hilbert.*

Théorème 3.1. *(Théorème de Riez)*
Soit H un espace de Hilbert, l'application $f_y : y \mapsto \langle ., y\rangle$ est surjective. C'est dire il existe un élément unique $y \in H$ qui vérifie $f_y(x) = \langle x, y\rangle$ pour tout $x \in H$.

Démonstration. Soit $F = Kerf_y = \{x \in H, f_y(x) = 0\} = f_y^{-1}(\{0\})$. Il est clair que F est fermé, donc on peut écrire $H = F \oplus F^\perp$.

Soit $x_0 \in F^{\perp}$, tel que $x_0 \neq 0$ alors $x_0 \in H/F$, i.e., $f_y(x_0) \neq 0$. Donc l'élément $z = x_0 f_y(x) - x f_y(x_0)$ appartient à F, car

$$f_y(z) = f_y(x_0 f_y(x) - x f_y(x_0) = f_y(x_0) f_y(x) - f_y(x) f_y(x_0) = 0$$

Ce qui implique

$$\langle x_0, x_0 f_y(x) - x f_y(x_0)\rangle = \langle x_0, x_0 f_y(x)\rangle - \langle x_0, x f_y(x_0)\rangle = 0$$

$$\rightarrow f_y(x)\langle x_0, x_0\rangle = \langle x, \overline{f_y(x_0) x_0}\rangle$$

$$\rightarrow f_y(x) = \langle x, \frac{\overline{f_y(x_0) x_0}}{\langle x_0, x_0\rangle}.$$

Par conséquent, il existe $y = \frac{\overline{f_y(x_0) x_0}}{\langle x_0, x_0\rangle}$ vérifie $f_y(x) = \langle x, y\rangle$.

L'unicité : supposons qu'il existe y' qui vérifie

$$\forall x \in H, f_y(x) = \langle x, y\rangle = \langle x, y'\rangle$$

$$\rightarrow \forall x \in H, \langle x, y - y'\rangle = 0$$

$$\rightarrow y = y'$$

■

3.1.1 Opérateur adjoint

Définition 3.4. *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T \in L(H_1, H_2)$. On appelle opérateur adjoint à T*

l'opérateur $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ qui vérifie

$$\forall (x, y) \in H_1 \times H_2, \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

Proposition 3.1. *Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{H}$. Alors T admet un unique adjoint T^* qui vérifie $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$ et $\|T^*\| = \|T\|$.*

Démonstration. Soient $y \in H$, alors $f : x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ est un élément de H^*, donc d'après le théorème de Riez, il existe un unique $T^*y \in H$ vérifie

$$\forall x \in H, \langle Tx, y\rangle = f_(x) = \langle x, T^*y\rangle$$

On a aussi

$$\|T^*y\| = \|f\| \leq \|T^*\|\|y\| \to \|T^*\| \leq \|T\|$$

D'autre part

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*(Tx)\rangle$$

$$\to \|Tx\|^2 \leq \|x\|\|T^*\|\|Tx\|$$

$$\to \|Tx\| \leq \|x\|\|T^*\|$$

$$\to \|T\| \leq \|T^*\|.$$

■

Exemple 3.3. *Soit $S_r : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$, tel que $Sx = (0, x_1, x_2, ...x_n, ...)$, où $x = (x_1, x_2, ...x_n, ...)$. Alors pour $x, y \in \ell^2(\mathbb{C})$, on a*

$$\langle Sx, y\rangle = x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + ... + x_n\overline{y_{n+1}} + ...$$

$$= \overline{\overline{x_1}y_2} + \overline{\overline{x_2}y_3} + ...$$

$$= \langle x, y^*\rangle,$$

où $y^* = T^*y = (0, y_2, y_3, ..., y_n, ...)$.

1. *$T : L^2([a, b], \mathbb{C}) \to L^2([a, b], \mathbb{C})$ définie par $Tf(t) = \alpha(t)f(t)$, où $\alpha \in C([a, b], \mathbb{C})$.*

   Pour tout $f, g \in$, on a

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \alpha(t)f(t)\overline{g(t)}dt$$

$$= \int_a^b f(t)\overline{\overline{\alpha(t)}g(t)}dt$$

$$= \langle f(t), \overline{\alpha(t)}g(t)\rangle.$$

Donc $T^*f(t) = \overline{\alpha(t)}f(t)$.

2. *Soit* $T : L^2([a,b],\mathbb{C}) \to L^2([a,b],\mathbb{C})$ *un opérateur borné définie par* $Tf(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds$, *où* $k \in L^2([a,b]^2$.

   Pour $f, g \in L^2([a,b],\mathbb{C})$, *on a*

$$\langle Tf, g\rangle = \in_a^b \Big(\int_a^b k(t,s)x(s)ds\Big)\overline{g(t)}dt$$

$$= \in_a^b f(s)\overline{\Big(\int_a^b \overline{k(t,s)}g(t)ds\Big)}$$

$= \langle f, g^*\rangle = \langle f, T^*g\rangle$.*Donc* $T^*f = \int_a^b \overline{k(t,s)}f(s)ds$.

Propriétés

Soient S et T deux opérateurs sur un espace de Hilbert

1. $(T+S)^* = T^* + S^*$
2. $(\alpha T)* = \overline{\alpha}T^*, \alpha \in \mathbb{C}$
3. $(T^*)^* = T$.
4. $(ST)^* = T^{ast}S^*$.

Démonstration. 1. $\langle (S+T)x, y\rangle = \langle Sx, y\rangle + \langle Tx, y\rangle$

$$= \langle x, T^* + \langle x, S^*y\rangle$$

2. $\langle (\alpha T)x, y\rangle = \langle T(\alpha x, y\rangle$

$$= \langle \alpha x, T^*y\rangle = \langle x, \overline{\alpha}T^*y\rangle.$$

3. $\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle$

$$= \langle \alpha x, T^*S^*y\rangle$$

$$\to (ST)^* = T^*S^*.$$

■

Lemme 3.2. *Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$, alors on a*

1. $\ker T = (Im(T^*)^{\perp}$.

2. $\overline{Im(T)} = (\ker T^*)^{\perp}$.

Démonstration. 1. x appartient à $\ker T$ si et seulement si $Tx = 0$, alors

$$x \in \ker T \Leftrightarrow \forall y \in Im(T), \langle Tx, y\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle x, T^*y\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (Im(T^*))^{\perp}.$$

2. Par (1), si on prend T^* à la place de T, on obtient

$$\ker T^* = (Im(T))^{\perp}$$

$$\Leftrightarrow (\ker T^*)^{\perp} = \left(Im(T))^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{Im(T)}.$$

■

3.1.2 Opérateurs auto-adjoints

Définition 3.5. *Un opérateur T d'un espace de Hilbert dans lui même est dit auto adjoint si et seulement s'il coincide avec sond adjoint. C'est à dire $T^* = T$.*

Théorème 3.2. *Si T est auto-adjoint, alors $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$.*

Démonstration. Posons $\alpha_T = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$, alors d'aprèe l'inégalité de Cauchy Schawarz on a

$$|\langle Tx, x\rangle| \leq \|T\|\|x\| \leq \|T\|$$

$$\to \alpha_T \leq \|T\|. \tag{3.1}$$

Pour tout x tel que $\|x\| \leq 1$ on a

$$|\langle Tx, x\rangle| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Tx, x\rangle = \alpha_T.$$

Si $x \neq 0$, on a

$$|\langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle| \leq \alpha_T$$
$$\to |\langle Tx, x\rangle| \leq \alpha_T\|x\|^2$$

Par ailleurs, pour tout $x, y \in H$, on a

$$\langle T(x+y), x+y\rangle = \langle Tx, x\rangle + 2Re\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle$$

$$\langle T(x-y), x-y\rangle = \langle Tx, x\rangle - 2Re\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle.$$

Alors

$$4Re\langle Tx, y\rangle \leq \alpha_T(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)$$
$$\to 4Re\langle Tx, y\rangle \leq \frac{\alpha_T}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

On prend x d'une façon que $Tx \neq 0$ et posons $y = \frac{\|x\|}{\|Tx\|}Tx$, alors $\|x\| = \|y\|$. De plus on obtient

$$|Re\langle Tx, y\rangle| \leq \alpha_T(\|x\|^2$$
$$\to |Re\langle Tx, \frac{\|x\|}{\|Tx\|}Tx\rangle| = \frac{\|x\|}{\|Tx\|}|Re\langle Tx, Tx\rangle| \leq \alpha_T(\|x\|^2$$
$$\to \|Tx\| \leq \alpha_T\|x\|$$

$$\to \|T\| \leq \alpha_T. \tag{3.2}$$

De (3.1) et (3.2), on arrive à $\|T\| = \alpha_T$. ∎

Théorème 3.3. *Si T est auto-adjoint, alors $\langle Tx, x\rangle$ est réel.*

Démonstration. Si $T = T^*$, alors

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle$$

$$\to \langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$$

$$\to \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}.$$

∎

Propriétés des opérateurs auto-adjoints

Soient T et S deux opérateurs auto-adjoints et soint $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors on a

1. l'opérateur $(\alpha T + \beta S)$ est auto adjoint.
2. Si , alors ST est auto-adjoint

Proposition 3.2. *Soient H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$, alors T est invesible si et seulement s'i exuste $c > 0$, tel que pour tout $x \in H$, $\|Tx\| \geq c\|x\|$.*

Il est clair, si T est invesible, alors l'inégalité est évidente. Réciproquement, supposons que l'inégalité est vérifie, alors T est injectif, car si $x \in \ker T$,alors

$$0 = \|Tx\| \geq c\|x\| \Leftrightarrow x = 0.$$

Il reste de prouver la surjectivité de T, d'après le Lemme **??** $Im(T)$ est dense dans H, car

$$\overline{Im(T)} = (\ker T^{ast})^{perp} = (\{0\})^{perp} = H.$$

Il suffit de montrer la fermeture de l(image de T. En effe, soit $(y_n = Tx_n)$ une suite dans $Im(T)$ qui converge vers y, alors (y_n) est de Cauchy, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, c\|x_n - x_m\| \leq \|Tx_n - Tx_m\| < \varepsilon,$$

donc (x_n) estde Cauchy dans H, alors elle est convergente vers $x \in H$, la continuité de T nous donne $y = Tx \in Im(T)$. ∎

3.2 Quelques classes d'opérateurs

1. T est dit normal si et seulement s'il commute avec son adjoint,i.e., $T^*T = TT^*$.
2. T est dit positif si et seulement si pourtout $x \in H, \langle Tx, x \rangle \geq 0$. T est dit de rang fini si et seument si $dimR(T) < \infty$.
3. T est dit une projection si $T^2 = T$.
4. T est dit une projection orthogonale si $T^2 = T$ et $T^* = T$.
5. T est dit une isométrie si $T^*T = I_H$.
6. T est dit unitaire si $T^*T = TT^* = I_H$. .

3.3 Étude spectrale d'opérateurs linéaires bornés

3.3.1 Spectre d'un opérateur

Soint H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$. Considère l'équation

$$T - \lambda)x = 0 \tag{3.3}$$

et l'équation non homogène

$$T - \lambda)x = y, \tag{3.4}$$

où $x$est l'inconnue, y est donné et λ un paramètre.
S'il exite λ_0 tel que T_{λ_0} est invertsible et $\overline{D(T_{\lambda_0}} = H$, on dit que λ_0 est point resolvant, ou $\lambda_0$appartient au rèsolvant $\rho(T)$, donc

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T_\lambda \text{est inversible}\}.$$

On lespectre de Tet on note $\sigma(T)$ le complementaire de $\rho(T)$, c'est à dire

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T_\lambda \text{n'est pas inversible}\}.$$

On appelle spectre ponctuel l'ensemble des valeurs propres,

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T_\lambda \text{n'est pas injectif}\}.$$

On appelle spectre continu l'ensemble des valeurs $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que T_λ^{-1} existe et $\overline{D(T_\lambda} = H$, mais T_λ^{-1} n'est pas continu.
On appelle spectre residu l'ensemble des valeurs $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que T_λ^{-1} existe, mais $\overline{D(T_\lambda} \neq H$.

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \overline{D(T_\lambda} \neq H\}.$$

Donc on peut écrire

$$\sigma(T) = \sigma_c(T)\sigma_c(T)\sigma_r(T).$$

Le rayon spectral

Soit $T \in l(H)$,on appelle rayon spectral le nombre défini par

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Exemple 3.4. *fdfl*

Théorème 3.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Si $\|T\| \leq |\lambda|$, alors $\lambda \in \rho(T)$.*

Démonstration. On a

$$T_\lambda = (T - \lambda I) = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$$

$$R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(I - \frac{T}{\lambda})^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k}$$

la serie est convergente si et seulement si $\|T\| \leq |\lambda|$. Dans ce cas, T_λ exite et $\lambda \in \rho(T)$. ■

Théorème 3.5. *Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$. Le spectre de T est un ensemble fermé.*

Démonstration. Il suffit de montrer que le résolvant est ouvert,i.e., tout point $\lambda \in \rho(T$ est un point interne.
En effet, soit $\lambda_0 \in \rho(T)$, alors R_{λ_0} existe et continue, de plus $\overline{E_{\lambda_0}} = H$.
Soit (y_n) une suite dans E_{lambda} qui converge vers y, alors il existe $(x_n) \subset D(T)$, telle que $y_n = Tx_n$. Puisque (y_n) est convergente, alors elle est de Cauchy,i.e.,

■

Théorème 3.6. *Siient H un espace de Hilbert et $T\mathcal{L}(H)$. Alors $\lambda \in \rho(T)$ si et seulement s'il existe $k > 0$ tel que*

$$\forall x \in H, \|T_\lambda x\| \geq k\|x\|.$$

Démonstration. Si $\lambda \in \rho(T)$, alors T_λ est continuenement inversible , donc on a

$$\|R_\lambda y\| \leq \|R_\lambda\|\|y\|.$$

Si on pose $y = T_\lambda x$, on trouve

$$\|T_\lambda x\| \geq \frac{1}{\|R_\lambda\|}\|x\|.$$

Réciproquement, s'il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in H, \|T_\lambda x\| \geq k\|x\|$. Donc R_λ existe et λ n'est valeur propre, ce qui implique $\overline{E_{lambda}} = H$. Il suffit de montrer que E_{lambda} est fermé. En effet, soit (y_n) une suite dans E_{lambda} qui est converge vers y, alors il existe $(x_n) \subset D(T)$, telle que $y_n = Tx_n$. Puisque (y_n) est convergente, alors elle est de Cauchy,i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0, \|y_n - y_m\| < \varepsilon$$

$$\to k\|x_n - x_m\| \leq \|T(x_n - x_m)\| = \|y_n - y_m\| < \varepsilon$$

Donc (x_n) est de Cauchy, alors elle convergente vers x, la continuité de T_λ implique

$$T_\lambda x_n \to T_\lambda x = y.$$

Donc $y \in E_\lambda = (T - \lambda I)E$.

■

3.3.2 Spectre des opérateurs auto-ajoints

Soient H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$, on sait que

$$\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda}, \lambda \in \sigma(T)\},$$

donc si T est auto-adjoint, alors son spectre est réel et symétrique par rapport l'axe réel.

Théorème 3.7. *Si H un espace de Hilbert $T : H \to H$ un opérateur linéaire auto-adjoint, alors son spectre est contenu dans $\mathbb{R}$. Plus précisément, si on pose $m = \inf_{x\in E}\langle Tx, x\rangle$ et $M = \sup_{x\in E}\langle Tx, x\rangle$, alors $\sigma(T) \subseteq [m, M]$.*

Démonstration. Il est clair si T est auto-adjoint, ses valeurs properes sont réelles.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}/[m, M]$ et on va montrer que $\lambda \in \rho(T)$.
En effet, soient $\lambda < m$ et $\|x\| = 1$, alors on a

$$\langle T - \lambda I)x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda\|x\|^2 \geq m - \lambda$$

$$\Rightarrow m - \lambda \geq \langle T_\lambda x, x\rangle \leq \|T_\lambda x\|.$$

Donc par homogènéité on a

$$m - \lambda \leq \|T_\lambda \frac{x}{\|x\|}\| \Rightarrow \|T_\lambda x\| \geq (m - \lambda)\|x\|.$$

$$\Rightarrow \lambda \in \rho(T).$$

De même argument si on prend $\lambda \geq M$. ■

Corollaire 3.2. *Si T est auto-adjoint, alors son rayon spectral est égal à sa norme, c'est àdire $r(T) = \|T\|$.*

3.4 Exercices

Exercice 01 : Soit $T : C([-\pi, \pi]) \to \mathbb{R}$. Trouver les valeurs et les vecteurs propres dans les cas suivants :

1. $Tx(t) = x(-t)$
2. $Tx(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t+s)x(s)ds$

Exercice 02 : Détérminer T^* dans les cas suivants :

1. $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$, $Tx(t) = x(\frac{t+1}{2}$.
2. $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$, $Tx = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n, ...)$, $(\alpha_n) \subset \ell^\infty$.
3. $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$, $Tx(t) = a(t)x(t+h$, $h \in \mathbb{R}$ et a une fonction continue sur $(mathbbR$

Exercice 03 : Soient $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $Tx(t) = \varphi(t) \int_0^1 \varphi(t)x(t)dt$

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(L^2)$.
2. Montrer que T est auto-adjoint.
3. Montrer qu'il existe λ que l'on précisera, tel que $T^2 = \lambda T$.
4. Calculer le rayon spectral en fonction de λ.

Exercice 04 :

1. Soit $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$, tel que $T(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$.
   - Montrer que tout $\lambda \in \mathbb{C}$, tel que $|\lambda| \leq 1$ est valeur propre de T.
   - Déterminer le spectre de T.
2. Soit $S : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$, tel que $S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$.

– Montrer que S ne posède aucune valeur propre.

– Montrer que le spectre de S est le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}} = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$.

Exercice 05 : Soient (α_n) une suite bornée dans $\mathbb{C}$ et $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$, définie pour $x = (x_n)$ par $Tx = (\alpha_n x_n)$.

(a) Montrer que pour chaque $(c_n), n \geq 1$ est une valeur propre.

(b) Montrer que si $\lambda\overline{\{c_n, n \geq\}}$, alors $\lambda\sigma(T)$.

(c) En déduire $\sigma(T)$ le spectre de T.

Exercice 06 : Soit $E = L^2([0,1], \mathbb{C}$, et pour tout $f \in E$ on considère l'opérateur $Tf(t) = tf(t)$.

(a) Verifie que $Tf \in E$.

(b) Montrer que T n'a aucune valeur propre. éterminer le spectre de T.

Chapitre 4

Opérateurs linéaires compacts

4.1 Opérateur compact

Définition 4.1. *Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$. T est dit compact si l'une des assertions suivantes est vérifie :*

(a) $T(\overline{B}(0,1))$ (l'image de la boule fermée par T) est relativement compacte ;

(b) L(image de tout ensemble borné B est relativement compacte ;

(c) Pour toute suite bornée de E, on peut extraire une suite de (Tx_n) qui converge dans F.

On note par $K(E, F)$ au espace des opérateurs compacts.

Remarque 4.1. *Si $\dim E < \infty$, alors tout opérateur borné car compact, car l'image de tout ensemble borné est bornée et dans la dimension finie, tout borné esr relativement compact.*

Exemple 4.1. *$T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2$, tel que $Tx = (x_1, \frac{1}{2}x_2, ..., \frac{1}{2^n}x_n, ...)$. T est compact, car l'image de $\overline{B}(0,1)$ est bornée.*

Remarque 4.2. *L'opérateur d'identité d'un espace de Banach dans lui même est continu, mais n'est pas compact.*

Théorème 4.1. *Soient Eu un espace de Banach et $T \in K(E)$, si $(T_n))$ une suite d'opérateurs compacts convergente vers T. Alors T est compact.*

■

Démonstration. Il suffit de montrer que pour toute suite bornée $(x_n) \subset E$, on peut extraire de la suite (Tx_n) une sous suite convergente dans E.
Puisque T_1 est compact, alors on peut extraire une sous suite $(T_1 x_n^{(1)})$ convergente dans E.
Pour $(T_2 x_n^{(1)})$, il existe une sous suite $(T_2 x_n^{(2)})$ convergente dans E. De même manière il existe une sous suite $(T_3 x_n^{(3)})$ de $(T_3 x_n^{(2)})$ qui est convergente.
Enfin, on obtient une suite $(x_n^{(n)})$ telle que $(T_n x_n^{(n)})$ convergente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On vamontrer que $(Tx_n^{(n)})$, pourcela il suffit de montrer que $(Tx_n^{(n)})$ est de Cauchy, car E est complet. En effet, on a

$$\|Tx_n^{(n)} - Tx_m^{(m)}\| \leq \|Tx_n^{(n)} - T_k x_n^{(n)}\| + \|Tx_k^{(n)}{}_n - T_k x_m^{(m)}\| + \|T_k x_m^{(m)} - Tx_m^{(m)}\|.$$

Soit $\|x_n\| \leq c$, on choisit k de manière tel que $\|T - T_k\| < \frac{\varepsilon}{3c}$, alors

$$\|Tx_n^{(n)} - Tx_m^{(m)}\| < c\|T - T_k\| + \frac{\varepsilon}{3} + c\|T - T_k\| = \varepsilon.$$

Par conséquent, $(Tx_n^{(n)})$ est de Cauchy. ■

Proposition 4.1. *L'espace $K(E, F)$ est un sous espace fermé dans $\mathcal{L}(E, F)$.*

Démonstration. Soit (T_n) une suite d'opérateurs compacts de E dans F, tels que $\|T_n - T\| \to 0$.On va montrer que $T \in K(E, F)$. En effet, par la définition de la limite, on a

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $x \in \overline{B}(0,1)$, on a $\|T_n x - Tx\| < \frac{\varepsilon}{3}$, puisque $T_n(\overline{B})$ est relativement compact, alors $Tn(\overline{B}) \subseteq \cup_{j=1}^{k} B(T_n x_j, \frac{\varepsilon}{3})$.

Donc pour tout $j \leq k$, on a

$$\|Tx - Tx_j\| \leq \|Tx - T_n x\| + \|T_n x_j - T_n x\| + \|T_n x_j - Tx_j\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\to T(\overline{B}) \subset \cup_{j=1}^{k} B(Tx_j, \varepsilon).$$

Par conséquent, on peut couvrir $T(\overline{B})$ par un nombre fini des boules ouvertes. ■

Proposition 4.2. *Tout opérateur de rang fini est compact.*

Démonstration. $T(\overline{B})$ est une partie bornée de $T(E)$, puisque $dim T(E) < \infty$, alors $T(\overline{B})$ est relativement compacte. ■

Théorème 4.2. *Soient $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $S \in \mathcal{L}(F,G)$. SiT ou S est compact, alors $ST \in K(E,G)$.*

Démonstration. Si M un ensemble borné, alors SM est borné aussi. Donc la compacité de T implique $T(SM)$ est relativement compact.

Si S est compact, alors SM est relativement compact, puisque T est continue, alors $T(SM)$ est relativement compact. ■

4.2 L'opérateur adjoint d'un opérateur compact

Théorème 4.3. *(de Schauder)*

L'adjoint d'un opérateur linéaire compact est un opérateur compact.

Pour la démonstration on va utiliser le théorème d'Arzela-Ascoli.

Théorème 4.4. *Soient E un espace métrique compact et $\mathcal{H}$ une famille des fonctions de $C(E)$. Alors $\mathcal{H}$ est relativement compact si et seulement si $\mathcal{H}$ est uniformément bornée et équicontinue.*

Rappelons que $\mathcal{H}$ est équicontinue en x_0 si et seulement si

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{H}.$$

Démonstration. de théorème de Schauder.
Supposons T est compact, on veut montrer que $T^*(B_{F^*})$ est relativement compact. Pour cela considerons Soit (Φ) une famille de fonctions f_n de $\overline{TB_E}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f_n(\varphi) = \langle \varphi, \psi_n \rangle$, où $\psi_n \in \overline{B}$.
(f_n) est uniformément bornée :

$$|f_n(\varphi)\|_\infty = \sup_{\varphi \in \overline{TB_e}} |\langle \varphi, \psi_n \rangle| = \sup_{x \in \overline{B_E} | \langle Tx, \psi_n \rangle | \leq \|T\|.}$$

Pour tout φ_1 et φ_2, on a

$$\|f_n(\varphi_1) - f_n(\varphi_2)\| \leq \|\varphi\| \|\varphi_1 - \varphi_2\| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Alors Φ est équicontinue, donc d'après le théorème d'Arzela-Ascoli Φ est relativement compact, alors on peut extraire une sous suite (f_{nk}) convergente vers f.
Pour tout $x \in \overline{B_E}$, on a

$$\langle T^* \psi_{n_k}, x \rangle = \langle \psi_{n_k}, Tx \rangle = f_{n_k}(Tx) \rightarrow_{k \to \infty} f(Tx).$$

Pour $x \in E$, $\phi(x) = \lim_{k \to \infty} \langle T^* \psi_{n_k}, x \rangle$ existe, linéaire et $\phi / B_E = f \circ T$. Comme

$$\phi(x) = \lim_{k \to \infty} \|T^* \psi_{n_k}(x)\| \leq \|T^*\| \|\psi_{n_k}\| \|x\| \leq \|T\| \|x\|$$

ϕ est continue, donc $\phi \in E^*$. De plus

$$\|T^*\psi_{n_k} - \phi\|_E = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T^*\psi_{n_k} - \phi, x\rangle| = \|f_{n_k} - f\| \to 0.$$

Ce qui implique pour toute suite ψ_n, on peut extraire une sous suite convergente.

Réciproquement, si T^*, alors d'après ce que précéde $T = (T^*)^*$ est compact. ■

4.3 L'étude spectrale des opérateurs compacts

Théorème 4.5. *Soient E un espace de Banach et $T \in K(E)$, alors on*

(a) $\dim \ker(I - T) < \infty$

(b) $R(I - T)$est fermé.

(c) Si $(I - T)$est injectif, alors $(T - I)$ est inversible.

Démonstration. (a) Si $x \in N = \ker(I-T)$, alors $Tx = x$, alors si B_N la boule unitée de N, on a $TB_N = B_N$, comme $B_N$est fermée dans N, alors fermée dans E et on a $B_N = TB_N \subset \overline{TB_E}$ est compacte, car T est compact, donc N est de dimension finie (d'après théorème de Riez de compacité).

(b) soit (y_n) une suite dans $(I-T)$ dont converge vers y. Alors, il existe $(x_n) \subset E$, telle que $y_n = x_n - Tx_n$. Si (x_n) est bornée, alors il exists une sous suite $(x_{n_k})etcomme$T$estcompact, onpeutextraireunesoussuite$(T$x_{n_k}$ convergente vers Tx (par continuité de T). Donc (I-T)$x_{n_k} \to x-Tx$, ce qui implique $y = x - Tx \in R(I - T)$.

Si (x_n) n'est pas bornée, soit $d_n = d(x_n, N)$, puisque Nest de dimensions finie, il existe $(z_n) \subset N$, telle que

$$d_n = \|x_n - z_n\|.$$

On va prouver (d_n) est bornée, en effet par l'absurde, il existe une sous suite (x_{n_k}) telle que $\|x_{n_k} - z_{n_k}\| \to \infty$. Soit $v_n = \frac{x_n - z_n}{2\|x_n - z_n\|}$, on a $\|v_n\| \leq 1$. Donc par compacité de T, il existe une sous suite (Tv_{n_k}) convergente vers $v \in E$. Puisque $x_n - Tx_n \to y$, on a

$$v_n = (I - T)z_n + Tz_n = \frac{1}{2d_n}(I - T)x_n + Tz_n \to 0$$

par la continuité de T, on a $Tv = v$, c'est à dire $v \in N = \ker(I - T)$. Comme $\|\frac{x_n - z_n}{2d_n} - v_n\| = \|v_n - v\| \to 0$, alors pour n assez grand, on a $\|v_n - v\| < \frac{1}{2}$ on obtient $\|x_n - z_n - 2d_n v\| < d_n$. 4est une contradiction avec la définition de d_n. Donc, (d_n) est bornée, $(x_n - z_n)$ aussi ce qui donne $z_n \in N$ et on a $(I - T)(x_n - z_n) \to y$. On est ramené au premier cas.

(c) Pour appliquer le théorème d'isomorphisme de Banach, il suffit de montrer la surjectivité de $(I - T)$.

Par l'absurde, sipposons

$$E_1 = T(I - T) \neq E,$$

pour tout $n \geq 1$, posons

$$E_n = [(I - T)^n] = (I - T)^n E.££Comme$$

E$_{n+1} = (I - T)E_n$, alors (E_n) est suite des sous ensembles fermés et décroissante.

D'autre part, $(I - T)$ est injectif et $E_1 \neq E$, par récurence on a

$E_n \neq E_{n+1}$.D'après le lemme de Riez il existe $(x_n) \subset E$, telle que $\|x_n\| = 1$ et $d(x_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. Alors, pour $n > m$, on a

$$Tx_n - Tx_m = x_n - (I-T)x_n + (I-T)x_m - x_m$$

et$x_n - (I-T)x_n + (I-T)x_m \in E_{m+1}$. Par conséquent,

$$\|Tx_n - Tx_m\| \geq d(x_m, E_{m+1}) \geq \frac{1}{2},$$

on ne peut pas extraire de (Tx_n) une sous suite convergente, c'est une contradiction avec T compact.

Théorème 4.6. *(Hilbert-Schmidt)*
Si T un opérateur compact et auto-adjoint sur un espace de Hilbert H, alors il existe un système orthonormé $\{\varphi_n\}$ des vecteurs propres associé aux valeurs propres non nulles $\{\lambda_n\}$, tels tout x H peut $\{etre écriresousunformeunique : x = \sum_k c_k\varphi_k + x'$,oùx'$\in KerT$ et $Tx = \sum_k \lambda_k c_k \varphi_k$.

Si $\{\varphi_n\}$ est infinie, alors $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Théorème 4.7. *Soient E un espace de Banach et $T \in K(E)$. On a*

(a) $0 \in \sigma(T)$.

(b) Tout élément $\lambda \neq 0$ de $\sigma(E)$ est une valeur propre. De plus, $\dim\ker(T-\lambda I) < \infty$.

Démonstration. (a) Supposons que $0\sigma(T)$. Alors T est bijectif et comme T est compact on en déduit que $I_E = T \circ T^{-1}$ est compact en tant qu'opérateur sur E. En particulier, $\overline{B_E}$ est compacte ce qui implique que E est de dimension finie. C'est une contradiction, donc $0 \in \sigma(T)$.

(b) Soit $\lambda \in \sigma(T)$ different de zero, alors $(T-\lambda I)$ n'est pas inversible, $(T-\lambda^{-1})$ aussi, donc n'est ps injectif ce qui implique λ est une valeur propre et $\dim\ker(T-\lambda^{-1}I)<\infty$, donc $\dim\ker(T-\lambda I)<\infty$.

■

Théorème 4.8. *Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in K(H)$ et auto-adjoint, alors H admet une base helbetienne formée de vecteurs propres de T.*

4.4 Exercices

Exercice01 : Soit $E = C([0,1])$, espace de Banach des fonctions à valeurs complexes, continues sur $[0,1]$, muni de la norme uniforme. Soient $k : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $T : E \to E$ définie par

$$Tx(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)ds.$$

(a) Montrer que $T \in K(E)$.

(b) Montrer que $\|T\| = \sup_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 k(t,s)ds$.

(c) Déterminer $\|T\|$ et $\sigma(T)$ lorsque $k(t,s) = e^{t+s}$.

Exercice02 : Soient E le même espace définie dans le premier exercice et $T : E \to E$ définie par

$$Tx(t) = \int_0^{1-t} x(s)ds.$$

(a) Montrer que $|Tx(t) - Tx(s)| \leq |t-s|\|x\|_\infty$

(b) En déduire que T est compact.

(c) Montrer que 0 est une valeur spectrale de T, mais n'en est pas une valeur propre.

Exercice03 : Soient H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$.

(a) Montrer que si T est normal, alors pour tout $x \in H$, on a

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|.$$

(b) Montrer que si T est normal et T^2 compact, alors T est compact.

Exercice04 : Soient H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$.

(a) Montree que si T est normal et compact, tel que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, alors T est autoadjoint.

(b) Montrer que si normal et compact, tel que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}_+$, alors T est positif.

Bibliographie

[1] P. Aiena, *Fredholm and local spectral theory, with applications to multipliers*, Kluwer Academic Publishers, London, 2004.

[2] W. Arveson, *A short course on spectral theory*, Springer, New York, 2002.

[3] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Dunod (1999).

[4] H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitex Springer (2010).

[5] J. Charles, M. Mbekhta and H. Queffélec,*Analyse fontionnelle et théorie des opérateurs*, exercices corrigés ,Dunod (2010).

[6] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, second edition, Graduate Texts in Mathematics 96, Springer (1990).

[7] J. B. Conway, *A course in operator theory*, volume 21 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[8] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part 2 : Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space*, Wiley-Interscience, New York, 1988.

[9] I. Gohberg, S. Goldberg and M.A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators*, Vol I, OT 49, BirkhÄauser, Basel, 1990.

[10] F. Hirsch et G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Masson (1997).

[11] A. Kolmogorov et S. Fomine, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, $3^{ème}$ édition, Editions Mir et Ellipses (1994).

[12] R. Schnaubelt, *Functional Analysis*, Class Notes, Karlsruhe, 2010.

[13] V.S. Sunder, *Functional Analysis : Spectral Theory*, TRIM Series, No. 13, Hindustan Book Agency, Delhi, 1997, and Birkhauser Advanced Texts, Basel, 1997.

[14] V. Trénoguine, *Analyse fonctionnelle*, Editions Mir (1985).