TD - 3 -

Exercice 1 Déterminer le rang et la signature des formes quadratiques suivantes :

1. $Q((x, y, z)) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.
2. $Q((x, y, z, t)) = xy + yz + zt + tx$.
3. $Q((x_1, ..., x_5)) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} x_i x_j$.

Exercice 2 Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices réelles d'ordre 2, on considère l'application $b : E^2 \to \mathbb{R}$ definie par : $b(A, B) = tr({}^tA.B)$ où $tr(M)$ designe la trace de la matrice M.

1. Prouver que b est une forme bilineaire symetrique sur E.
2. Prouver que pour tout A de E, $b(A, A) \geqslant 0$ avec égalité si, et seulement si, $A = O_2$.
3. Donner la matrice B représentant b dans la base canonique $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de E.
4. En deduire le rang de b.

Exercice 3 Soit E est une $\mathbb{R}-$espace vectoriel

1. Soient $f_1, f_2 \in E^*$ et $q(x) = f_1(x)f_2(x)$. Montrer que q définit une forme quadratique sur E et exprimer sa forme polaire.
2. Soit Q une forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique positive φ sur E. Pour $x \in E$, montrer
$$Q(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall y \in E, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Exercice 4 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in\in E$, on pose $Q(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k)P(-k)e^{-k}$.

1. Montrer que Q est une forme quadratique sur E.
2. Déterminer sa signature.

Exercice 5 Soit $E = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On pose
$$\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), \quad Q(f) = \lambda Tr(f^2) + \mu det(f).$$

1. Vérifier que Q est une forme quadratique sur E.
2. Déterminer en fonction de λ et μ le rang et la signature de Q. Analyser en particulier les cas $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ et $(\lambda, \mu) = (0, 1)$.

Exercice 6 * Soient $f_1, f_2, ..., f_n$ n fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on pose $b_{i,j} = \int_a^b f_i(t)f_j(t)dt$ puis pour $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Q((x_1, ..., x_n)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{i,j}x_i x_j$.

1. Montrer que Q est une forme quadratique positive.
2. Montrer que Q est définie positive si et seulement si la famille $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ est libre.
3. Ecrire la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dans le cas particulier : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \forall t \in [a, b], f_i(t) = t^{i-1}$.