REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Echahid Hamma Lakhdar El-Oued

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Formes bilinéaires et formes quadratiques

Tedjani Hadj Ammar

Cours de deuxième année Licence LMD

Comment exprimer la norme d'un vecteur $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ exprimé dans une autre base ?

Il se trouve qu'il existe une bonne théorie vectorielle pour ces problèmes, une bonne théorie de changement de base. De même, à la place de la norme on peut regarder le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, et là encore, il y a une bonne théorie de changement de base etc. Elle s'accompagne d'une bonne théorie de classification d'objets apparentés, et c'est ce qu'on va voir dans la première partie du cours.

Dans la deuxieme partie, on verra comment cela s'applique à la *géométrie* vectorielle, la géométrie de l'orthogonalité.

1.1 Formes bilinéaires et formes quadratiques

1.1.1 Définitions

Dans toute la suite, sauf mention du contraire, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (mais le plus souvent (et par défaut) sur $\mathbb{R}$).

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On considère une application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$.*

On dit que ϕ est un **produit scalaire** *sur E si ϕ satisfait :*

(a) ϕ est linéaire selon chacune des variables

(b) $\phi(v, w) = \phi(w, v)$ pour tout $v, w \in E$

(c) $\phi(v, v) \geq 0$ pour tout v

(d) $\phi(v, v) = 0$ seulement si $v = 0$ (le vecteur nul).

On peut se convaincre que ces propriétés sont bien satisfaites par "le" produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ qu'on a appris au lycee.

Chacune de ces propriété a un nom, et il est avantageux de les étudier plus ou moins séparément, plutot que toute en même temps.

Définition 1.1.2 *Soit $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$ une application.*

- *On dit que ϕ est une* **"forme bi-linéaire"** *si elle vérifie (a). C'est à dire*

$$\forall v_1, v_2 \in E, w \in E, \lambda \in \mathbb{K}, \phi(v_1 + \lambda v_2, w) = \phi(v_1, w) + \lambda\phi(v_2, w)$$

$$\textit{et} \ \ \phi(w, v_1 + \lambda v_2) = \phi(w, v_1) + \lambda\phi(w, v_2)$$

- *On dit que ϕ est* **symetrique** *si elle verifie (b).*
- *On appelle l'application $q_\phi : E \to \mathbb{K}$ définie par $q_\phi(v) = \phi(v, v)$* **la forme quadratique associée** *à ϕ.*

- *Dans le cas ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on dit que q_ϕ (ou ϕ) est* **positive** *si elle verifie (c) — cela n'a pas de sens dans $\mathbb{C}$ par exemple.*
- *On dit que q_ϕ (ou ϕ) est* **définie** *si elle verifie (d).*

En pratique, on utilisera souvent les locutions "positive" (c'est à dire verifiant (c)), et "définie positive" (c'est à dire verifiant (b) et (c)).

Remarquons que, si ϕ est une forme bi-linéaire, on a toujours $\phi(0,0) = 0$. (Pourquoi ?)

En résumé, *un produit scalaire est, par définition, une forme bi-linéaire symétrique définie positive.* La forme quadratique associée à un produit scalaire est qualifiée de norme Euclidienne (on aura l'occasion d'y revenir).

Voici quelques exemples.
- Le produit scalaire "que l'on connait" (et que j'appellerai "le produit scalaire du Lycée") dans $\mathbb{R}^n$ munit de sa base canonique. (Ecrire la formule en coordonées)
- Le déterminant dans $\mathbb{R}^2$ munit de sa base canonique. (détail, ecrire la formule en coordonnées)
- Dans $\mathbb{R}^n$ munit de sa base canonique, étant donné un endomorphisme u, l'application $\phi_u : (v, w) \mapsto \langle u(v), w\rangle$ définie à l'aide du produit scalaire du Lycée, dans la base canonique.
- Dans un espace de polynômes, l'integration sur $[0, 1]$ du produit : $\int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
- En coordonnées dans $\mathbb{R}^2$ la formule suivante

  $$\phi((x, y), (x', y')) = xx' + xy' + x'y$$

  ses coefficients sont positifs, pourtant elle n'est pas "positive" au sens de la définition... en effet $q_\phi(-1, 1) = \phi((-1, 1), (-1, 1)) = -1$.
- Dans $\mathbb{R}^4$, en écrivant les coordonnées, x, y, z, t, et en choisissant une constante $c > 0$, la forme quadratique $q_L(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - ct^2$ joue un rôle primordial en théorie de la relativité restreinte (en fait elle remplace le produit scalaire du Lycée, ce phénomène est évoqué plus loin dans ces notes, dans un complement)

Lesquelles sont symétriques ? anti-symétriques ?

1.1.2 Le rôle du dual

Cette petite section est un complément utile qui éclaire les objets du cours, mais on n'en fait pas un point central.

Rappellons que si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension finie, ici), son dual E^* est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E : $E^* = L(E, \mathbb{R})$.

Un décompte de dimension indique immédiatement que E et E^* ont même dimension, et sont donc abstraitement isomorphes l'un à l'autre, mais l'une des subtilités de cet objet est qu'il n'y a pas d'isomorphisme canonique a priori.

Si $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E, alors on peut définir $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\} \subset E^*$ ainsi. La forme linéaire e_i^* est celle qui prend la valeur 0 en chaque $e_j, j \neq i$, et la valeur 1 en e_i. En d'autres termes, $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$. On définit e_i^* sur tout E en prolongeant évidemment par linéarité.

De telles formes linéaires sont bien définies car $\mathcal{B}$ est une base de E.

Proposition 1.1.1 *$\mathcal{B}^*$ est une base de E^*. On l'appelle la base duale de $\mathcal{B}$.*

Compte tenue de la dimension de E^*, il suffit de verifier que c'est une famille libre. Sous cet angle, c'est immédiat.

Dans l'autre sens, si $\mathcal{C} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ est une base de E^*, on peut définir, pour chaque i, le vecteur $f_i^o \in E$, l'unique solution du système d'équations linéaires (d'inconnue v) $\{f_j(v) = \delta_{i,j}, j = 1, \ldots, n\}$.

L'existence et l'unicité de cette solution demande une explication.

Si l'on écrit ce système d'équations dans une base $\mathcal{E}$ (arbitrairement choisie) de E, on obtient un système $AX = B$ avec

- X un vecteur colonne inconnu, dont les coefficients sont les coordonnées de v (vecteur inconnu) dans $\mathcal{E}$
- A une matrice carrée dont la j-ième ligne est la matrice (ligne) de f_j exprimée dans la base $\mathcal{E}$
- B est le vecteur colonne avec des 0 partout sauf à la i-ème ligne, qui vaut 1.

On voit alors que c'est un système de Cramer. En effet, la j-ème ligne de la matrice du système correspond à la matrice (ligne) de f_j dans cette base, et comme les f_j forment une famille libre, les lignes de la matrice carrées A sont indépendantes, et A est inversible.

De ce fait, le système a une unique solution (qui vaut, exprimée dans $\mathcal{E}$, le vecteur $A^{-1}(B)$).

On voit alors qu'on a plus : les expressions des $f_i^o \in E$ dans $\mathcal{E}$ sont les images par A^{-1} de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, ils forment donc une base de E. En résumé :

Proposition 1.1.2 *Si $\mathcal{C}$ est une base de E^*, alors $\mathcal{C}^o$ est une base de E, on l'appelle la base ante-duale de $\mathcal{C}$.*

On peut définir le crochet naturel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E^* \times E$ dans $\mathbb{R}$ comme suit : $\langle f, v \rangle = f(v)$ si $f \in E^*$ et $v \in E$. Il s'agit d'une application bilinéaire (de $E^* \times E$ dans $\mathbb{R}$).

Si l'on utilise une application linéaire $\psi : E \to E^*$ et qu'on la compose avec le crochet, on peut définir $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ par $\phi(w, v) = \langle \psi(w), v \rangle = (\psi(w))(v)$. On peut alors voir que ϕ est une forme bilinéaire. On peut aussi montrer que toute forme bilinéaire s'obtient ainsi. En effet, si $\phi_0 : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, définissons $\psi : E \to E^*$ par $\psi(v) = \phi_0(v, \cdot)$ (c'est l'application qui à x associe $\phi_0(v, x)$). Alors $\psi(v)$ est bien une forme linéaire (par linéarité à droite de ϕ_0) et ψ est bien linéaire (par linéarité à gauche de ϕ_0. On verifie facilement que le passage de ϕ_0 à ψ est bien la reciproque du passage de ψ à ϕ défini avant.

1.1.3 Représentation matricielle

Il est temps de parler de représentations matricielles, et d'interpreter ces notions à l'aide des matrices.

Proposition 1.1.3 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Soit ϕ une forme bilinéaire sur E.*

On note $m_{i,j} = \phi(e_i, e_j)$, et $M_{\mathcal{B}}(\phi) = (m_{i,j})_{i\leq n, j\leq n}$.

Alors si $v = \sum_i a_i e_i$ et $w = \sum_j b_j e_j$, on a

$$\phi(v, w) = (a_1, \ldots, a_n) \times M_{\mathcal{B}}(\phi) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

De plus, M ainsi définie est la seule matrice à vérifier cette formule pour tout v, w.

On dit que M est **la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$**.

Si une matrice doit verifier la formule c'est forcement celle là, car en testant sur $v = e_i$ et $w = e_j$, on voit que la formule donne le coefficient $m_{i,j}$.

Enfin, pour la matrice M donnée, on doit verifier que la formule est correcte.

On ecrit

$$\phi(v, w) = \sum_i a_i \phi(e_i, w) = \sum_i a_i (\sum_j b_j \phi(e_i, e_j))$$

par bi-linéarité.

On compare à $M_{\mathcal{B}}(\phi) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ qui vaut $\begin{pmatrix} \sum_j b_j m_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_j b_j m_{n,j} \end{pmatrix}$, que l'on multiplie à gauche par $(a_1, \ldots, a_n)$, cela donne $\sum_i a_i \sum_j b_j m_{i,j}$. L'égalité est bien vérifiée.

Remarque : pour le produit scalaire du Lycée ? C'est bien la matrice identité...

Exemple de ϕ^* ou les arguments sont inversés. C'est la transposée.

Remarque : on avait l'habitude de matrices carrées pour les endomorphismes. Mais là ce n'est pas la même chose...

Proposition 1.1.4 *Soit ϕ une forme bi-linéaire sur un espace E. Les assertions sont equivalentes :*

- *ϕ est symétrique*
- *il existe une base pour laquelle la matrice de ϕ est symétrique.*
- *dans toutes les bases, la matrice de ϕ est symetrique.*

Question : Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des formes bi-linéaires symetriques ?

Question : est-ce que l'equivalence entre les deux derniers points est encore vraie dans le cas d'un endomorphisme ?

Question : a-t-on un bon critere pour voir que ϕ est positive ?...

Proposition 1.1.5 *(***Changement de base***)*

Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\mathcal{C} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ une autre base.

Notons P la matrice de changement de base de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$, c'est à dire : on note $f_j = \sum_i p_{i,j} e_i$, et $P = (p_{i,j})$.

Soit ϕ une forme bilinéaire sur E.

Notons $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ sa matrice dans $\mathcal{B}$, et $M_{\mathcal{C}}(\phi)$ sa matrice dans $\mathcal{C}$.

Alors on a $M_{\mathcal{C}}(\phi) = {}^tPM_{\mathcal{B}}(\phi)P$

On part de deux vecteurs v, w.

On ecrit v dans la base $\mathcal{C}$: $v = \sum_i a_i f_i$. Par définition de P, si on note $P \times \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, alors $v = \sum_i \alpha_i e_i$.

De meme si $w = \sum_i b_i f_i$ et si $P \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, alors $w = \sum_i \beta_i e_i$.

Mainenant ${}^t\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = {}^t(P \times \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) = {}^t\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} {}^tP$.

(en effet ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$)

Du coup, $(a_1, \ldots, a_n) \times {}^tPMP \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) M \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

Et ce résultat est connu pour être $\phi(v, w)$ par définition de M (c'est la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$, et les α_i, β_i sont les coordonnées des vecteurs dans cette base).

Donc ${}^tPMP$ est bien la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{C}$.

Remarque : ce n'est PAS la meme formule de changement de base que pour les endomorphismes ! — sauf si par "grand hasard" ${}^tP = P^{-1}$...

1.1.4 Symétrie et anti symétrie

Rappel : si ϕ est une forme bi-linéaire sur un e.v. E, on dit qu'elle est symétrique si $\forall v, w \in E, \phi(v, w) = \phi(w, v)$.

Complément de définition : on dit qu'elle est **anti-symétrique** si $\forall v, w \in E, \phi(v,w) = -\phi(w,v)$.

Décomposition de l'espace $\mathcal{BL}(E)$

Proposition 1.1.6 *L'espace $\mathcal{BL}(E)$ des formes bi-linéaires est un espace vectoriel.*

Proposition 1.1.7 *L'espace des formes bi-linéaires symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{BL}(E)$. On le note $\mathcal{S}(E)$.*

L'espace des formes bi-linéaires anti-symétriques un sous espace vectoriel de $\mathcal{BL}(E)$. On le note $\mathcal{A}(E)$.

$\mathcal{BL}(E)$ est la **somme directe** *de $\mathcal{S}(E)$ et de $\mathcal{A}(E)$, c'est à dire :*

$$\mathcal{BL}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E).$$

On note ϕ^* la forme bilinéaire "renversée" (on échange le role des variables), et on exprime $\phi = \frac{\phi+\phi^*}{2} + \frac{\phi-\phi^*}{2}$. La proposition devient facile.

1.1.5 Orthogonalité relative à une forme symétrique

Définition 1.1.3 *Soit ϕ une forme bi-linéaire symetrique sur un espace E. Soit v un vecteur de E. On dit que w est* **orthogonal à** *v* **pour** *ϕ si $\phi(v,w) = 0$.*

Une famille de vecteurs $\{v_i\}$ est orthonormée pour ϕ si $\phi(v_i, v_j) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker).

Exemples : pour le produit scalaire du Lycée, ce n'est rien de nouveau. Pour la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ de matrice $Diag(1,-1)$, le vecteur $e_1 + e_2$ est son propre orthogonal. Cette forme n'est pas "définie" (au sens de la définition du début). Le vecteur $e_1 - e_2$ aussi est son propre orthogonal mais n'est pas orthogonal à $e_1 + e_2$.

Proposition 1.1.8 *Soit ϕ une forme bi-linéaire symetrique sur un espace E. Pour toute partie A de E, l'ensemble $A^\perp$ est un s-ev de E. Il est égal à $(Vect(A))^\perp$*

Remarque : c'est bien ce qu'on a envie de voir pour un produit scalaire.

Consequence pratique : si F est un s-ev de E et $\mathcal{B}_F = \{e_i\}$ est une base de F, alors $F^\perp = \{v, \forall i \phi(v, e_i) = 0\}$.

Remarque : si $E^\perp$ est non-trivial, on dit que ϕ est **dégénérée**.

C'est à dire : on dit que ϕ est dégénérée s'il existe $v \neq 0$ telle que $\phi(v,w)$ est toujours nulle.

Proposition 1.1.9 *Soit ϕ une forme bi-linéaire symetrique sur un espace E. Les assertions sont equivalentes :*

- *ϕ est* **non-dégénérée**

– *il existe une base pour laquelle la matrice de ϕ est* **inversible**.
– *dans toutes les bases, la matrice de ϕ est inversible.*

Rappel d'un théorème important : une matrice M est inversible si et seulement si il n'existe pas de solution à l'équation $MV = 0$ (où l'inconnue est le vecteur colonne V) autre que le vecteur nul. Autrement dit M est inversible si et seulement si $\ker M_{\mathcal{B}}(\phi) \subset \mathbb{R}^n$ (vu comme espace de vecteurs colonnes) est réduit au vecteur nul.

Lemme 1.1.1 *$E^\perp$ est isomorphe à l'espace $\ker M_{\mathcal{B}}(\phi) \subset \mathbb{R}^n$ (vu comme espace de colonnes) par l'isomorphisme donné par l'expression en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.*

Tous les vecteurs colonnes W dans le noyau verifient $MW = 0$ et donc ${}^tVMW = 0$ vour tout V. A travers l'isomorphisme, cela signifie que $\phi(v, w) = 0$ pour tout v.

Ainsi $\ker M_{\mathcal{B}}(\phi)$ est contenu dans (l'image de) $E^\perp$ (isomorphe à $E^\perp$).

Reciproquement, si $w \in E^\perp$, alors W est dans le noyau de M : si c'etait faux, $MW \neq 0$ et on peut trouver V (et meme un vecteur de la base) tel que ${}^tVW \neq 0$.

Du coup, $E^\perp \simeq ker(M)$, (où $\simeq$ represente l'isomorphisme des coordonnées dans la base).

Définition 1.1.4 *Le* **rang** *de ϕ vaut $n - dimE^\perp$.*

Proposition 1.1.10 *C'est le rang de la matrice dans une base arbitraire. C'est invariant par changement de base.*

Définition 1.1.5 *On dit que v est un vecteur* **isotrope** *de ϕ si $\phi(v, v) = 0$*

Proposition 1.1.11 *L'ensemble des vecteurs isotropes est un cône.*

Il suffit de savoir ce que c'est qu'un "cône" (c'est, par définition, une partie stable par multiplication par un scalaire).

Remarque : en général ce n'est pas $E^\perp$!

Exemples : formes bilinéaires associées aux matrices $Diag(1, -1)$, et $Diag(1, 1, -1)$. Exercice : dessin des cônes.

1.1.6 Symetrie et formes quadratiques : formes pôlaires

Remarque : une fome bilinéaire nous donne bien une forme quadratique associée. Mais comment reconnaite une forme quadratique seule ? Et si on le peut, nous donne-t-lle une forme bi-linéaire ?

Exemples de formes quadratiques (sur des matrices diagonales, et pas diagonales, jusqu'à dégager une intuition). En coordonnées une forme quadratique est un polynôme de degré 2 homogène à plusieurs variables.

Proposition 1.1.12 *(a) Si $\phi = \phi_a + \phi_s$ alors $q_\phi = q_{\phi_s}$. En particulier, la forme quadratique d'une forme antisymetrique est nulle (donc ininteressante)*

(b) Si q est une forme quadratique, il existe une unique forme bilinéaire symétrique dont q est la forme quadratique. On l'appelle la **forme pôlaire de** *q. On la note ϕ_q.*

(c) $\phi_q(v, w) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w))$

Premier point : $\phi(v, v) = \phi_a(v, v) + \phi_s(v, v) = 0 + \phi_s(v, v)$.

Deuxieme point : existence. Si q est une forme quadratique, disons que c'est la forme quadratique de la forme bilinéaire ϕ, et décomposons $\phi = \phi_a + \phi_s$ (en partie symétrique et partie antisymétrique, grace a la décomposition en somme directe de l'espace des formes bi-linéaires). D'apres le premier point, $q = q_{\phi_s}$.

Unicité : on doit montrer que si $q_\phi = 0$, et si ϕ symétrique alors ϕ est nulle. Prenons $\phi(v, w)$ et considérons $\phi(v + w, v + w)$.

D'abord par hypothèse, ca vaut 0. Ensuite, ca vaut $\phi(v+w, v+w) = \phi(v, v+w)+ \phi(w, v + w)$ c'est à dire $\phi(v + w, v + w) = \phi(v, v) + \phi(v, w) + \phi(w, v) + \phi(w, w)$. Les contributions de q sont nulles, et par symétrie cela vaut $2\phi(v, w)$ et donc $\phi(v, w) = 0$ et $\phi = 0$.

Troisième point : maintenant qu'on a l'existence et l'unicité, il suffit de verifier que la formule $\phi_q(v, w) = \frac{1}{2}(\phi_q(v + w, v + w) - \phi_q(v, v) - \phi_q(w, w))$. On développe par bi-linéarité, et la formule s'en déduit.

C'est pour cela qu'on s'interessera (ici !) aux formes bilinéaires symétriques en priorité.

Exemples, en coordonnées qu'on a déjà vu.

Proposition 1.1.13 *L'espace des formes quadratiques est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel. Il est isomorphe à l'espace des formes bilinéaires symétriques, et un isomorphisme est donnée par la définition, et sa reciproque est donné par la forme polaire.*

Quelle est sa dimension ? Donnez en une base sur $\mathbb{R}^3$.

Comment faire en pratique pour reconnaitre qu'une formule qu'on nous donne est bien une forme quadratique ?

Proposition 1.1.14 *Pour être une forme quadratique il suffit d'être homogène de degré 2, et que la formule définissant la forme polaire donne bien une forme bi-linéaire.*

Remarque sur l'utilisation de la formule $\phi_q(v, w) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w))$. Le calcul eszt grandement facilité si l'on sait ce que vaut la forme polaire d'un carré parfait ($(x_1, \dots x_n) \mapsto x_1^2$), et d'un produit croisé ($(x_1, \dots x_n) \mapsto x_1 x_2$).

Quelle est la forme polaire de $q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2$? Réponse $x_1 x_1'$

Quelle est la forme polaire de $q(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2$? Réponse $\frac{1}{2}(x_1 x_2' + x_1' x_2)$.

On appelle parfois ces formules **"règle du doublement"**. Elles facilitent l'utilisation de la formule de polarisation.

Peut on calculer facilement la forme polaire de (disons) $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \leq n} x_i^2 + \sum_{i \leq n-1} x_i x_{i+1}^2$?

1.2 Réduction : Méthode de Gauss, et classification de quadriques

1.2.1 Résultat général (si le temps le permet)

Un théorème de réduction.

Théorème 1.2.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Pour toute forme bilinéaire symétrique $\phi \in \mathcal{S}(E)$, il existe une base de E formée de vecteurs ϕ-orthogonaux deux à deux.*

Dans une telle base la matrice de ϕ est diagonale. Si ϕ est de rang r, une telle base contient $n - r$ vecteurs isotropes qui forment une base de $E^\perp$.

Par recurrence sur n.

Preuve donnée en exercice "de rédaction" (si vous avez un vecteur e_1 tel que $\phi(e_1, e_1) \neq 0$, utiliser $e_1^\perp = \ker(v \mapsto \phi(e_1, v))$, montrer que sa dimension est $n - 1$, et utiliser la récurrence.

On l'a dit, il est très facile en général de savoir si une forme bilinéaire est symétrique. On voudrait aussi savoir si elle est positive, ou même définie positive.

Théorème 1.2.2 *Soit q une forme quadratique de rang r sur un espace vectoriel E de dimension finie n.*

Il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, et des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ non nuls tels que si $v = \sum_i \lambda_i e_i$ alors $q(v) = \sum_i \alpha_i \lambda_i^2$.

Exercice : si le corps de base est $\mathbb{C}$ toute forme quadratique est une somme de carrés dans une certaine base.

1.2.2 Décomposition de Gauss

En général, on n'aime pas les formules compliquées, et la réduction des endomorphismes nous a appris qu'on pouvait esperer transformer des formules compliquer en formules simples dans d'autres bases.

On se donne une forme quadratique, sous la forme d'un polynôme à plusieurs variables homogène de degré 2.

On veut décomposer cette expression en somme et differences de carrés. On sait que c'es possible grace qu théorème de réduction. Mais on veut une methode pour le faire.

Nous allons voir la méthode de Gauss.

Il s'agit d'une réécriture qui utilise les regles suivantes :

$$"a^2 + 2ab \xrightarrow{=} (a+b)^2 - b^2" \qquad "4ab \xrightarrow{=} (a+b)^2 - (a-b)^2"$$

que je préfere réecrire ainsi :

$$"a^2 + ab \xrightarrow{=} (a+b/2)^2 - (\frac{b}{2})^2" \qquad "ab \xrightarrow{=} (\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2"$$

Exemple 1.2.1 *Par exemple, soit la forme quadratique suivante :*
$q(x,y,z) = x^2 - y^2 + 6z^2 + 2xy - 4xz - 8yz$

les termes $+2xy - 4xz - 8yz$ nous ennuient : on va les ravaller grace a nos règles de réécriture. On va utiliser au maximum la premiere regle de réécriture. Par exemple, on va se servir de x^2 pour réduire tout ce qui est en x, ici, c'est $+2xy - 4xz$. Il s'agit de se "forcer" à reconnaitre le début du développement d'un carré $(x + ...)^2$.

En effet :
$x^2 + 2xy - 4xz = x^2 + 2x(y - 2z) \xrightarrow{=} (x + (y - 2z))^2 - (y - 2z)^2$
Il vient que $q(x,y,z) = (x + (y - 2z))^2 - (y - 2z)^2 - y^2 + 6z^2 - 8yz$.
Seul le premier carré nous interesse, on est pret è redévelopper le second carré. En effet : dans toute la partie de droite, il n'y a plus de x. On a donc progressé (il y a une variable de moins), et il nous faut désormais résuire toute cette partie.
$q(x,y,z) = (x + (y - 2z))^2 - 2y^2 + 2z^2 - 4yz$
On rejoue au jeu de factoriser, par exemple
$+2z^2 - 4yz = 2 \times (z^2 - 2yz) \xrightarrow{=} 2 \times ((z - y)^2 - y^2)$.
$q(x,y,z) = (x + (y - 2z))^2 - 4y^2 + 2 \times (z - y)^2$.
Voila q décomposée en 3 carrés "indépendants".

Attention : décomposer à tout crin en somme de carré ne sert à rien, il faut que les carrés soient indépendants... C'est à dire il faut trouver une base de réduction. Appliquer la méthode de Gauss scrupuleusement garantie que les carrés trouvés sont indépendants.

Exemple 1.2.2 *Autre exemple, soit la forme quadratique suivante :*
$q(x,y,z) = xy + 4yz + zx$

On n'a pas d'amorce en "a^2" pour utiliser la regle 1. On va donc utiliser la regle de réécriture numero 2.

Mais si on le fait naivement, on obtient trop de carrés, non indépendants...

On ecrit alors en préliminaire $xy + 4yz + zx = (x + 4z)(y + z) - 4z^2$

En fait on a cherché à écrire $xy + 4yz + zx = (\alpha x + \beta z)(\gamma y + \delta z) + \epsilon z^2$ (on a sacrifié un carré en z pour notre ecriture en produit). il faut $\alpha\gamma = 1, \alpha\delta = 1, \beta\gamma = 4$. On choisi α, les autres en découlent.

$q(x, y, z) = (x + 4z)(y + z) - 4z^2$ et on utilise la réécriture 2 :

$(x + 4z)(y + z) \overset{=}{\to} (\frac{x+4z+y+z}{2})^2 - (\frac{x+4z-y-z}{2})^2$

Il vient $q(x, y, z) = \frac{1}{4}(x + y + 5z)^2 - \frac{1}{4}(x + -y3z)^2 - 4z^2$.

Principe général.

Soit $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \leq j} a_{i,j} x_i x_j$ une forme quadratique non nulle.

Cas 1. S'il existe i tel que $a_{i,i} \neq 0$. Alors quitte à renumeroter, on peut supposer que ce i vaut 1 : $a_{1,1} \neq 0$. *But : sortir un carré et un bloc qui ne contient pas x_1, et pour cela ecrire l'expression sous la forme $(ax_1 + ??)^2 +$ reste ou le reste ne contient pas x_1.*

On écrit

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_{1,1} x_1^2 + x_1 \times \sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_{1,j} \; + \sum_{2 \leq i \leq j} a_{i,j} x_i x_j$$

Le premier terme et le primier bloc concernent x_1, mais le second bloc ne concerne pas x_1.

On applique la regle de ré-écriture 1. Cela permet d'écrire que

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_{1,1}(x_1^2 + x_1 \times \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}} x_j) \; + \sum_{2 \leq i \leq j} a_{i,j} x_i x_j$$

devient

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= a_{1,1}((x_1 + \textstyle\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1,j}}{2a_{1,1}} x_j)^2 - (\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1,j}}{2a_{1,1}} x_j)^2) \\ &\quad + \textstyle\sum_{2 \leq i \leq j} a_{i,j} x_i x_j \end{aligned}$$

On isole le premier carré :

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= a_{1,1} \left((x_1 + \textstyle\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1,j}}{2a_{1,1}} x_j)^2 \right) \\ &\quad - \left(\textstyle\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1,j}}{2a_{1,1}} x_j \right)^2 + \sum_{2 \leq i \leq j} a_{i,j} x_i x_j \end{aligned}$$

Le reste ne contient plus de x_1 : on peut ecrire

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_{1,1} \left(\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1,j}}{2a_{1,1}} x_j \right)^2 \right) + q_2(x_2, \dots, x_n)$$

Il suffit désormais de réduire q_2 qui porte sur une variable de moins.

Cas 2. Si tous les coefficients $a_{i,i}$ sont nuls.

Si $n = 2$, on applique directement la regle de réécriture numero 2.

Si $n \geq 3$, quitte à renumeroter, on peut supposer que $a_{1,2} \neq 0$. *But : sortir deux carrés et un bloc qui ne contient ni x_1 ni x_2, et pour cela ecrire l'expression de la forme $(x_1+??)(x_2+???) + reste$.*

On rassemble tout ce qui concerne les indices 1 et 2 :

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_{1,2}x_1x_2 + \sum_{j>2} a_{1,j}x_1x_j + \sum_{j>2} a_{2,j}x_2x_j \ + \sum_{3\leq i\leq j} a_{i,j}x_ix_j$$

On cherche à identifier le premier bloc avec $(x_1 + \sum_{j\geq 3} ?x_j)(x_2 + \sum_{j\geq 3} ?x_j)$, il sort un reste.

$$\begin{array}{rcl} q(x_1, \dots, x_n) & = & a_{1,2}\left(x_1 + \sum_{j\geq 3} \frac{a_{2,j}}{a_{1,2}}x_j\right) \times \left(x_2 + \sum_{j\geq 3} \frac{a_{1,j}}{a_{1,2}}x_j\right) \\ & & -\frac{1}{a_{1,2}}\left(\sum_{j\geq 3} a_{2,j}x_j\right)\left(\sum_{j\geq 3} a_{1,j}x_j\right) \\ & & + \sum_{3\leq i\leq j} a_{i,j}x_ix_j \\ q(x_1, \dots, x_n) & = & a_{1,2}\left(x_1 + \sum_{j\geq 3} \frac{a_{2,j}}{a_{1,2}}x_j\right) \times \left(x_2 + \sum_{j\geq 3} \frac{a_{1,j}}{a_{1,2}}x_j\right) \\ & & +q_3(x_3, \dots, x_n) \end{array}$$

On applique finalement la regle de ré-écriture numero 2 :

$$\begin{array}{rcl} q(x_1, \dots, x_n) & = & \frac{a_{1,2}}{4} \times \left(\left(x_1 + x_2 + \sum_{j\geq 3} \frac{a_{2,j}+a_{1,j}}{a_{1,2}}x_j\right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \sum_{j\geq 3} \frac{a_{2,j}-a_{1,j}}{a_{1,2}}x_j\right)^2\right) \\ & & +q_3(x_3, \dots, x_n) \end{array}$$

On a sorti deux carrés et retiré deux variables du jeu.

Remarque 1.2.1 *On peut verifier que la décomposition obtenue est bien "en carrés indépendant. Pour donner du sens à cette affirmation, il faut voir les carrés comme "carrés de formes linéaires", et interpreter l'independance comme le fait que la famille de ces formes linéaires est une famille libre dans l'espace des formes linéaires (l'espace dual) de notre e.v de départ. Comme ces notions ne sont pas développer ici, je n'insiste pas sur ce point ici.*

Remarque 1.2.2 *Pour trouver une* base *dans laquelle la forme (polaire) s'exprime ainsi diagonalement, il faut "passer à la base anté-duale", c'est a dire résoudre le systeme d'équations proposé par les formes linéaires indépendantes donnant les carrés... (toutes égales 0 sauf la i-ieme, égale 1).*

1.2.3 Coniques et quadriques vectorielles homogènes (descriptif)

On peut utiliser ce qui précède pour l'étude des quadriques.

Définition 1.2.1 *Soit E un espace vectoriel de dim. finie. Soit q une forme quadratique non dégénérée.*

La **quadrique vectorielle homogène de E associée à** *q, est la partie de E définie par*

$$\{v \in E,\ q(v) = 1\}.$$

Exemple en dimenson 2 (les coniques) , grace à la réduction on peut avoir, selon le résultat de la réduction en carrés :

une **ellipse** (si c'est une somme de 2 carrés quiégale 1)

une **hyperbole**, si c'est une différence de 2 carrés qui égale 1.

deux **droites paralleles** si c 'est un carré qui égale 1.

L'ensemble **vide**

Remarque : il y a une cônique qu'on n'a pas vu ainsi : ce n'est pas à proprement parler une conique homogène, c'est le cas de la parabole $aX^2 + Y = 1$. On voit que ce n'est pas donné par une forme quadratique.

En dimension 3 on a 3 cas (ci dessous a, b, c sont positifs strictement), de jolis exemples de surfaces.

$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 1$: C'est une **ellipsoide** . Toute section par des hyperplans donne une ellipse. On a 3 axes principaux (les directions propres, celles donnés par la réduction de la forme quadratique), et 3 symetries, chacune renversant un axe et préservant les deux autres. Parfois il y a plus de symétries.

$aX^2 + bY^2 - cZ^2 = 1$ **hyperboloide à une nappe**. Chaque intersection avec un plan $Z = cst$ donne une ellipse dont on peut calculer les petits et grands demi-axes : il s'agit de $\sqrt{(1 + cZ^2)/a)}$ et $\sqrt{(1 + cZ^2)/b)}$. Le cône isotrope de la forme quadratique est un "cone asymptote" de la quadrique (ses intersections avec le plan $Z = cst$ est donné par une ellipse de petits et grands demi-axe $\sqrt{(cZ^2)/a}$ et $\sqrt{(cZ^2)/b}$.

$aX^2 - bY^2 - cZ^2 = 1$ **hyperboloide à deux nappes** symetriques.

$-aX^2 - bY^2 - cZ^2 = 1$ l'ensemble vide

$aX^2 + bY^2 = 1$ un cylindre elliptique.

$aX^2 - bY^2 = 1$ cylindre hyperbolique

$aX^2 = 1$ cylindre sur 2 droites.

Deux cas à part (pas à proprement parler une quadrique vectorielle).

$aX^2 + bY^2 - cZ = 1$

Le paraboloide elliptique

$aX^2 - bY^2 - cZ = 1$

le paraboloide hyperbolique... Sections paraboliques, sections hyperboliques...

Identification, reduction axes de symetrie, etc...

Question en suspend : "orthogonalité" des axes de symetries ? ...

1.3 Positivité : Cauchy-Schwarz, Minkowski et Sylvester.

On se place sur $\mathbb{R}$, et on peut définir la positivité.

1.3.1 Cauchy Schwarz

Rappel de définitions. Forme quadratique positive. Forme quadratique définie positive. Forme quadratique définie négative.

Proposition 1.3.1 *Si q est une forme quadratique définie, alors elle est soit définie-positive, soit définie-négative.*

Théorème 1.3.1 *Inégalité de Cauchy Schwarz*

Soit q une forme quadratique positive sur un espace E, et ϕ sa forme polaire.

Alors pour tout $v, w \in E$,

$$\phi(v,w)^2 \leq q(v)q(w)$$

Si de plus q est définie positive, l'égalité est vraie si et seulement si x, y sont colinéaires.

Remarque : exemple du produit scalaire "du Lycée". Il s'agit "juste" de dire que le produit scalaire est plus petit que le produit des normes. Cela peut sembler "évident géométriquement" pour diverses raisons...

Preuve (un ultra-classique). On regarde $h(t) = q(v+tw) = q(w)t^2 + q(v) + 2\phi(v,w)t$.

Comme q est positive, $h(t) \geq 0$ pour tout t, et donc le trinome en t a au plus une racine réelle, et reste de signe constant.

Cela implique que $\Delta(= (2\phi(v,w))^2 - 4q(w)q(v))$ est ≤ 0. En effet, si h est vraiment de degré 2 en t, c'est clair (propriété élémentaire du discriminant), et si $q(w) = 0$, le fait que h ne change pas de signe it que $2\phi(v,w) = 0$, et donc $\Delta = 0$.

Cela donne l'inégalité de l'énoncé : $(2\phi(v,w))^2 - 4q(w)q(v) \leq 0$.

Pour les cas d'égalité si v, w colinéaires, on a bien égalité. réciproquement, on peut supposer $w \neq 0$, et puisque q est définite positive, $q(w) \neq 0$. On a donc que h est un trinome du second degré en t, dont $\Delta = 0$, ce qui signifie que $q(v+tw)$ s'annule en un unique t_0. Comme q est définie, $v + t_0 w = 0$.

Corollaire 1.3.1 *Soit q une forme quadratique positive sur un espace E, et ϕ sa forme polaire.*

Alors le cone isotrope de q (ou de ϕ) est égal au noyau de ϕ.

q (ou ϕ) est définie positive si et seulement si ϕ est non dégénérée.

Remarque : C'est tres specifique aux formes positives ! Prière de ne pas tomber dans le piège de la confusion entre cône isotrope et noyau...

Proposition 1.3.2 *Inégalité de Minkowski*

Soit q une forme quadratique positive sur un-$\mathbb{R}$ ev E.

Pour tout $x, y \in E$, $\sqrt{q(v+w)} \leq \sqrt{q(v)} + \sqrt{q(w)}$

On part de Cauchy Schwarz. On utilise alors la formule de la forme polaire. On prend la racine de chaque côté. On fait passer $q(v)$ et $q(w)$ à droite du signe $\leq$, ce qui fait apparaitre une forme remarquable : $\frac{1}{2}q(v+w) \leq \frac{1}{2}q(v) + \sqrt{q(v)q(w)} + \frac{1}{2}q(w)$ qui se factorise en $q(v+w) \leq (\sqrt{q(v)} + \sqrt{q(w)})^2$.

1.3.2 Sylvester

Définition 1.3.1 *Signature d'une forme quadratique. (sup des dim des s-ev sur lesquels la restriction est def pos, def neg.*

Théorème 1.3.2 *Théorème d'inertie de Sylvester.*

Soit q une forme quadratique de signature (p, q). Pour toute base orthogonale pour sa forme polaire ϕ, la matrice de ϕ est diagonale, formée de p réels strictement positifs, et de q réels strictement négatifs (et de $n - p - q$ zeros).

On part d'une base de vecteurs ϕ-orthogonaux (cf Theoreme de réduction). On réordonne les vecteurs de sorte que $q(e_i) > 0$ ssi $i \leq k$, $q(e_i) < 0$ ssi $k < i \leq r$, où r est le rang. Alors q est definie positive sur le sev P engendré par les k premiers vecteurs, et definie négative sur le sev N engendré par les $r - k$ suivants (sa matrice dans ces bases est réduite).

On a donc $p \geq k$. Il faut montrer que p ne peut pas être strictement plus grand. Supposons donc, par l'absurde qu'i est strictement plus grand. Alors, il existe P' un sev de dim $> k$ sur lequelle q est définie positive.

Bien sure q est nulle sur le sev N_0 engendré par les $n - p - q$ derniers vecteurs de notre base. Aussi, q est négative sur $N \oplus N_0$.

Comme $dim(N \oplus N_0) = n - k$, on a necessairement $P' \cap (N \oplus N_0)$ non trivial. Mais nous savons que q est négative sur $(N \oplus N_0)$, cela contredit donc l'hypothèse.

Ainsi, $k = p$.

De même, nous avons $q \geq r - k$, et d'une manière similaire, on obtient que $q = r - k$.

Corollaire 1.3.2 *Meme hypotheses. Il existe une base de E telle que la matrice de ϕ dans cette base soit $diag(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0 \ldots 0)$ avec p fois le coefficient 1 et q fois le coefficient -1.*

En termes purement matriciels, d'après notre formule de changement de base, cela signifie que pour toute matrice symetrique, il existe P inversible tel que ${}^tPMP = diag(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0 \ldots 0)$.

Corollaire 1.3.3 *Deux formes quadratiques réelles qui ont même signature sont congruentes : il existe un changment de bse qui transforme l'une en l'autre.*