Université d'El-Oued | Année universitaire 2019/2020
Faculté des Sciences Exactes | 1-ère année master Mathématiques
Département de Mathématiques | Calcul Différentiel

Exercices

Exercice 1.

Considérons $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|u\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |u(t)|dt$ et
$\varphi : E \longrightarrow E,\ f \longmapsto f \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

1. Vérifier que φ est bien définie.
2. Montrer que φ est différentiable sur E et déterminer $D\varphi(f)$ pour tout $f \in E$.
3. Calculer $D^k\varphi(f)$ pour tout $k \geq 2$ et tout $f \in E$.
4. Écrire la formule de Taylor-Young pour φ au voisinage de $f \in E$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.

Considérons $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ et $F = C([0,1], \mathbb{R})$ munis respectivement des normes
$\|u\|_E = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ et $\|u\|_F = \|u\|_\infty$ et $\phi : E \longrightarrow F,\ f \longmapsto 2f' - f^2$.
Montrer que $\phi \in C^1(E, F)$.

Exercice 3.

Soient E un espace de Banach et $\varphi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ l'application définie par $\varphi(u) = u \circ u$.

1. Montrer que $\varphi \in C^1(\mathcal{L}(E))$.
2. On désigne par I_E l'application identité de E. Peut-on appliquer le théorème d'inversion locale à φ au voisinage de I_E?

Exercice 4.

Soient E un espace de Banach, $v \in \mathcal{L}(E)$ et

$$\varphi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E),\ u \longmapsto v \circ u.$$

1. Montrer que $\varphi \in C^\infty(\mathcal{L}(E))$ et déterminer $D^k\varphi(u)$ pour toute $u \in \mathcal{L}(E)$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Écrire la formule de Taylor-Young pour φ au voisinage de $u \in \mathcal{L}(E)$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.
3. On suppose que $v \in Iso(\mathcal{L}(E))$. Montrer que φ est un $C^\infty-$difféomorphisme.

Exercice 1.

1. Soit $f \in E$. Comme $\varphi(f) : x \longmapsto f(x) \underbrace{\int_0^1 f(t)dt}_{\text{constante}}$ est continue sur le compact $[0,1]$, l'application φ est bien définie.

2. Soit $f \in E$. On a

$$\varphi(f+h) - \varphi(f) = h\int_0^1 f(t)dt + f\int_0^1 h(t)dt + h\int_0^1 h(t)dt.$$

On choisit $D\varphi(f)(h) = h\int_0^1 f(t)dt + f\int_0^1 h(t)dt \;\; \forall h \in E \quad$ et $\quad o(h) = h\int_0^1 h(t)dt$.
L'application $D\varphi(f)$ est linéaire et $\|D\varphi(f)(h)\|_1 \leq 2\|f\|_1\|h\|_1 \; \forall h \in E$. D'où, $D\varphi(f) \in \mathcal{L}(E)$. D'autre part, $\|o(h)\|_1 \leq \|h\|_1^2$, et donc, $0 \leq \lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|o(h)\|_1}{\|h\|_1} \leq \lim_{\|h\|_1 \to 0} \|h\|_1 = 0$, d'où, $\lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|o(h)\|_1}{\|h\|_1} = 0$. On déduit que φ est différentiable sur E et

$$D\varphi(f)(h) = h\int_0^1 f(t)dt + f\int_0^1 h(t)dt \;\; \forall f, h \in E.$$

3. On a $D\varphi(f+h)(k) - D\varphi(f)(k) = h\int_0^1 k(t)dt + k\int_0^1 h(t)dt$. On choisit

$$\forall (h,k) \in E \times E,\; D^2\varphi(f)(h,k) = h\int_0^1 k(t)dt + k\int_0^1 h(t)dt \;\text{ et }\; o(h)(k) = 0_E.$$

On voit que $D^2\varphi(f)$ est une application bilinéaire et $\|D^2\varphi(f)(h,k)\|_1 \leq 2\|h\|_1\|k\|_1 \; \forall (h,k) \in E \times E$, donc, $D^2\varphi(f) \in \mathcal{L}_2(E)$. D'autre part, $\lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|o(h)\|_{\mathcal{L}(E)}}{\|h\|_1} = 0$. D'où, l'application φ est deux fois différentiable sur E et

$$D^2\varphi(f)(h,k) = h\int_0^1 k(t)dt + k\int_0^1 h(t)dt \;\; \forall f, h, k \in E.$$

Comme l'application $D^2\varphi : E \longrightarrow \mathcal{L}_2(E)$, $f \longmapsto D^2\varphi(f)$ est constante (car $D^2\varphi(f) = D^2\varphi(g) \;\; \forall f, g \in E$), il vient $D^k\varphi(f) = 0_{\mathcal{L}_k(E)}$ pour tout $k \geq 3$ et tout $f \in E$.

4. Pour $n = 1$,

$$\varphi(f+h) = f\int_0^1 f(t)dt + h\int_0^1 f(t)dt + f\int_0^1 h(t)dt + o(\|h\|).$$

Si $n \geq 2$,

$$\varphi(f+h) = f\int_0^1 f(t)dt + h\int_0^1 f(t)dt + f\int_0^1 h(t)dt + h\int_0^1 h(t)dt + o(\|h\|^n).$$

Exercice 2.

On a $\phi(f+h) - \phi(f) = 2h' - 2fh - h^2$. On choisit $D\phi(f)(h) = 2(h' - fh) \;\; \forall h \in E$ et $o(h) = -h^2$. Comme $D\phi(f) : E \longrightarrow F$ est linéaire et $\|D\phi(f)(h)\|_F \leq 4\max(1, \|f\|_\infty)\|h\|_E \;\; \forall h \in E$, il vient $D\phi(f) \in \mathcal{L}(E,F)$. D'autre part, $0 \leq \|o(h)\|_F = \|-h^2\|_\infty \leq \|h\|_\infty^2 \leq (\|h\|_\infty + \|h'\|_\infty)^2 = \|h\|_E^2$, d'où, $\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|o(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$. Donc, ϕ est différentiable sur E et $D\phi(f)(h) = 2(h' - fh) \;\; \forall f, h \in E$.

Montrons que $D\phi : E \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ est continue. Soient $f, g \in E$. On a

$$\begin{array}{rcl}\|D\phi(g) - D\phi(f)\|_{\mathcal{L}(E,F)} & = & \sup\limits_{\|h\|_E \leq 1} \|D\phi(g)(h) - D\phi(f)(h)\|_F \\ & = & \sup\limits_{\|h\|_E \leq 1} \|-2(g-f)h\|_\infty \\ & \leq & 2 \sup\limits_{\|h\|_E \leq 1} \|g-f\|_\infty \|h\|_\infty \\ & \leq & 2 \sup\limits_{\|h\|_E \leq 1} \|g-f\|_E \|h\|_E \\ & \leq & 2\|g-f\|_E. \end{array}$$

Cela signifie que $D\phi$ est 2-lipschitzienne, et donc, elle est continue. On conclut que $\phi \in C^1(E,F)$.

Exercice 3.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a $\varphi(u+h) - \varphi(u) = u \circ h + h \circ u + h \circ h$. On choisit

$$D\varphi(u)(h) = u \circ h + h \circ u \ \forall h \in \mathcal{L}(E) \quad \text{et} \quad o(h) = h \circ h.$$

On observe que $D\varphi(u) : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ est une application linéaire et

$$\forall h \in \mathcal{L}(E),\ \|D\varphi(u)(h)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 2\|u\|_{\mathcal{L}(E)}\|h\|_{\mathcal{L}(E)},$$

donc, $D\varphi(u)$ est continue. D'autre part,

$$0 \leq \frac{\|o(h)\|_{\mathcal{L}(E)}}{\|h\|_{\mathcal{L}(E)}} \leq \frac{\|h\|^2_{\mathcal{L}(E)}}{\|h\|_{\mathcal{L}(E)}} = \|h\|_{\mathcal{L}(E)} \to 0 \ \text{ lorsque } \|h\|_{\mathcal{L}(E)} \to 0.$$

D'où, $D\varphi(u) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

Montrons que $D\varphi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ est continue. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On a

$$\begin{array}{rcl}\|D\varphi(v) - D\varphi(u)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))} & = & \sup\limits_{\|h\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1} \|D\varphi(v)(h) - D\varphi(u)(h)\|_{\mathcal{L}(E)} \\ & = & \sup\limits_{\|h\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1} \|(v-u) \circ h + h \circ (v-u)\|_{\mathcal{L}(E)} \\ & \leq & \sup\limits_{\|h\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1} \left\{2\|h\|_{\mathcal{L}(E)}\|v-u\|_{\mathcal{L}(E)}\right\} \\ & \leq & 2\|v-u\|_{\mathcal{L}(E)}. \end{array}$$

D'où, $D\varphi$ est 2-lipschitzienne, et donc, elle est continue. On conclut que $\varphi \in C^1(\mathcal{L}(E))$.

2. On a $\mathcal{L}(E)$ est un espace de Banach (car E est de Banach), $\varphi \in C^1(\mathcal{L}(E))$ et $D\varphi(I_E) : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $h \longmapsto 2h$. L'application $D\varphi(I_E) \in Iso(\mathcal{L}(E))$ d'inverse $(D\varphi(I_E))^{-1} : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $k \longmapsto \frac{k}{2}$. Donc, le théorème d'inversion locale est applicable qu'il existe des voisinages ouverts U_{I_E} et V_{I_E} de I_E dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi : U_{I_E} \longrightarrow V_{I_E}$ est un C^1-difféomorphisme.

Exercice 4.

1. Comme φ est linéaire et

$$\forall u \in \mathcal{L}(E) : \ \|\varphi(u)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \|v\|_{\mathcal{L}(E)}\|u\|_{\mathcal{L}(E)},$$

l'application $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$. D'où, $\varphi \in C^\infty(\mathcal{L}(E))$, $D\varphi(u) = \varphi$, $D^k\varphi(u) = 0_{\mathcal{L}_k(\mathcal{L}(E))}$ $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\forall k \geq 2$.

2. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\varphi(u+h) = v \circ u + v \circ h + o(\|h\|^n_{\mathcal{L}(E)}) \ \ \forall h \in \mathcal{L}(E).$$

3. Nous avons :

• $\mathcal{L}(E)$ est un espace de Banach.

• $\varphi \in C^\infty(\mathcal{L}(E))$ (d'après la question 1).

• φ est injective : soient $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E)$ telles que $v \circ u_1 = v \circ u_2$. Comme v^{-1} existe, il vient $u_1 = u_2$, d'où l'injectivité de φ.

• Pour toute application $u \in \mathcal{L}(E)$, $D\varphi(u) : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $h \longmapsto v \circ h$ appartient à $Iso(\mathcal{L}(E))$ d'inverse $(D\varphi(u))^{-1} : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $k \longmapsto v^{-1} \circ k$.

D'après le théorème d'inversion globale, on déduit que $\varphi(\mathcal{L}(E))$ est un ouvert et $\varphi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \varphi(\mathcal{L}(E))$ est un $C^\infty-$difféomorphisme. Comme φ est surjective car si $w \in \mathcal{L}(E)$, il existe $u = v^{-1} \circ w \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\varphi(u) = w$, il vient $\varphi(\mathcal{L}(E)) = \mathcal{L}(E)$.