

Logique mathématique

Dr. Brahim Lejdel

Université d'El-Oued

2^{ème} année Licence informatique

Introduction

Dans ce cours, nous allons rappeler les notions de base de la logique mathématique. Nous présentons particulièrement le calcul des prédicats (terme, formule, quantificateurs, littéral, variables libres et variables liées, etc.) ainsi que les formes normales de Prenexe, la forme standard de Skolem et la forme Clausale. Aussi, nous allons présenter une méthode simple qui permet de transformer n'importe quelle formule bien formée (fbf) en forme clausale.

1. Logique des propositions

Dans la logique des propositions, on étudie les relations entre des énoncés, que l'on va appeler propositions ou encore des formules. Ces relations peuvent être exprimées par l'intermédiaire de connecteurs logiques (la conjonction, la disjonction (inclusive), l'implication, l'équivalence et la négation) qui permettent, par composition, de construire des formules syntaxiquement correctes i-e formules bien formées (FBF).

1.1. Définition

Une proposition est un énoncé ou assertion permettant de définir une situation. On générale, on appelle une proposition tout fait logique qui peut avoir une valeur de vérité vraie ou fausse.

Exemples :

- le professeur de Prolog est intelligent.
- La salle de cours est grande.
- Omar est père de ali.
- Omar aime ahmed.

1.2. Syntaxe

Le langage des propositions est défini sur l'alphabet suivant :

Un ensemble de symboles, avec :

- Un ensemble $V = \{p, q, r, \dots\}$ dénombrable de lettres appelées variables propositionnelles. Il s'agit des propositions atomiques telles que par exemple « 8 est divisible par 2 ».
- Les constantes {vrai et faux}.
- Un ensemble (fini) de connecteurs logiques : $\{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \Leftrightarrow\}$
- Les parenthèses (,)

1.3. Sémantique

La sémantique de la logique propositionnelle s'intéresse principalement à déterminer la valeur de vérité d'une formule. Il s'agit plus concrètement d'affecter une valeur vrai ou faux à chacune des variables propositionnelles qui la compose. Pour une formule à n variables, il y a 2^n valeurs possible. Pour cela, on utilise ce qu'on appelle des **tables de vérité** (Voir figure 1 et 2).

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
vrai	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux	faux	vrai	faux	faux
faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	faux
faux	faux	vrai	faux	faux	vrai	vrai

Figure 1. Table de Vérité.

On peut aussi faire la table de vérité d'une formule qui se compose de plusieurs variables propositionnelles, comme $A \rightarrow (B \wedge C)$. Dans les formules, on s'intéresse principalement aux valeurs vraies de la formule. Donc, la formule $(A \rightarrow (B \wedge C))$ est vrai quand p, r et s sont tous les trois vrais ou quand p est faux quelles que soient les valeurs de r et s.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \rightarrow (B \wedge C)$
<u>vrai</u>	<u>vrai</u>	<u>vrai</u>	vrai	<u>vrai</u>
vrai	vrai	faux	faux	faux
vrai	faux	vrai	faux	faux
vrai	faux	faux	faux	faux
<u>faux</u>	<u>vrai</u>	<u>vrai</u>	vrai	<u>vrai</u>
<u>faux</u>	<u>vrai</u>	<u>faux</u>	faux	<u>vrai</u>
faux	faux	vrai	faux	<u>vrai</u>
<u>faux</u>	<u>faux</u>	<u>faux</u>	faux	<u>vrai</u>

Figure 2. Table de vérité d'une formule composée de 3 variables.

1.4. Catégories de formule

- **Modèle** : On appelle modèle une interprétation pour laquelle une formule est vraie. Par exemple $p = \text{faux}, r = \text{vrai}, s = \text{faux}$ est un modèle de $(A \rightarrow (B \wedge C))$.
- **Consistance** : On dit qu'une formule A est consistante, ou satisfiable, s'il existe une interprétation de ses variables propositionnelles qui la rende vraie. Autrement dit la formule A est consistante si et seulement si la formule A a un modèle. $(A \rightarrow (B \wedge C))$ est une formule consistante.
- **Inconsistance** : Une formule pour laquelle il n'existe pas d'interprétation qui la rende vraie est dite inconsistante, ou encore insatisfiable, ou plus simplement fausse. $(A \wedge \neg A)$ est inconsistante :

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
vrai	faux	faux
faux	vrai	faux

- **Tautologie** : Si une formule A est vraie pour n'importe quelle valeurs de ses variables propositionnelles, on dit qu'elle est valide et on le note $\models A$. par exemple, la formule $(A \vee \neg A)$ est une tautologie.

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
vrai	faux	vrai
faux	vrai	vrai

1.5. Conséquence logique

En programmation logique, on est intéressé principalement par des procédures de raisonnement. La question centrale qui est posé par la plupart des outils de programmation logique est la suite : à partir d'un ensemble de connaissances, que peut-on déduire? Et comment peut-on le déduire ?. Le principe du raisonnement logique est traduit en sorte de la relation de la conséquence logique entre les formules. L'idée qu'un énoncé découle logiquement d'un autre énoncé en langage naturel peut être traduit comme la déduction d'une formule à partir d'un ensemble des formules vraies. Par exemple, vous savez qu'à la dernière séance du cours vous aurez un contrôle. Vous savez également qu'en général un contrôle aboutit à une note. Vous en déduisez logiquement que vous aurez une note à la fin du cours.

$$\frac{\text{Contrôle, Contrôle} \rightarrow \text{Note}}{\text{Note}}$$

Si on veut généraliser, on peut utiliser un ensemble de formules $\{F1, \dots, Fn\}$. On dit qu'une formule C est une conséquence logique de l'ensemble $\{F1, \dots, Fn\}$, que l'on écrit $\{F1, \dots, Fn\} \models C$, si dans la table de vérité, toute ligne vraies des formules $F1, \dots, Fn$ simultanément, correspond une ligne vraie de la formule C. Autrement dit, tout modèle de $\{F1, \dots, Fn\}$ est un modèle de C. Noter bien que nous pouvons calculer le nombre de lignes de la table de vérité par la formule suivant :

$$Nbr = 2^n, n \text{ est le nombre de variables propositionnelles}$$

Dans le petit exemple précédent, nous avons $\{\text{Contrôle, Contrôle} \rightarrow \text{Note}\} \models \text{Note}$.

Contrôle	Contrôle \rightarrow Note	Note
<u>vrai</u>	<u>vrai</u>	<u>vrai</u>
vrai	faux	faux
faux	vrai	vrai
faux	faux	faux

La table de vérité est un moyen simple et sûr pour contrôler la validité d'une déduction logique. Néanmoins, cette assertion n'est pas toujours vraie, spécialement si le nombre de variables propositionnelles dépassent un certain nombre comme 8, 16 ou plus. Dans ces cas le contrôle de la validité d'une déduction logique par la table de vérité ne sera pratique.

Pour trouver un moyen alternatif qui permet de vérifier la validité d'une déduction logique nous devons rendre compte aux théorèmes mathématiques. Plus généralement, si $F = \{F_1, \dots, F_n\}$ est un ensemble de formules et C une formule, on a le **théorème de déduction (TD)** suivant :

$$F \models C \text{ si et seulement si } \models (F \rightarrow C)$$

Ce théorème peut s'exprimer ainsi : « C se déduit de F si et seulement si $(F \rightarrow C)$ est une tautologie ».

Parmi les variantes intéressantes de ce théorème, on retiendra essentiellement au théorème suivant :

$$F \models C \text{ si et seulement si } F \cup \{\neg C\} \text{ est inconsistant}$$

Ce théorème aussi connu sous le nom de **théorème de réfutation (TR)**, est à la base de la méthode de résolution que nous verrons à la fin de ce chapitre.

Exercice 1.1 : comment peut-on déduire le théorème de réfutation à partir du théorème de la déduction.

$$F \models C \text{ si et seulement si } \models (F \rightarrow C)$$

$$F \models C \equiv \models (F \rightarrow C) \text{ (tautologie)}$$

$$F \models C \equiv \neg F \vee C \text{ est tautologie}$$

$$F \models C \equiv F \cup \{\neg C\} \text{ est inconsistant}$$

Exercice 1.2 : Montrons $\{p \vee q \vee r, \neg p \vee q \vee r, \neg q \vee r\} \models r$ à l'aide de la méthode de résolution par réfutation.

Ensemble de départ $\{p \vee q \vee r, \neg p \vee q \vee r, \neg q \vee r, \neg r\}$

Premier pas $\{p \vee q \vee r, \neg p \vee q \vee r, \neg q \vee r, \neg r, \neg q\}$

Deuxième pas $\{p \vee q \vee r, \neg p \vee q \vee r, \neg q \vee r, \neg r, \neg q, q \vee r\}$

Troisième pas $\{p \vee q \vee r, \neg p \vee q \vee r, \neg q \vee r, \neg r, \neg q, q \vee r, r\}$

Quatrième pas $\{p \vee q \vee r, \neg p \vee q \vee r, \neg q \vee r, \neg r, \neg q, q \vee r, r, \perp\}$

1.6. Schémas de résolution

Nous avons principalement trois schémas de résolution :

- **Modus ponens** : c'est le schéma le plus simple, $\{\text{Contrôle}, \text{Contrôle} \rightarrow \text{Note}\} \models \text{Note}$

- **Modus tollens** : Nous aurions pu raisonner différemment au schéma précédemment cité, en partant de la négation de la conclusion, c'est-à-dire $\neg \text{Note}$, associée à notre connaissance $\text{Contrôle} \rightarrow \text{Note}$. En utilisant cette règle, nous avons $\{\text{Contrôle} \rightarrow \text{Note}, \neg \text{Note}\} \models \neg \text{Contrôle}$. Cela étant contradictoire avec le fait que nous savons Contrôle , nous en déduisons nécessairement Note .
- **règle d'inférence générale** : Parmi les divers schémas de raisonnement existants, nous allons nous concentrer sur la règle de résolution, dont le modus ponens et le modus tollens sont en fait des cas particuliers. Cette règle d'inférence s'exprime ainsi : $\{X \vee A, \neg X \vee B\} \models A \vee B$.

Pour illustrer ce schéma, considérons l'ensemble suivant de propositions : {« Ahmed est à la Maison ou il est au Cinéma », « Ahmed n'est pas à la Maison ou il est au Travail »}. Si Ahmed est à la maison, « il est au Travail » est nécessairement vrai ; de même s'il n'est pas à la maison, « il est au Cinéma » est nécessairement vrai. Donc Ahmed est nécessairement au cinéma ou au travail.

On peut prouver tous les schémas de résolution, en utilisant le théorème de réfutation.

Exemple : Pour **Modus ponens** : $\{A, A \rightarrow B\} \models B$.

On utilisant TR, on doit prouver que l'ensemble $\{A, A \rightarrow B, \neg B\}$ est inconsistant.

Donc, l'ensemble précédent sera comme suit : $\{A, \neg A \vee B, \neg B\}$.

On a $\{A, \neg A \vee B\} \models B$ et aussi $\{B, \neg B\} \models \perp$. Donc, l'ensemble est inconsistant.

2. Exercice :

Exercice 01 :

Soient P et Q les affirmations suivantes :

P : Omar est fort en maths.

Q : Omar est fort en informatique.

Représentez sous formes symboliques les affirmations suivantes :

1. Omar est fort en maths mais faible en informatique.
2. Omar n'est ni fort en maths, ni fort en informatique.
3. Omar est fort en maths s'il est fort en informatique.

Exercice 02 : construire les tables de vérité des formules suivantes :

1. $\bar{p} \rightarrow p \vee q$
2. $(\bar{p} \vee \bar{q})$

Exercice 03 :

Pour chacun des trois ensembles de formules suivants, indiquez s'il est inconsistant. Dans le cas contraire, donnez-en un modèle :

- a) $\{p \vee q, p \rightarrow q, \neg q\}$
- b) $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow \neg p\}$
- c) $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow \neg p, p \vee \neg s, s\}$

Exercice 04 :

Montrez, par la méthode des tables de vérité, que :

- a) $p \Leftrightarrow q \models p \rightarrow q$
- b) $p \Leftrightarrow \neg q \models p \rightarrow q$
- c) $\text{vrai} \models r \rightarrow (s \rightarrow (t \wedge s \rightarrow r))$
- d) $\{q \rightarrow (r \wedge s), \neg r \vee \neg s\} \models \neg q$

Exercice 05 :

Vérifiez, en utilisant les tables de vérité, la validité des raisonnements suivants :

- a) $p \rightarrow q \models q \rightarrow p$
- b) $(p \vee c) \rightarrow q \models p \vee q$
- c) $\{p \rightarrow \neg q, \neg c \rightarrow p\} \models q \rightarrow c$
- d) $\{p \rightarrow q, p \rightarrow c, \neg(q \vee c)\} \models r$
- e) $\neg p \rightarrow \neg q \vee r \models (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r)$

Exercice 06 :

- a) Utiliser la méthode des tables de vérité pour savoir si les formules suivantes sont ou non des tautologies:

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

$$\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg(p \vee q)$$

Si la formule n'est pas une tautologie, donnez une interprétation qui la rend fausse.

2. Utiliser la méthode des tables de vérité pour savoir si la formule

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \rightarrow \neg r)$$

est une conséquence logique de l'ensemble :

$$\Gamma = \{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vee q \vee \neg r, \neg p \rightarrow \neg r\}$$

Si la formule n'est pas une conséquence logique, donnez un modèle de Γ qui n'est pas modèle de la formule.

Exercice 07 :

On considère le raisonnement ci-dessous :

- (1) S'il fait beau, je vais en mer
- (2) Si la marée est basse, l'écluse est fermée
- (3) Si l'écluse est fermée, je ne peux aller en mer
- (4) La marée est basse et il fait un temps radieux

(C) Je ne vais pas en mer

- a) Traduire ce raisonnement dans la logique des propositions.
- b) En utilisant la méthode des tables de vérité, dire si ce raisonnement est valide.

Exercice 08 :

Samir se prépare à réviser ses examens de septembre. Seul dans sa chambre, il réfléchit sur la stratégie à adopter et se tient le raisonnement suivant :

- (H1) S'il fait beau demain, pour que je puisse travailler il faut que je me lève tôt.
 - (H2) Il va faire beau demain.
 - (H3) C'est décidé ; je vais travailler ou bien me lever tôt.
-

(C) Donc, par conséquent, c'est bien sûr, si je me lève tôt, je vais travailler.

1. Traduisez les trois hypothèses et la conclusion sous forme de formules logiques.
2. Le raisonnement de Samir est-il valide? Justifiez la réponse par la méthode des tables de vérité.

Exercice 09 :

Résolution d'une énigme par la logique des propositions. Vous êtes perdus sur une piste dans le désert. Vous arrivez à une bifurcation. Chacune des deux pistes est gardée par un sphynx que vous pouvez interroger. Les pistes peuvent soit conduire à une oasis, soit se perdre dans le désert profond (au mieux, elle conduisent toutes à une oasis, au pire elles se perdent toutes les deux).

- A. Le sphynx de droite vous répond : « Une au moins des deux pistes conduit à une oasis. »
- B. Le sphynx de gauche vous répond : « La piste de droite se perd dans le désert. »
- C. Vous savez que les sphynx disent tous les deux la vérité, ou bien mentent tous les deux.

Exercice 10:

Il existe en Alger un club qui obéit aux règles suivantes :

- a) Tout joueur algérois porte un short.
 - b) Tout joueur qui porte un short est algérois et marié.
 - c) Tout joueur non algérois porte des chaussettes rouges.
 - d) Tout joueur porte un short ou ne porte pas de chaussettes rouges.
 - e) Les joueurs mariés ne sortent pas le vendredi.
 - f) Un joueur sort le vendredi si et seulement s'il est algérois.
1. Traduire l'énoncé ci-dessus en logique propositionnelle.
 2. Prouver en utilisant la méthode de résolution que l'ensemble est insatisfiable.

3. Résolution

Exercice 01 :

On a :

P : Omar est fort en maths.

Q : Omar est fort en informatique.

Donc, on va représenter sous formes symboliques les affirmations suivantes :

1. Omar est fort en maths mais faible en informatique.
 $P \wedge \neg Q$
2. Omar n'est ni fort en maths, ni fort en informatique.
 $\neg P \wedge \neg Q$
3. Omar est fort en maths s'il est fort en informatique.
 $Q \rightarrow P$

Exercice 02 : on va construire les tables de vérité des formules suivantes :

1. $\neg p \rightarrow p \vee q$

P	$\neg P$	q	$p \vee q$	$\neg P \rightarrow p \vee q$
vrai	faux	faux	vrai	vrai
vrai	faux	vrai	vrai	vrai
faux	vrai	faux	faux	faux
faux	vrai	vrai	vrai	vrai

2. $(\bar{p} \vee \bar{q})$

P	$\neg P$	q	$\neg q$	$\neg P \vee \neg q$
vrai	faux	faux	vrai	vrai
vrai	faux	vrai	faux	faux
faux	vrai	faux	vrai	vrai
faux	vrai	vrai	faux	vrai

Exercice 03 :

Pour chacun des trois ensembles de formules suivants, on va indiquer s'il est inconsistant. Dans le cas contraire, on va donner un modèle :

a) $\{p \vee q, p \rightarrow q, \neg q\}$

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\neg q$	Ens= $\{p \vee q, p \rightarrow q, \neg q\}$
vrai	vrai	vrai	vrai	faux	faux
vrai	faux	vrai	faux	vrai	faux
faux	vrai	vrai	vrai	faux	faux
faux	faux	faux	vrai	vrai	faux

L'ensemble de formule est inconsistant.

b) $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow \neg p\}$

p	q	r	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$r \rightarrow \neg p$	Ens= $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow \neg p\}$
vrai	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux
vrai	vrai	faux	faux	vrai	faux	vrai	faux
vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai	faux	faux
vrai	faux	faux	faux	faux	vrai	vrai	faux
faux	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux
faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	faux
faux	faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai

L'ensemble de formule est consistant, le modèle = $\{p = \text{faux}, q = \text{vrai}, r = \text{vrai}\}$.

p	q	r	s	$\neg s$	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$r \rightarrow \neg p$	$p \vee \neg s$	Ens= $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow \neg p, p \vee \neg s, s\}$
vrai	vrai	vrai	vrai	faux	faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux
vrai	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux
vrai	vrai	faux	vrai	faux	faux	faux	faux	vrai	vrai	faux
vrai	vrai	faux	faux	vrai	faux	faux	faux	vrai	vrai	faux
vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
vrai	faux	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	vrai	vrai	vrai	faux	faux	vrai	vrai	faux	faux	faux
faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux
faux	vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai	faux	vrai	faux	faux
faux	vrai	faux	faux	vrai	faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux
faux	faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	faux
faux	faux	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	faux	faux	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	faux

faux	faux	faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

c) $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow \neg p, p \vee \neg s, s\}$

L'ensemble de formule est consistant, le modèle = $\left\{ p = \text{vrai}, q = \text{faux}, r = \text{vrai}, s = \text{faux} \right\}$.

Exercice 04 :

Montrez, par la méthode des tables de vérité, que :

a) $p \Leftrightarrow q \models p \rightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$
vrai	vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux	faux
faux	vrai	faux	vrai
faux	faux	vrai	vrai

Tout modèle de $p \Leftrightarrow q$ est un modèle de $p \rightarrow q$. Donc, il y a une conséquence logique entre $p \Leftrightarrow q$ et $p \rightarrow q$.

b) $p \Leftrightarrow \neg q \models p \rightarrow q$

p	q	$\neg q$	$p \Leftrightarrow \neg q$	$p \rightarrow q$
vrai	vrai	faux	faux	vrai
vrai	faux	vrai	vrai	faux
faux	vrai	faux	vrai	vrai
faux	faux	vrai	faux	vrai

Tout modèle de $p \Leftrightarrow \neg q$ est un modèle de $p \rightarrow q$. Donc, il y a une conséquence logique entre $p \Leftrightarrow \neg q$ et $p \rightarrow q$.

c) $\text{vrai} \models r \rightarrow (s \rightarrow (t \wedge s \rightarrow r))$

r	s	t	$t \wedge s$	$t \wedge s \rightarrow r$	$s \rightarrow (t \wedge s \rightarrow r)$	vrai	$r \rightarrow (s \rightarrow (t \wedge s \rightarrow r))$
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
vrai	vrai	faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai
vrai	faux	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	vrai	vrai	vrai	faux	faux	vrai	vrai
faux	vrai	faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	faux	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	faux	faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai

La formule $r \rightarrow (s \rightarrow (t \wedge s \rightarrow r))$ est toujours vrai. Donc, il y a une conséquence logique entre *vrai* et $r \rightarrow (s \rightarrow (t \wedge s \rightarrow r))$.

d) $\{q \rightarrow (r \wedge s), \neg r \vee \neg s\} \models \neg q$

q	r	s	$r \wedge s$	$\neg r \vee \neg s$	$q \rightarrow (r \wedge s)$	Ens= $\{q \rightarrow (r \wedge s), \neg r \vee \neg s\}$	$\neg q$
vrai	vrai	vrai	vrai	faux	vrai	faux	faux
vrai	vrai	faux	faux	vrai	faux	faux	faux
vrai	faux	vrai	faux	vrai	faux	faux	faux
vrai	faux	faux	faux	vrai	faux	faux	faux
faux	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	vrai	faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	faux	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	faux	faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai

Tout modèle de $\{q \rightarrow (r \wedge s), \neg r \vee \neg s\}$ est un modèle de $\neg q$. Donc, il y a une conséquence logique entre $\{q \rightarrow (r \wedge s), \neg r \vee \neg s\}$ et $\neg q$.

Exercice 07 :

c) Traduire ce raisonnement dans la logique des propositions.

B : il fait beau.

M : je vais en mer.

R : la marée est basse.

L : l'écluse est fermée.

Donc,

(1) S'il fait beau, je vais en mer $B \rightarrow M$

(2) Si la marée est basse, l'écluse est fermée $R \rightarrow L$

(3) Si l'écluse est fermée, je ne peux aller en mer $L \rightarrow \neg M$

(4) La marée est basse et il fait un temps radieux $R \wedge \neg B$

(C) Je ne vais pas en mer $\neg M$

d) En utilisant la méthode des tables de vérité, dire si ce raisonnement est valide.

B	M	R	L	$\neg B$	$B \rightarrow M$	$R \rightarrow L$	$L \rightarrow \neg M$	$R \wedge \neg B$	Ens	$Ens \rightarrow \neg M$
---	---	---	---	----------	-------------------	-------------------	------------------------	-------------------	-----	--------------------------

vrai	vrai	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	faux	faux	vrai
vrai	vrai	vrai	faux	faux	vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai
vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	faux	faux	vrai
vrai	vrai	faux	faux	faux	vrai	vrai	vrai	faux	faux	vrai
vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux	vrai	faux	faux	faux	vrai
vrai	faux	vrai	faux	faux	faux	faux	vrai	faux	faux	vrai
vrai	faux	faux	vrai	faux	faux	vrai	faux	faux	faux	vrai
vrai	faux	faux	faux	faux	faux	vrai	vrai	faux	faux	vrai
faux	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai
faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai
faux	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	faux	faux	vrai
faux	vrai	faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	faux	vrai
faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	vrai	faux	faux
faux	faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux
faux	faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	faux	faux	faux
faux	faux	faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	faux	faux

On a $Ens \rightarrow M$ est une tautologie, donc il y a une conséquence logique entre $\{B \rightarrow M, R \rightarrow L, L \rightarrow M, R \wedge \neg B\}$ et M .

Exercice 08 :

1. Traduisez les trois hypothèses et la conclusion sous forme de formules logiques.

On a :

B : il fait beau.

T : je puise travailler.

V : je me lève tôt.

Donc ,

(H1) S'il fait beau demain, pour que je puisse travailler il faut que je me lève tôt.

$$B \rightarrow (V \rightarrow T)$$

(H2) Il va faire beau demain. B

(H3) C'est décidé ; je vais travailler ou bien me lever tôt. $T \vee V$

(C) Donc, par conséquent, c'est bien sûr, si je me lève tôt, je vais travailler. $V \rightarrow T$

2. Le raisonnement de Samir est-il valide? Justifiez la réponse par la méthode des tables de vérité.

B	T	V	$V \rightarrow T$	$B \rightarrow (V \rightarrow T)$	$V \vee T$	Ens
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai

vrai	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai
vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai	faux
vrai	faux	faux	vrai	vrai	faux	faux
faux	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux
faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux
faux	faux	vrai	faux	vrai	faux	faux
faux	faux	faux	vrai	vrai	faux	faux

Tout modèle de $\{B \rightarrow V \rightarrow T, B, T \vee V\}$ est un modèle de $V \rightarrow T$. Donc le raisonnement est valide.

Exercice 09 :

On pose :de

D : « Il y a une oasis au bout de la route de droite. »

G : « Il y a une oasis au bout de la route de gauche. »

On a :

1. $A = D \vee G$
2. $B = \neg D$
3. $A \equiv B$ (formule F qu'on cherche à vérifier)

Mise sous forme normale conjonctive :

$$F = A \equiv B$$

$$= (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

$$= ((D \vee G) \rightarrow \neg D) \wedge (\neg D \rightarrow (D \vee G))$$

$$= (\neg(D \vee G) \vee \neg D) \wedge (\neg\neg D \vee (D \vee G))$$

$$= ((\neg D \wedge \neg G) \vee \neg D) \wedge (D \vee (D \vee G))$$

$$= (\neg D \vee \neg D) \wedge (\neg G \vee \neg D) \wedge (D \vee D \vee G)$$

$$= (\neg D) \wedge (\neg D \vee \neg G) \wedge (D \vee G)$$

$$= (\neg D) \wedge (D \vee G)$$

On aboutit à l'ensemble de clauses $C = \{\neg D, D \vee G\}$. L'application de la règle de résolution nous indique que la route de gauche conduit effectivement à une oasis :

$$\{\neg D, D \vee G\} = G.$$

Exercice 10 :

1. Traduire l'énoncé ci-dessus en logique propositionnelle :

- Tout joueur algérois porte un short $A \rightarrow S$.
- Tout joueur qui porte un short est algérois et marié. $S \rightarrow A \wedge M$.

- Tout joueur non algérois porte des chaussettes rouges. $\neg A \rightarrow R$.
- Tout joueur porte un short ou ne porte pas de chaussettes rouges $S \vee \neg R$.
- Les joueurs mariés ne sortent pas le vendredi $M \rightarrow \neg V$.
- Un joueur sort le vendredi si et seulement s'il est algérois $V \Leftrightarrow A$.

2. Forme clausale :

$\{\neg A \vee S, \neg S \vee A, \neg S \vee M, A \vee R, S \vee \neg R, \neg M \vee \neg V, \neg V \vee A, \neg A \vee V\}$.

En appliquant le principe de résolution à cet ensemble, on produit la clause vide : cela signifie que l'ensemble est inconsistant.

- i. $A \vee R, S \vee \neg R \text{ ---- } A \vee S$.
- ii. $A \vee S, \neg A \vee S \text{ ---- } S$.
- iii. $S, \neg S \vee M \text{ ---- } M$.
- iv. $M, \neg M \vee \neg V \text{ ---- } \neg V$.
- v. $\neg V, \neg A \vee V \text{ ---- } \neg A$.
- vi. $\neg A, \neg S \vee A \text{ ---- } \neg S$.
- vii. $\neg S, S \text{ ---- } \perp$.

Donc, l'ensemble est insatisfiable.

4. Logique de premier ordre

Avant d'étudier la logique de premier ordre, nous devons affirmer que la logique propositionnelle ne permet pas résoudre nos problèmes. Donc, comme nous savons, la logique propositionnelle ne permet de décrire que des constructions simples du langage, consistant essentiellement en des affirmations qui peuvent être vrais ou faux. On peut, grâce à elle, étudier dans un cadre formel la valeur de vérité de formules relativement peu expressives. Donc, la logique de propositions ne permet pas de représenter l'énoncé suivant :

Si X est le père de Y et Y est le père de Z on peut dire que X est le grand-père de Z .

La logique des prédicats, ou logique du premier ordre est par nature plus expressive que la logique des propositions, et permet de représenter ces types d'énoncé relatifs à des environnements complexes. Donc, on peut représenter l'énoncé précédent, en utilisant la logique de prédicats, comme suit :

$$\forall X, Y, Z \text{ Pere}(X, Y) \wedge \text{Pere}(Y, Z) \rightarrow \text{Grand-pere}(X, Z)$$

4.1. Alphabet de la logique des prédicat

Pour écrire un énoncé en logique des prédicats, nous allons utiliser un ensemble de symboles plus riche qu'en logique des propositions. Donc, la logique des prédicats peut être défini sur l'alphabet suivant:

- Un ensemble de variables $\{X, Y, Z, \dots\}$;
- Les quantificateurs universel \forall et existentiel \exists .
- Un ensemble de constantes $\{a, b, c, \dots\}$;
- Un ensemble de fonctions $\{f, g, h, \dots\}$;
- Un ensemble de prédicats, ou relations $\{P, Q, \dots\}$;
- Des connecteurs logiques, $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \dots\}$, ainsi que les parenthèses '(' et ')' ;

4.2. Termes

Toutes expression logique qui renvoie à un objet peut-être appelé un terme. Donc :

- Toute constante est un terme.
- Toute variable est un terme.
- Et aussi, si f est une fonction et T_1, \dots, T_n sont des termes alors $f(T_1, \dots, T_n)$ est aussi un terme .

4.3. Quantificateurs

On a deux types de quantificateurs :

- Le quantificateur universel qui exprime le fait que tous les éléments d'un ensemble d'objets sur lequel s'exprime un prédicat vérifient ce prédicat, c'est-à-dire $\forall X F(X)$ est vrai revient à considérer que $F(x_1) \wedge \dots \wedge F(x_n)$ est vrai, si $\{x_1, \dots, x_n\}$ est le domaine de X .
- Le quantificateur existentiel exprime le fait qu'au moins un des éléments d'un ensemble d'objets sur lequel s'exprime un prédicat vérifie ce prédicat, c'est-à-dire $\exists X F(X)$ est vrai revient à considérer que $F(x_1) \vee \dots \vee F(x_n)$ est vrai, si $\{x_1, \dots, x_n\}$ est le domaine de X .

4.4. Formules

Une formule en logique des prédicats se construit similairement à une formule en logique des propositions. On doit seulement prendre en compte les quantificateurs, universel et existentiel :

1. $P(x_1, \dots, x_n)$ est une formule atomique ;
2. si F est une formule, alors $\neg F$ est une formule ;
3. si F et G sont des formules, alors $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, etc. sont des formules ;
4. si F est une formule et X une variable, alors $\forall x F(X)$ et $\exists x F(X)$ sont des formules.

4.5. Un littéral

C'est une formule atomique ou la négation d'une formule atomique.

Exemple : Soit le prédicat F et les termes x_i et x_j . Alors $F(x_i, x_j)$ est un littéral et $\neg F(x_i, x_j)$ est aussi littéral .

4.6. Les variables libres et liées

Les variables libres sont des variables qui ne sont pas quantifiées. Par contre, Les variables sont dites liées quand elles sont quantifiées.

Exemple :

- L'énoncé « Certains étudiants assistent à tous les cours. » peut être représenté par :

$$\exists X (\text{Etudiant}(X) \wedge (\forall Y \text{Assiste}(X, Y)))$$

Les variable X et Y sont liées.

- L'énoncé « Aucun étudiant n'assiste à un cours inintéressant. » peut être représenté par :
- $\neg \exists X (\text{Etudiant}(X) \rightarrow (\text{Assiste}(X, Y) \wedge \neg \text{Interessant}(Y)))$.

Le variable Y est libre.

4.7. Forme normale de Prénexe

Une formule F est en forme normale de Prénexe si et seulement si F est sous la forme :

$$F = (Q_1 x_1) (Q_2 x_2) \dots (Q_n x_n) M$$

Avec Q_i sont des quantificateurs qcq (\forall ou \exists), et M une formule sans quantificateurs appelée Matrice.

Exemple:

$$F = (\forall x) (\exists y) (\exists z) (P(x, y) \rightarrow Q(y, z))$$

Remarque: Toute f.b.f admet une forme normale de prénexe équivalente.

Exemples : mettre sous forme normale de Prénexe la formule

$$F = ((\forall x) P(x) \wedge (\exists y) Q(y)) \rightarrow ((\exists x) R(x)).$$

$$\begin{aligned} F &\equiv \neg (\forall X P(X) \wedge \exists Y Q(Y)) \vee (\exists X R(X)) \\ &\equiv (\exists X \neg P(X) \vee \forall Y \neg Q(Y)) \vee (\exists X R(X)) \\ &\equiv \exists X \forall Y \neg P(X) \vee \neg Q(Y) \vee R(X), \text{ donc } M = \neg P(X) \vee \neg Q(Y) \vee R(X). \end{aligned}$$

4.8. Forme standard de Skolem (la skolémisation)

Elle consiste à supprimer les quantificateurs existentiels (\exists) de la formule qui doit être d'abord en forme normale de prénexe.

Pour mettre une formule F sous forme standard de Skolem on réalise les étapes suivantes :

- 1) Mettre F sous forme normale de Prénexe :

$$F = Q_1 X_1 Q_2 X_2 \dots Q_n X_n M$$

- 2) Mettre M sous forme normale conjonctive :

$$M = M_1 \wedge M_2 \wedge \dots \wedge M_k$$

- 3) Pour tout quantificateur $Q_i = \square$:

- S'il n'y a aucun \forall à gauche de Q_i alors supprimer $Q_i X_i$ et remplacer X_i dans M par une constante non déjà existante.

- Si Q_j, Q_{j+1}, \dots, Q_l sont des Quantificateur (\forall) à gauche de Q_i alors supprimer ($Q_i X_i$) et remplacer X_i dans M par une fonction f de X_j, X_{j+1}, \dots, X_l : $f(X_j, X_{j+1}, \dots, X_l)$

Exemple :

$$\begin{aligned} \text{Soit } F &= \forall X P(X) \wedge \exists Y Q(Y) \\ F &\equiv \forall X \exists Y P(X) \wedge Q(Y) \\ &\equiv \forall X P(X) \wedge Q(f(X)) \quad Y/f(X). \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} F &\equiv \exists Y Q(Y) \wedge \forall X P(X) // \text{commutativité de } \wedge \\ &\equiv \exists Y \forall X Q(Y) \wedge P(X) \\ &\equiv \forall X Q(a) \wedge P(X) \quad Y/a. \end{aligned}$$

Remarque :

Une formule peut avoir plusieurs formes de Skolem différentes.

4.9. Forme clausale

Une forme clausale est une conjonction de clauses. Une clause est une disjonction de littéraux.

$P(X), P(X) \vee \neg Q(Y)$ sont des clauses.

Pour obtenir la forme clausale d'une formule F , il suffit de la mettre sous forme standard de Skolem :

$$F = \forall X_1 \forall X_2 \dots \forall X_n \quad M_1 \wedge M_2 \wedge \dots \wedge M_k.$$

La forme clausale de F est :

$$M_1 \wedge M_2 \wedge \dots \wedge M_k, \text{ qu'on note : } \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} F &= \exists X P(X) \rightarrow (\exists Y Q(Y) \rightarrow \exists Z R(Z)) \\ &\equiv (\forall X \neg P(X) \vee (\forall Y \exists Z \neg Q(Y) \vee R(Z))) \\ &\equiv (\forall X \forall Y \exists Z \neg P(X) \vee \neg Q(Y) \vee R(Z)) \\ &\equiv \forall X \forall Y \exists Z \neg P(X) \vee \neg Q(Y) \vee R(Z) \quad \text{forme normale de Prénexe} \end{aligned}$$

On remplace Z par une fonction de X et Y :

$\equiv \forall X \forall Y \neg P(X) \vee \neg Q(Y) \vee R(f(X,Y))$ la forme standard de skolem

Donc :

$F \equiv \{ \neg P(X) \vee \neg Q(Y) \vee R(f(X,Y)) \}$ la forme clausale

4.10. Méthode de normalisation d'une formule

Pour mettre une formule F sous la forme clausale, on utilise essentiellement quelques équivalences connues en logique, en suivant les étapes de l'algorithme suivant.

1. Élimination de (\equiv) par le remplacement de $(P(X) \equiv Q(Y))$ par $(P(X) \rightarrow Q(Y)) \wedge (Q(Y) \rightarrow P(X))$.
2. Élimination de (\rightarrow) par le remplacement de $(P(X) \rightarrow Q(Y))$ par $(\neg P(X) \vee Q(Y))$.
3. La forme normale conjonctive exige que la négation \neg n'apparaissent que dans les littéraux. On utilise donc l'annulation de la double négation ainsi que les règles de réécriture dérivées des lois de Morgan :
 - Le remplacement de $\neg\neg P(X)$ par $P(X)$;
 - Le remplacement de $\neg(P(X) \wedge Q(Y))$ par $(\neg P(X) \vee \neg Q(Y))$;
 - remplacement de $\neg(P(X) \vee Q(Y))$ par $(\neg P(X) \wedge \neg Q(Y))$.
4. Des trois étapes précédentes, on obtient une expression ne contenant plus que des \wedge et des \vee . On applique autant de fois que nécessaire les lois de distribution.

$$P(X) \vee (Q(Y) \wedge R(Z)) \equiv ((P(X) \vee Q(Y)) \wedge (P(X) \vee R(Z)))$$

et

$$(P(X) \wedge (Q(Y) \vee R(Z))) \equiv ((P(X) \wedge Q(Y)) \vee (P(X) \wedge R(Z))).$$

L'expression obtenue à la fin de cette procédure est une forme clausale de la formule F qui est équivalent à la formule de départ F.

Remarques :

- Les clauses comportant deux littéraux opposés sont valides (tiers-exclu) et peuvent donc être supprimées (par ex. $P(X) \vee Q(Y) \vee \neg R(Z) \vee \neg Q(Y)$).
- On peut aussi supprimer les répétitions d'un littéral au sein d'une même clause (par exemple $\neg P(X) \vee Q(Y) \vee \neg R(Z) \vee \neg P(X)$ équivaut à $\neg P(X) \vee Q(Y) \vee \neg R(Z)$).
- Si dans une formule clausale une clause C_i est incluse dans une clause C_j alors la clause C_j peut être supprimée (la valeur de la conjonction des deux clauses ne dépend que de la valeur de C_i).

Par exemple : $C_i = P(X) \vee Q(Y) \vee R(Z)$ et $C_j = P(X) \vee \neg S(t) \vee F(v) \vee Q(Y) \vee R(Z)$.

4.11. Clauses de Horn

Une clause de Horn est une disjonction de littéraux, c'est-à-dire en fait une clause dont un seul au maximum de ses littéraux est positive. Par exemple, $\neg P(X) \vee \neg Q(Y) \vee R(a)$, $\neg S(X) \vee \neg R(Z)$ ou encore simplement le littéral R sont des clauses de Horn, tandis que $P(X) \vee Q(Y) \vee \neg R(Z)$ n'en est pas une car il avait deux littéraux positifs.

L'idée d'avoir ce genre de clauses est qu'on peut les écrire comme une conjonction de littéraux positifs impliquant un littéral positif unique. Par exemple $\neg P(X) \vee \neg Q(Y) \vee R(a)$ est logiquement équivalent à $(P(X) \wedge Q(Y)) \rightarrow R(a)$. La partie se situant à gauche de l'implication s'appelle la prémisses, et la partie se situant à sa droite la conclusion. Une autre façon de nommer prémisses et conclusion est la suivante : on appelle corps l'ensemble des littéraux négatifs de la clause, et tête son unique littéral positif lorsqu'il existe.

On appelle clauses **règle**, les clauses de Horn qui ayant exactement un littéral positif.

Par exemple, $\neg P(X) \vee \neg Q(Y) \vee R(a)$ ou bien R sont définies, alors que $\neg S(X) \vee \neg R(Z)$ ne l'est pas.

Un **fait** est une clause de Horn définie dépourvue de littéraux négatifs.

Par exemple $R(Z)$ et Q sont des faits, et $\neg P(X)$ et $\neg S(X) \vee \neg R(Z)$ n'en sont pas.

4.12. Chaînage avant et chaînage arrière

Il existe essentiellement deux algorithmes d'inférence pour réaliser des déductions sur des clauses de Horn. Ils s'appellent chaînage avant et chaînage arrière, et sont tout à fait naturels pour les humains. Ils présentent en outre l'avantage d'effectuer un calcul de résolution en temps linéaire par rapport à la taille de l'ensemble des connaissances. Les clauses de Horn constituent donc une restriction³ efficace dans de nombreux cas pratiques de problèmes de raisonnement en logique.

4.12.1. Chaînage avant

Le chaînage avant consiste à combiner des faits connus vrai et en utilisant les règles pour des nouveaux faits vrais. On va utiliser le schéma de résolution modus ponens.

Exemple :

- Les gens qui ont la rougeole doivent prendre le médicament M

$$(\forall X R(X) \rightarrow M).$$

- Les gens qui ont de la fièvre et des points rouges au fond de la gorge ont la rougeole

$$(\forall X F(X) \wedge G(X)) \rightarrow R(X).$$

- Ceux pour qui la température est au-dessus de 38° sont considérés comme ayant de la fièvre

$(\forall X T(X) \rightarrow F(X)).$

- Ahmed a des points rouges au fond de la gorge et a une température de 39°5

$(\exists X = \text{ahmed} , G(\text{Ahmed}) \wedge T(\text{Ahmed})).$

On doit mettre l'énoncé précédent en forme clausale :

- R1 : $R(X) \rightarrow M$
- R2 : $(F(X) \wedge G(X)) \rightarrow R(X)$
- R3 : $T(X) \rightarrow F(X)$
- F1: $G(\text{Ahmed})$
- F2: $T(\text{Ahmed}).$

Donc, on peut utiliser le chaînage avant pour déduire M.

Alors, on a $T(\text{Ahmed})$ est vrai, donc on utilisant la règle R3 tel que $X = \text{Ahmed}$, on peut déduire que $F(\text{Ahmed})$ est vrai. Aussi, on a $G(\text{Ahmed})$ est vrai et $F(\text{Ahmed})$ est vrai, on utilisant la règle R2, on peut déduire que $R(\text{Ahmed})$ est vrai. En fin, en utilisant la règle R1, on peut conclure M.

4.12.2. Chaînage arrière

Dans le chaînage arrière, on part du but que l'on veut atteindre, autrement dit un fait que l'on cherche à déduire de nos connaissances.

Exemple de raisonnement :

M est-il un fait connu ? Non. On considère alors les règles dans lesquelles M est une conséquence, c'est-à-dire celles où M est la tête. Nous avons $R(X) \rightarrow M$. Il faut désormais prouver $R(X)$ par chaînage arrière.

- $R(X) ? . (F(X) \wedge G(X)) \rightarrow R(X),$
- $F(X) ? T(X) \rightarrow F(X)$
- $T(X) ?$ oui si $X = \text{Ahmed}$, donc $T(\text{Ahmed}).$
- $G(\text{Ahmed}) ?$ oui, donc $R(\text{Ahmed}).$

Nous avons satisfait toutes les règles qui permet de déduire M par chaînage arrière, de ce fait on conclut M. Le raisonnement qui utilise le chaînage arrière est aussi appelé raisonnement guidé par le but. Le moteur d'inférence de PROLOG utilise essentiellement ce principe pour répondre aux questions des utilisateurs.

5. Exercices :

Exercice 01 : Traduire les assertions suivantes en logique de Prédicats :

1. Tous les professeurs sont intelligents.
2. Il existe un professeur intelligent.
3. Si un professeur enseigne le PL, il est intelligent.
4. Tout le monde aime tout le monde.
5. Tout le monde aime les glaces.
6. Tout le monde aime quelqu'un.
7. Quelqu'un aime tout le monde.
8. Certains étudiants assistent à tous les cours.

9. Tous les lions sont féroces.
10. Quelques lions ne mangent pas la viande.
11. Tous les singes sont malicieux.

Exercice 02 :

Mettre sous forme prénexe les formules suivantes :

- a) $(\neg \exists x P(x) \vee \forall x Q(x)) \wedge (R \rightarrow \forall x S(x))$
- b) $\neg((\neg \exists x P(x) \vee \forall x Q(x)) \wedge (R \rightarrow \forall x S(x)))$
- c) $\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x Q(x)$

Exercice 03 :

Mettre sous forme clausale les formules suivantes :

- a) $\forall x \exists y \forall z (R(x, y, z) \rightarrow \forall t \exists z S(t, z))$
- b) $\forall y \exists x R(x, y) \Leftrightarrow \forall z \forall x R(z, x)$
- c) $\forall x \forall y (F(x, y) \rightarrow \exists z (P(x, z) \wedge P(y, z)))$
- d) $\forall x (P(x) \wedge \forall y \exists t (\neg Q(t, y)) \rightarrow \forall z R(A, t, y))$

Exercice 04 :

On voudrait prouver la conclusion "Aucun étudiant sous-gradué n'est inscrit en PL" à partir de l'énoncé suivante: « Tous les étudiants inscrits en cours PL sont des étudiants gradués. »

- a) Traduire les énoncés en logique des prédicats.
- b) Prouver la conclusion par la méthode de réfutation.

Exercice 05 :

Soient les formules suivantes :

$$H1 = \exists x (P(x) \wedge \forall y (D(y) \rightarrow L(x, y)))$$

$$H2 = \forall x (P(x) \rightarrow (\forall y Q(y) \rightarrow \neg L(x, y)))$$

$$C = \forall x (D(x) \rightarrow \neg Q(x))$$

Montrer, en utilisant la méthode de réfutation que $\{H1, H2\} \models C$

Exercice 06 :

Soient les énoncés suivants :

- F1 - Quiconque sait lire est instruit.
 - F2 - Les dauphins ne sont pas instruits.
 - F3 - Certains dauphins sont intelligents.
1. Représenter ces assertions en logique de prédicats.
 2. soit l'assertion suivant :
 - C- Certains être intelligents ne savent pas lire.

Utiliser la méthode de résolution par réfutation pour montrer que C est une conséquence logique de {F1, F2, F3}.

Exercice 07

1. Représenter en logique des prédicats les énoncés suivants :
H1: Pour tout crime, il y a quelqu'un qui l'a commis.
H2: Seuls les gens malhonnêtes commettent des crimes.
H3: Ne sont arrêtés que des gens malhonnêtes.
H4: Les gens malhonnêtes arrêtés ne commettent pas de crimes.
H5: Il y a des crimes.
C : Il y a des gens malhonnêtes non arrêtés.
2. Donner les formes de Prénexe et de Skolem correspondant aux énoncés H1, H2, H3, H4, H5. Détaillez !.
3. A-t-on $\{H1, H2, H3, H4, H5\} \models C$? Utiliser la résolution par réfutation.

6. Résolution

Exercice 01 : Traduire les assertions suivantes en logique de Prédicats :

1. Tous les professeurs sont intelligents.
 $\forall x, Pr(x) \rightarrow Int(x)$
2. Il existe un professeur intelligent.
 $\exists x, Pr(x) \wedge int(x)$
3. Si un professeur enseigne le PL, il est intelligent.
 $\forall x, Ens(x, Pl) \rightarrow int(x)$

4. Tout le monde aime tout le monde.
 $\forall x, y \text{ aime}(x, y)$
5. Tout le monde aime les glaces.
 $\forall x \text{ aime}(x, \text{glaces})$
6. Tout le monde aime quelqu'un.
 $\forall x \exists y \text{ aime}(x, y)$
7. Quelqu'un aime tout le monde.
 $\exists x \forall y \text{ aime}(x, y)$
8. Certains étudiants assistent à tous les cours.
 $\exists x \text{ Etud}(x) \wedge \forall y \text{ assiste}(x, y)$
9. Tous les lions sont féroces.
 $\forall x \text{ lion}(x) \rightarrow \text{féroces}(x)$
10. Quelques lions ne mangent pas la viande.
 $\exists x \text{ lion}(x) \wedge \neg \text{viande}(x)$
11. Tous les singes sont malicieux.
 $\forall x \text{ singe}(x) \rightarrow \text{malicieux}(x)$

Exercice 02 :

Mettre sous forme préfixe les formules suivantes :

a) $(\neg \exists x P(x) \vee \forall x Q(x)) \wedge (R \rightarrow \forall x S(x))$
 $(\forall x \neg P(x) \vee \forall x Q(x)) \wedge (\neg R \vee \forall x S(x))$
 $\forall x (\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg R \vee \forall x S(x))$ f.prefixe

b) $\neg((\neg \exists x P(x) \vee \forall x Q(x)) \wedge (R \rightarrow \forall x S(x)))$
 $((\exists x P(x) \vee \exists x \neg Q(x)) \vee (\neg R \vee \exists x \neg S(x)))$
 $\exists x((P(x) \vee \neg Q(x)) \vee (\neg R \vee \neg S(x)))$ f.prefixe

c) $\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x Q(x)$

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \wedge \exists x Q(x) \rightarrow \forall x P(x)$$

$$(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \wedge (\forall x Q(x) \vee \forall x P(x))$$

$\exists x \forall y (P(x) \vee \exists x Q(x)) \wedge (Q(y) \vee P(y))$ f.prefixe / on doit changer les variables à cause l'existence de différents quantificateurs pour le même variable.

Exercice 03 :

Mettre sous forme clausale les formules suivantes :

- a) $\forall x \exists y \forall z (R(x, y, z) \rightarrow \forall t \exists z S(t, z))$
 $\forall x \exists y \forall z (\neg R(x, y, z) \vee \forall t \exists z S(t, z))$
 $\forall x \exists y \forall z \forall t \exists r (\neg R(x, y, z) \vee S(t, r))$ f.prenexe / change z par r.
 $\forall x \forall z \forall t (\neg R(x, f(x), z) \vee S(t, g(x, z, t)))$ forme skolem
 $\{\neg R(x, f(x), z) \vee S(t, g(x, z, t))\}$ forme clause
- b) $\forall y \exists x R(x, y) \Leftrightarrow \forall z \forall x R(z, x)$
 $\forall y \exists x R(x, y) \rightarrow \forall z \forall x R(z, x) \wedge \forall z \forall x R(z, x) \rightarrow \forall y \exists x R(x, y)$
 $(\exists y \forall x \neg R(x, y) \vee \forall z \forall x R(z, x)) \wedge (\exists z \exists x \neg R(z, x) \vee \forall y \exists x R(x, y))$
 $(\exists y \forall x \forall z \neg R(x, y) \vee R(z, x)) \wedge (\exists z \exists x \forall y \neg R(z, x) \vee R(x, y))$
 $(\exists y \forall x \forall z \neg R(x, y) \vee R(z, x)) \wedge (\exists t \exists r \forall v \neg R(t, r) \vee R(r, v))$
 $\exists y \forall x \forall z \exists t \exists r \forall v (\neg R(x, y) \vee R(z, x)) \wedge (\neg R(t, r) \vee R(r, v))$ f.prenexe
 $\forall x \forall z \forall v (\neg R(x, a) \vee R(z, x)) \wedge (\neg R(f(x, z), g(x, z)) \vee R(p(x, z), v))$ f.skolem
 $\{\neg R(x, a) \vee R(z, x) \wedge (\neg R(f(x, z), g(x, z)) \vee R(p(x, z), v))\}$ f.clausale

Exercice 04 :

- a) Traduire les énoncés en logique des prédicats.
On suppose qu'on a seulement deux types d'étudiants : gradué ou sous-gradué. On utilise X et Y comme des variables.
H1 : $\forall x \text{ inscrit}(X, Pl) \rightarrow \text{gradue}(X)$
C : $\neg \exists \text{ sous-gradue}(X) \wedge \text{inscrit}(X, Pl)$
- b) Prouver la conclusion par la méthode de réfutation.
H1 : $\neg \text{inscrit}(X, Pl) \vee \text{gradue}(X)$ f.clausale
 $\neg C : \neg(\neg \exists Y \text{ sous-gradue}(Y) \wedge \text{inscrit}(Y, Pl))$
 $: \neg(\forall Y \text{ gradué}(Y) \vee \neg \text{inscrit}(Y, Pl))$ f.prenexe
 $: \neg(\text{ gradué}(Y) \vee \neg \text{inscrit}(Y, Pl))$ f.skolem
 $: \neg \text{gradué}(Y) \wedge \text{inscrit}(Y, Pl)$
 $\{\neg \text{gradué}(Y), \text{inscrit}(Y, Pl)\}$ f.clausale
 $\text{inscrit}(Y, Pl), \neg \text{inscrit}(X, Pl) \vee \text{gradue}(X) = \text{gradue}(X)$
 $\neg \text{gradué}(X), \text{gradué}(X) = \perp$

Donc, on peut prouver la conclusion à partir de la phrase donnée.

Exercice 05 :

Soient les formules suivantes :

$$H1 = \exists x (P(x) \wedge \forall y (D(y) \rightarrow L(x, y)))$$

$$H2 = \forall x (P(x) \rightarrow (\forall y (Q(y) \rightarrow \neg L(x, y))))$$

$$C = \forall x (D(x) \rightarrow \neg Q(x))$$

La forme prénexe est :

$$H1 = \exists x (P(x) \wedge \forall y (\neg D(y) \vee L(x, y)))$$

$$H1 = \exists x \forall y (P(x) \wedge (\neg D(y) \vee L(x, y)))$$

$$H2 = \forall x \forall y (P(x) \rightarrow (\neg Q(y) \vee \neg L(x, y)))$$

$$H2 = \forall x \forall y (\neg P(x) \vee (\neg Q(y) \vee \neg L(x, y)))$$

$$H2 = \forall x \forall y (\neg P(x) \vee (\neg Q(y) \vee \neg L(x, y)))$$

$$C = \forall x (\neg D(x) \vee \neg Q(x))$$

La forme skolem

$$H1 = \forall y (P(a) \wedge (\neg D(y) \vee L(a, y))) \quad x/a$$

$$H2 = \forall x \forall y (\neg P(x) \vee (\neg Q(y) \vee \neg L(x, y)))$$

$$C = \forall x (\neg D(x) \vee \neg Q(x))$$

La forme clausale

$$H1 = P(a), \neg D(y) \vee L(a, y)$$

$$H2 = \neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x, y)$$

$$C = \neg D(x) \vee \neg Q(x)$$

La résolution

{ A = P(a), B = $\neg D(y) \vee L(a, y)$, C = $\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x, y)$, E = D(x), F = Q(x) }. 0.5 points

G = B et C = $\neg D(y) \vee \neg P(a) \vee \neg Q(y)$. x/a.

I = G et E = $\neg P(a) \vee \neg Q(y)$ x/a.

K = I et A = $\neg Q(y)$

L = K et F = clause vide.

Donc, $\{H1, H2\} \models C$

Exercice 06 :

On considère les prédicats suivants :

$D(x)$: x est un dauphin.

$L(x)$: x sait lire.

$N(x)$: x est instruit.

$I(x)$: x est intelligent.

On a alors :

$$H1 = (\forall x) (L(x) \rightarrow N(x)) \equiv (\forall x) (\neg L(x) \vee N(x)) \equiv \{ \neg L(x) \vee N(x) \}$$

$$H2 = (\forall x) (D(x) \rightarrow \neg N(x)) \equiv (\forall x) (\neg D(x) \vee \neg N(x)) \equiv \{ \neg D(x) \vee \neg N(x) \}$$

$$H3 = (\exists x) (D(x) \wedge I(x)) \equiv D(a) \wedge I(a) \equiv \{ D(a), I(a) \}$$

$$C = (\exists x) (I(x) \wedge \neg L(x)) \Rightarrow \neg C \equiv (\forall x) (\neg I(x) \vee L(x)) \equiv \{ \neg I(x) \vee L(x) \}$$

donc :

$$\begin{aligned} \{ H1, H2, H3, \neg C \} &= \{ \neg L(x) \vee N(x), \neg D(x) \vee \neg N(x), D(a), I(a), \neg I(x) \vee L(x) \} \\ &= \{ \neg L(x) \vee \neg D(x), D(a), I(a), \neg I(x) \vee L(x) \} \quad a/x \\ &= \{ \neg L(a), I(a), \neg I(x) \vee L(x) \} \quad a/x \\ &= \{ \neg L(a), L(a) \} \quad a/x \\ &= \perp \end{aligned}$$

Exercice 07

1)

H1 : Pour tout crime, il y a quelqu'un qui l'a commis.

$$\forall x (\text{crime}(x) \rightarrow \exists y \text{ commis}(y, x))$$

H2 : Seuls les gens malhonnêtes commettent des crimes.

$$\forall y \forall x (\text{crime}(x) \wedge \text{commis}(y, x) \rightarrow \text{malhonnete}(y))$$

H3 : Ne sont arrêtés que des gens malhonnêtes.

$$\forall y (\text{arrete}(y) \rightarrow \text{malhonnete}(y))$$

H4 : Les gens malhonnêtes arrêtés ne commettent pas de crimes.

$$\forall y (\text{malhonnete}(y) \wedge \text{arrete}(y)) \rightarrow \neg \exists x (\text{crime}(x) \wedge \text{commis}(y, x))$$

H5 : Il y a des crimes.

$$\exists x \text{ crime}(x)$$

C : Il y a des gens malhonnêtes non arrêtés.

$$\exists y (\text{malhonnete}(y) \wedge \neg \text{arrete}(y))$$

2) Donner les formes de Skolem correspondant aux énoncés H1, H2, H3, H4, H5.

$$H1 : \neg \text{crime}(x) \vee \text{commis}(f(x), x)$$

$$H2 : \neg \text{crime}(x) \vee \neg \text{commis}(y, x) \vee \text{malhonnete}(y)$$

$$H3 : \neg \text{arrete}(y) \vee \text{malhonnete}(y)$$

$$H4 : \neg \text{malhonnete}(y) \vee \neg \text{arrete}(y) \vee \neg \text{crime}(x) \vee \neg \text{commis}(y, x)$$

$$H5 : \text{crime}(a).$$

4) A-t-on $\{H1, H2, H3, H4, H5\} \models C$? Utiliser la résolution par réfutation.

$$\{H1, H2, H3, H4, H5\} \models C \text{ ssi } \{H1, H2, H3, H4, H5\} \cup \{\neg C\} \text{ incohérent.}$$

$$6) : \neg C : \neg(\exists y \text{ malhonnete}(y) \wedge \neg \text{arrete}(y)) = \forall y \neg \text{malhonnete}(y) \vee \text{arrete}(y)$$

skolémisation : clause prédicative (6) $\neg \text{malhonnete}(y) \vee \text{arrete}(y)$

(H1) et (H5) avec x/a : résolvente (7) $\text{commis}(f(a), a)$
 (7) et (H2) avec x/a et $y/f(a)$: résolvente (8) $\neg\text{crime}(a) \vee \text{malhonnete}(f(a))$
 (8) et (5) : résolvente (9) $\text{malhonnete}(f(a))$
 (7) et (4) avec x/a et $y/f(a)$: résolvente (10) $\neg\text{malhonnete}(f(a)) \vee \neg\text{arrete}(f(a)) \vee \neg\text{crime}(a)$
 (10) et (5) : résolvente (11) $\neg\text{malhonnete}(f(a)) \vee \neg\text{arrete}(f(a))$
 (11) et (9) : résolvente (12) $\neg\text{arrete}(a)$
 (12) et (6) : résolvente (13) $\neg\text{malhonnete}(f(a))$
 (13) et (9) : résolvente (14) : clause vide
 donc $\{H1, H2, H3, H4, H5\} \cup \{\neg C\}$ est incohérent, donc $\{H1, H2, H3, H4, H5\} \models C$.