عزوم التوزيعات الاحتمالية

أولا : التوقع Expected Value :-

إذا كان x متغيرا متصل كثافة احتماله $f(x)$ فإن المقدار

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

عبارة عن مقدار ثابت يعرف بالتوقع .

أما إذا كان x متغيرا متقطعا يأخذ القيم $x_r \; ; \; r = 1,2,3 \ldots \ldots \ldots$ فإن التوقع في هذه الحالة يكون

$$E(x) = \sum_{r=1} x_r f(x_r)$$

وعموما إذا أخذنا دالة في المتغير x ولتكن $\phi(x)$ وكانت $f(x)$ كثافة احتمال المتغير x فإن :

$$E\left(\phi(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx$$

في حالة المتغير المتصل .

أو :

$$E\left(\phi(x)\right) = \sum_{r=1} \phi(x_r) f(x_r)$$

في حالة المتغير المتقطع .

وإذا خذنا متغيرين x, y كثافة احتمالهما المشتركة هي $f(x,y)$ فإن :

$$E(xy) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y) dx dy$$

وتعرف بالعزم الأول للمتغيرين x, y حول الصفر ويرمز له بالرمز μ_{11} .

وعموما فإن المقدار :

$$E(x^r y^n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r y^n f(x,y) dx dy$$

ويعرف بالعزم r الرائي للمتغير x حول الصفر والعزم n النوني للمتغير y حول الصفر ويرمز له بالرمز μ_{rn}.

خواص دليل التوقع :

1) $E(ax) = aE(x)$ $\quad\quad a \;\; is\ a\ constant$

2) $E(a) = a$

3) $E(x+y) = E(x) + E(y)$

$E(x_1 + x_2 + \cdots \ldots \ldots + x_n) = E(x_1) + E(x_2) + \cdots \ldots \ldots + E(x_n)$

أي أن $\quad E(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i=1}^{n} E(x_i)$

4) $E(x_1 x_2) = E(x_1)E(x_2)$

وذلك إذا كان المتغيرين x_1, x_2 متغيران مستقلان فقط .

ثانياً : التباين Variance :-

هو احد مقاييس التشتت ، ويعرف بأنه :

$$Var(x) = V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 f(x) dx$$

$$= E[x - E(x)]^2$$

ويمكن كتابته على الشكل $V(x)$ أو على الشكل $Var(x)$ ، ويتضح هنا انه عبارة عن العزوم الثاني المركزي للمتغير ، أي انه عبارة عن μ_2 .

أي ان :

$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - {\mu_1}^2$$

$$= E(x^2) - [E(x)]^2$$

ثالثاً : التغاير Covariance :-

هو مقياس للارتباط بين المتغيرين x_1, x_2 .

فإذا كان لدينا المتغيرين x, y كثافة احتمالهما المشتركة هي $f(x,y)$ فإن التغاير يعرف كما يلي :

$$Cov(x,y) = E[\{x - E(x)\}\{y - E(y)\}]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\{x - E(x)\}\{y - E(y)\}] f(x,y) dx dy$$

ويرمز له بالرمز $Cov(x,y)$ أو $C(x,y)$.

ويلاحظ من الصيغة السابقة للتغاير أن :

$$Cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

رابعاً : معامل الارتباط بين متغيرين :-

يعرف المقدار

$$\rho = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}}$$

بمعامل الارتباط بين المتغيرين x, y .

الدالة المميزة Characteristic Function :

هي دالة يمكن عن طريقها الحصول على جميع العزوم للمتغير وتختلف عن الدالة المولدة للعزوم من ناحية أن الدالة المميزة توجد دائما من الناحية الرياضية بينما الدالة المولدة للعزوم قد لا توجد دائما .

فإذا كانت

$$\phi(\theta) = E\left(e^{\theta x}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x)dx$$

هي الدالة المولدة للعزوم للمتغير X الذي كثافة احتماله $f(x)$ فانه إذا أخذنا $i = \sqrt{-1}$ ووضعنا $i\theta$ بدلا من θ فإن :

$$E\left(e^{i\theta x}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} f(x)dx = \phi(\theta)$$

تسمى الدالة المميزة ، وهذه الدالة تكون دائما موجبة (لا قيمة نختارها للمعلمة θ) وعلى ذلك فخواص الدالة المميزة هي نفس خواص الدالة المولدة للعزوم .

خواص الدالة المولدة للعزوم :

إذا كانت $\phi(\theta)$ هي الدالة المولدة للعزوم لمتغير x فإن :

1) $\phi(0) = 1$
2) $\left[\frac{d^r}{d\theta^r}\phi(\theta)\right] = \phi^{(r)}(0) = \acute{\mu}_r = E(x^r)$
3) $E\left(e^{(ax+b)\theta}\right) = e^{b\theta}E\left(e^{ax\theta}\right) = e^{b\theta}\phi(a\theta) \qquad a, b \ constants$

مثال 1

أوجد الدالة المولدة للعزوم لمتغير يتبع توزيع بواسون ومنها اوجد توقع وتباين التوزيع :

الحل

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad ; \qquad x = 0,1,2, \dots \dots$$

$$\phi(\theta) = E\left(e^{\theta x}\right) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{\theta x}e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^\theta)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}/e^{\lambda e^\theta}$$

وهي الدالة المولدة للعزوم للتوزيع البواسوني ومنها يمكن إيجاد :

$$\acute{\phi}(\theta) = e^{-\lambda}.e^\theta.\lambda e^{\lambda e^\theta}$$

$$\grave{\acute{\phi}}(\theta) = \lambda e^{-\lambda}\left[e^\theta \lambda e^\theta e^{\lambda e^\theta} + e^\theta e^{\lambda e^\theta}\right]$$

$$= \lambda e^{-\lambda}e^\theta e^{\lambda e^\theta}(\lambda e^\theta + 1)$$

$$\therefore \mu = \acute{\phi}(\theta) = \lambda$$

$$\acute{\mu}_2 = \grave{\acute{\phi}}(\theta) = \lambda(\lambda + 1)$$

$$\therefore \sigma^2 = \acute{\mu}_2 - \mu^2 = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda$$