Université Hamma Lakhdar Eloued *année universitaire : 2020/2021*
Faculté de Technologie
Département Hydraulique et Géni Civil
1ére année Master Matériaux en Génie Civil
Module Elasticité

COURS ELASTICITE CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE

Généralité sur la MMC :

La mécanique des milieux continus (MMC) comprend toutes les disciplines scientifiques qui décrivent le comportement global des gaz, liquides et solides sous l'effet des perturbations externes. Elle concerne en général l'étude dynamique ou statique des corps rigides ou déformables. La théorie de l'élasticité, l'étude des fluides visqueux ou parfaits, la résistance des matériaux, la thermodynamique ce sont des exemples.

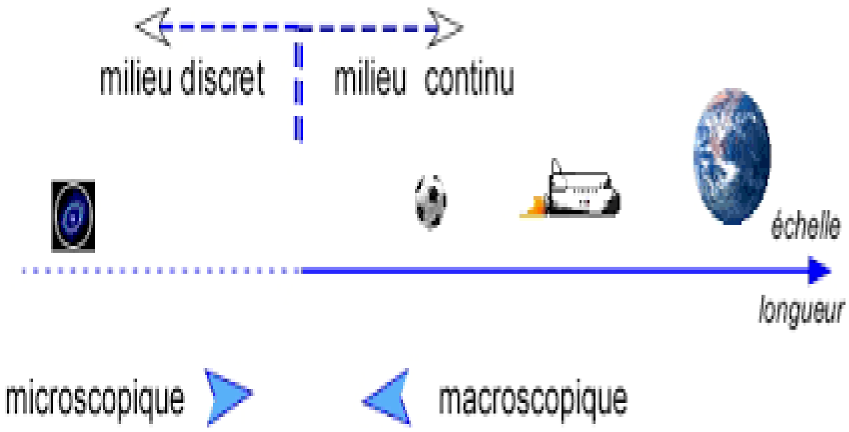
Les objectifs de la MMC sont :

- ✓ La schématisation du phénomène étudié (mouvement, déformation, comportement d'un matériau ou un corps, etc…) par la formulation mathématique des équations qui les décrivent.
- ✓ L'étude du modèle choisit par la solution des équations ou système d'équations, en général différentielles.
- ✓ Le retour au système réel et la compréhension de la signification physique de la solution dérivée.

La MMC fait intervenir plusieurs disciplines telle que: la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement, la notion de contrainte, la conservation de l'énergie.

Nous savons bien que la matière est constituée d'une structure discontinue à l'échelle moléculaire, mais en nous plaçant à l'échelle macroscopique nous considérons la matière comme étant continue, cette hypothèse simplificatrice permet d'éviter les détails de la théorie fine. Cependant dans un milieu continu, on adopte une analyse macroscopique: il s'agit donc d'ignorer tous les détails concernant la structure atomique, en remplaçant le milieu microscopique discontinu par un autre milieu fictif continu. Le modèle ainsi obtenu est un modèle qui traduise les différentes quantités telles que les déformations, déplacements et contraintes, comme des fonctions dépendantes du temps ou autre système de coordonnées.

Nous appellerons milieu continus solides tout domaine de l'espace occupé par un solide réel où les propriétés physiques attachées aux distribution de la matière (masse volumique, chaleur spécifique, conductivité…etc) sont des fonctions continues et différentiable des trois coordonnées du point courant. La mécanique des solides parfait étudie le mouvement des corps solides et de leurs assemblages, elle appelle solide parfait ou tout simplement solide tout ensemble de particules matérielles demeurent à distances mutuelles rigoureusement constantes.



On note que sous l'action d'une sollicitation donné, un solide devient le siège d'un champs de contraintes et d'un champs de déformations parfaitement déterminer, ce qui implique entre ces deux champs, l'existence d'une relation qui régisse le comportement du solide et qu'on appel la loi du comportement ou loi rhéologique. Elle dépend essentiellement du matériau du solide considéré qui peut être élastique, élasto-plastique, plastique ou autre.

Si le matériau est élastique, alors sous l'action des charges, d'une intensité inférieur à la limite d'écoulement, la déformation qui suit quasi-instantanément l'application de la charge, de plus le phénomène est réversible, c'est-à-dire que si l'on annule progressivement la charge le matériau reprend sa forme initiale, la théorie ainsi obtenue est appelée théorie d'élasticité.

L'élasticité est la propriété physique d'un corps qui reprendra sa forme finale après suppression de la sollicitation. Le corps est parfaitement élastique s'il recouvre complètement sa forme originale après suppression de la charge, il est partiellement élastique si la déformation produite par les forces externes ne disparaît pas complètement après qu'on à enlevé la charge.

La théorie d'élasticité repose donc sur la détermination d'un état de contrainte ou un état de déformation à l'intérieur d'un solide soumis à des forces de volumes ou/et à des forces de surface. La détermination de cet état revenait généralement à la recherche de certaines fonctions représentant les composants de déplacements. Les fonctions devaient satisfaire certaines conditions aux limites de ce même solide.

Durant ces dernières années la théorie d'élasticité à trouvée des applications diverses dans les solutions des problèmes de l'ingénieur. Il y'a divers cas où la théorie élémentaire de résistance de matériaux échoue à donner des informations satisfaisantes concernant la distribution des contraintes dans le solide étudié. Par exemple, la résistance des matériaux est incapable de donner des précisions concernant l'état des contraintes au voisinage du point d'application des charges, et aux appuis des poutres. Elle échoue également à donner des informations sur l'état des contraintes d'un élément de structure ayant des dimensions du même ordre de grandeur.

Homogénéité, isotropie, et linéarité de solide élastique

Si la densité du solide est constante et les coefficients élastique, qui caractérisent le comportement physique, sont aussi constants, on dit alors que le solide est élastique et homogène. Le solide est isotrope si les coefficients d'élasticité caractérisant les propriétés physiques ne dépendent pas de l'orientation du système de coordonnées du point considérée.

On définit aussi deux types de linéarité, l'une concerne le caractère de déformation et l'autre concerne la nature physique du matériau. Donc il y'a linéarité géométrique et linéarité physique.

Hypothèse de la théorie d'élasticité

a) Continuité : le matériau doit être continu, n'ayant ni fissure ni cavité. Cette hypothèse permet d'isoler une partie infinitésimale et d'exprimer son comportement dans un système de coordonnées de référence à l'aide des fonctions mathématiques continues.

b) Comportement élastique : si il y'a proportionnalité entre forces et déplacements, le comportement est dit élastique linéaire (linéarité physique ou matériel).

c) Petites déformations : on suppose que lors de sa déformation le corps s'écarte de sa position initiale. Cette déformation est suffisamment petite pour négligé les termes du seconde ordre, et les relations géométrique sont alors linéaires (linéarité géométrique).

d) Action statique des charges : les charges sont appliquées progressivement de manière à éviter les instabilités locales.

e) Corps homogène et isotrope

Calcul vectoriel

Il s'agit ici de réviser certaines notions quand aux calculs avec des vecteurs et des champs de vecteurs. On commence par deux définitions :

Scalaire : Un scalaire est une grandeur physique complètement définie par un chiffre.
Ex : masse, température, énergie, etc.

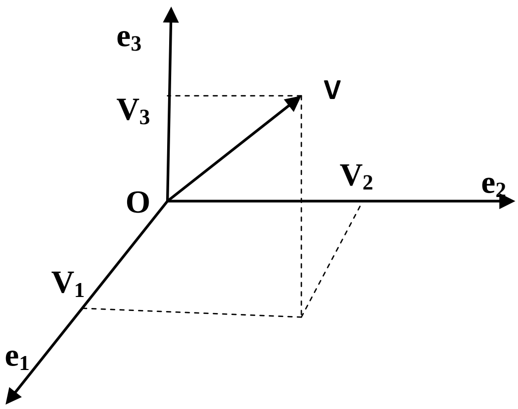
Vecteur : Un vecteur est une grandeur physique caractérisée par un module et une orientation.
Ex : force, vitesse, champ électrique, etc.

Opérations sur les vecteurs :

Un vecteur V est représenté dans un repère orthonormé (O,e_1, e_2, e_3) par 3 composantes :

$V = (V_1, V_2, V_3)$

$V = V_1 e_1 + V_2 e_2 + V_3 e_3$



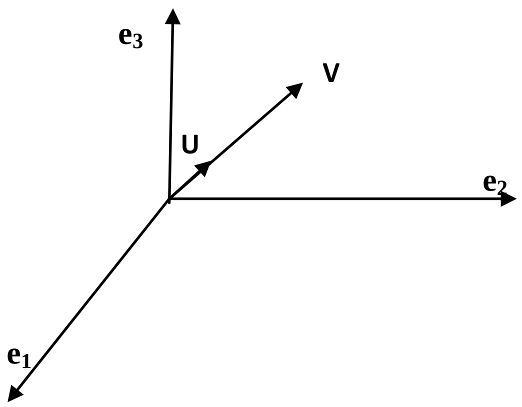
V_i : scalaires
e_i : vecteurs unitaires

Particulièrement :

$e_1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 = (1,0,0)$
$e_2 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 = (0,1,0)$
$e_3 = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 = (0,0,1)$

Module :

$|V| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} \qquad |e_i| = 1$



Vecteur unitaire :

C'est un vecteur V tel que : $|V| = 1$

Normalisation d'un vecteur :

$U = \dfrac{V}{|V|}$

U : vecteur unitaire de même direction que V
On dit que U est une normalisation de V

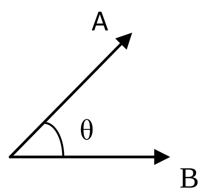
Règles de calcul :

Soit A, B, C trois vecteurs tel que :

$A = (a_1, a_2, a_3) \quad ; B = (b_1, b_2, b_3) \ ; \ C = (c_1, c_2, c_3)$

1) $A + B = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , a_3 + b_3)$
2) $A = B \Rightarrow a_1 = b_1 , a_2 = b_2 , a_3 = b_3$
3) $A + (B + C) = (A + B) + C$
4) $A + B = B + A$
5) $(m + n)A = mA + nA$ $\quad\quad m, n$ *scalaires*
6) $m(nA) = (m\,n)A$
7) $m(A + B) = mA + mB$

Produit scalaire :



$S = A.B$
$S = |A|\,|B|\,cos\theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$
$S = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

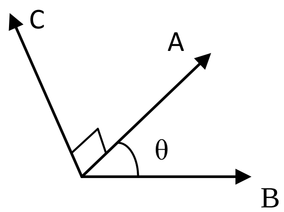
Propriétés du produit scalaire

$A.B = B.A$
$A.(B + C) = A.B + A.C$
$m(A.B) = (mA).B = A(m.B) = (A.B)m$

$e_1.e_1 = e_2.e_2 = e_3.e_3 = 1$
$e_1.e_2 = e_2.e_3 = e_3.e_1 = 0$ $\qquad$ *Ou bien*: $\quad e_i.e_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$A.A = |A|^2$
$A \neq 0$ *et* $B \neq 0$, $A.B = 0 \Rightarrow A$ *et* B sont orthogonaux

Produit vectoriel :



$C = A \wedge \mathrm{B}$
C : est un vecteur perpendiculaire au plan (A , B)
$C = |A|\,|B|\,sin\theta$
$C = e_1(a_2b_3 - a_3b_2) + e_2(a_3b_1 - a_1b_3) + e_3(a_1b_2 - a_2b_1)$

Propriétés du produit vectoriel

$A \wedge \mathrm{B} = -B \wedge \mathrm{A}$
$A \wedge (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = A \wedge \mathrm{B} + A \wedge \mathrm{C}$
$m(A \wedge \mathrm{B}) = (mA) \wedge \mathrm{B} = A \wedge (mB)$
$e_1 \wedge e_1 = e_2 \wedge e_2 = e_3 \wedge e_3 = 0$
$e_1 \wedge e_2 = e_3 \quad , e_2 \wedge e_3 = e_1 \quad , e_3 \wedge e_1 = e_2$
$A \neq 0$ *et* $B \neq 0$, $A \wedge B = 0 \Rightarrow A \,//\, B$

Produit mixte :

Le produit mixte des 3 vecteurs, et est le scalaire :
$\mathrm{A}.(\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) = B.(\mathrm{C} \wedge \mathrm{A})$

Matrices

Une matrice $m \times n$ est une représentation de nombres sous forme d'un tableau de m lignes et n colonnes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Chaque élément est désigné par deux indices i, j qui correspondent à sa position dans le tableau.

Si $m = n$, la matrice est dite carrée et si $m = n = 1$, elle se réduit à un scalaire. Les matrices sont très utiles pour résoudre simultanément les systèmes d'équations :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

qui peuvent toujours se mettre sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

ou sous forme compacte :

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{A}$: est la matrice carrée d'ordre n contenant les coefficients du système linéaire

$\boldsymbol{X}$: est le vecteur des variables inconnues

$\boldsymbol{B}$: est le vecteur des variables connues

donc on transforme le vecteur $\boldsymbol{X}$, en un vecteur $\boldsymbol{B}$ à l'aide de $\boldsymbol{A}$, d'où la définition suivante :

Une matrice $\boldsymbol{M}$ est une application linéaire qui associe à tout vecteur $\boldsymbol{V}$ une image $\boldsymbol{V}'$

$$\boldsymbol{V} \xrightarrow{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{V}' = \boldsymbol{M}\boldsymbol{V}$$

Une matrice est dite matrice identité si elle associe à tout vecteur $\boldsymbol{V}$ le vecteur lui-même (elle ne fait aucune transformation du vecteur), elle est notée $\boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{I}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}$$

Determinant

Le déterminant d'une matrice carrée est un nombre tel que :

si $\boldsymbol{A} = a_{11}$ est d'ordre 1 (1×1) :

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}$$

si $\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]$ est d'ordre 2 (2×2) :

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

si $\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]$ est d'ordre 3 (3×3) :

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

si $\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]$ est d'ordre n ($n \times n$) :

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \cdots + \cdots \pm a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

En élasticité, on se limite aux matrices d'ordre 3, ($n = 3$).

Opérations matricielles

$\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux matrices de composantes a_{ij} et b_{ij} et m est un scalaire.

1. Egalité
   Deux matrices du même ordre sont égales si et seulement si toutes leurs composantes sont égales une à une :
   $$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \ : \ a_{ij} = b_{ij}$$
2. Transposée
   $$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^T \ : \ b_{ij} = a_{ji}$$
3. Multiplication par un scalaire
   $$\boldsymbol{B} = m\boldsymbol{A} \ : \ b_{ij} = ma_{ji}$$
4. Multiplication matricielle
   $$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} \ : \ c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$$
5. Inversion matricielle
   $$\boldsymbol{A}^{-1} \text{ inverse de } \boldsymbol{A} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$$

Remarques

1. $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$
2. $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$
3. $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$
4. $\det(m\boldsymbol{A}) \neq m\det(\boldsymbol{A})$

Matrice de rotation

Un point P de coordonnées (x, y) exprimées dans un repère XY s'exprime par les coordonnées (x', y') lorsque le repère subi une rotation d'angle θ et devient $X'Y'$.

Les nouvelles coordonnées s'expriment en fonctions des anciennes coordonnées comme suit :

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta \end{aligned}$$

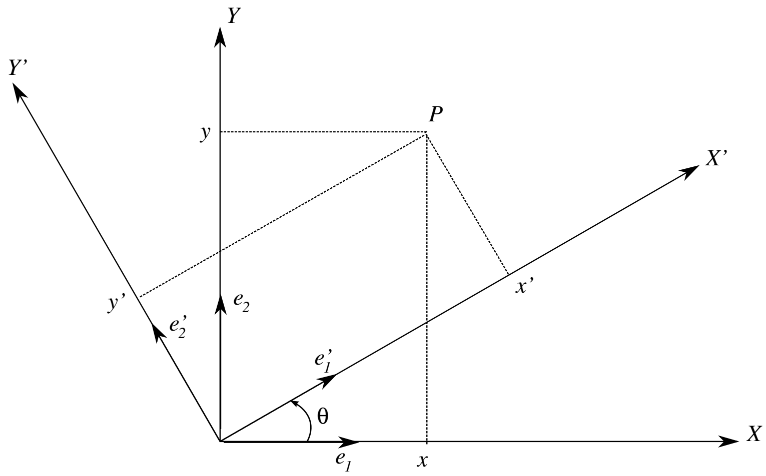
soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

ou encore, en plus compacte : $\boldsymbol{V'} = \boldsymbol{AV}$

$\boldsymbol{A}$ est la matrice de rotation de repère, elle contient les cosinus directeurs des nouveaux axes par rapport aux anciens axes. Si on note les vecteurs unitaires des axes originaux $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$, ceux des nouveaux axes $\boldsymbol{e'_1}$ et $\boldsymbol{e'_2}$ alors :

$$a_{ij} = \boldsymbol{e'_i} \cdot \boldsymbol{e_j}$$



Somme de deux rotations

Lorsque le repère $X'Y'$ subit lui aussi une rotation d'angle ϕ, les coordonnées (x', y') deviennent (x'', y'') tel que :

$$\begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V''} = \boldsymbol{BV'}$$

$\boldsymbol{B}$ est la matrice de la seconde rotation.

En fonction des coordonnées origines (x, y) :

$$\begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

soit :

$$\boldsymbol{V}'' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$$

Le produit matricielle donne :

$$\begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi) \\ -\sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Inverse d'une rotation

Si le repère $(X'Y')$ subit une rotation d'angle $-\theta$, on retrouve le repère initial (XY), d'où :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{V}' \quad ; \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^T$$

L'inverse d'une matrice de rotation est égale à sa transposée.

Rotation 3D

La rotation 2D fait changer les coordonnées x et y, la coordonnées z reste telle qu'elle $(z' = z)$. On dit que la rotation 2D se fait par rapport à l'axe Z et on écrit le changement de coordonnées en incluant z comme suit :

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{A}_z\boldsymbol{V}$$

De même on écrit les matrices de rotations d'angles θ_x et θ_y par rapport aux axes X et Y comme suit :

$$\boldsymbol{A}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & \sin(\theta_x) \\ 0 & -\sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_y = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{bmatrix}$$

Remarque

Une rotation $\boldsymbol{A}_x$ par rapport à X suivie d'une rotation $\boldsymbol{A}_y$ par rapport à Y est différente de la rotation $\boldsymbol{A}_y$ suivie de la rotation $\boldsymbol{A}_x$:

$$\boldsymbol{A}_y\boldsymbol{A}_x \neq \boldsymbol{A}_x\boldsymbol{A}_y$$

Transformation linéaire

Une transformation linéaire est une transformation dans laquelle chaque nouvelle variable est une combinaison linéaire d'anciennes variable. En 2D :

$$x' = ax + by \quad ; \quad y' = cx + dy$$

avec a, b, c et d sont des constantes.

Du point de vue vectorielle :

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

où

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{M}\boldsymbol{V}$$

$\boldsymbol{M}$ est la matrice de la transformation

Si x' est perpendiculaire à y' et $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$ alors la matrice $\boldsymbol{M}$ est une matrice orthogonale.

La longueur d'un vecteur ne change pas avec la rotation d'axes et on dit que la rotation est une transformation orthogonale

Définition

Une transformation orthogonale est une transformation linéaire qui préserve les longueurs. La matrice $\boldsymbol{M}$ d'une transformation orthogonale est une matrice orthogonale et on a :

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{M}^T$$

Lorsque les longueurs ne changent pas, on a :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x'^2 + y'^2 \\ &= (ax + by)^2 + (cx + dy)^2 \\ &= (a^2 + c^2)x^2 + (b^2 + d^2)y^2 + 2(ab + cd)xy \end{aligned}$$

d'où :

$$a^2 + c^2 = 1$$

$$b^2 + d^2 = 1$$

$$ab + cd = 0$$

ou bien, en utilisant la matrice de transformation $\boldsymbol{M}$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

soit :

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T = \boldsymbol{I}$$

ou

$$\boldsymbol{M}^T = \boldsymbol{M}^{-1}$$

Valeurs et vecteurs propres

Dans une transformation linéaire, un vecteru $\boldsymbol{V}$ d'origine $(0,0)$ et d'extrémité (x,y) se transforme en vecteur $\boldsymbol{V}'$ d'origine $(0,0)$ et d'extrémité (x',y'), il subit alors une rotation et un allongement (ou rétrécissement).

La transformation engendre un changement de direction et un changement de module des vecteurs.

Si on veut s'intéresser aux vecteurs qui ne subissent pas de rotation avec la transformation alors on cherche $\boldsymbol{V}'$ qui restent parallèles à $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{V}' \,//\, \boldsymbol{V} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{V}' = \lambda \boldsymbol{V}$$

λ est une constante scalaire.

En utilisant la transformation :

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{V} = \lambda \boldsymbol{V}$$

ce qui donne

$$(\boldsymbol{M} - \lambda \boldsymbol{I})\,\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$$

qui possède une solution non triviale ($\boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{0}$) si le déterminant : $\det(\boldsymbol{M} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$

Les racines de cette équation sont appelées valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{M}$ et les vecteurs correspondant sont appelés vecteurs propres.

Exemple

On considère la transformation :

$$\begin{cases} x' = 5x - 2y \\ y' = -2x + 2y \end{cases} \qquad ; \qquad \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Les valeurs propres sont solution de

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad ; \qquad (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$$

ce qui donne deux racines : $\lambda = 1$ et $\lambda = 6$

Les vecteurs qui ne subissent pas de rotation s'obtiennent par résolution du système pour chacune des valeurs de λ

pour $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \qquad \text{donne la droite :} \quad 2x - y = 0$$

pour $\lambda = 6$:

$$\begin{cases} -x - 2y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases} \qquad \text{donne la droite :} \quad x + 2y = 0$$

Les deux droites définissent les directions propres, on dit aussi 'directions principales'

Les vecteurs parallèles à la droite $2x - y = 0$, ne subissent aucune transformation et les vecteurs parallèles à la droite $x + 2y = 0$, s'allongent de 6 fois leurs longueurs initiales.

Tous les autres vecteurs subissent une rotation et un changement de longueur en même temps.

Les vecteur unitaires définis le long des deux droites sont les vecteurs propres normalisés. Ils définissent une base puisque les deux droites sont perpendiculaires. ces vecteurs sont :

$$\boldsymbol{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1 \quad 2 >$$

$$\boldsymbol{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} < -2 \quad 1 >$$

Exemple

Le vecteur $\boldsymbol{V} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ devient :

$$\boldsymbol{V}' = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

il était de longueur $\sqrt{2}$ et incliné de 45° par rapport l'axe X et devient de longueur 3 et parallèle à l'axe X.

Le vecteur $\boldsymbol{V} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$ parallèle à la droite $2x - y = 0$ devient :

$$\boldsymbol{V}' = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

il ne subit aucun changement

Le vecteur $\boldsymbol{V} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$ parallèle à la droite $x + 2y = 0$ devient :

$$\boldsymbol{V}' = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12 \\ 6 \end{Bmatrix} = 6 \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

il ne subit qu'un allongement de 6.

Diagonalisation d'une matrice

On s'intéresse dans la diagonalisation d'une matrice à la description de la transformation linéaire qu'elle représente dans un nouveau repère déduit par rotation du repère initial pour confondre avec les direction principales.

Dans le repère initial (XY) muni de vecteurs unitaires (e_1, e_2), la transformation d'un vecteur $\boldsymbol{V}$ à l'aide de la matrice de transformation $\boldsymbol{M}$ donne :

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{M}\boldsymbol{V}$$

Avec une rotation d'axes de matrice $\boldsymbol{A}$, les vecteurs $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{V}'$ s'expriment par :

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{AV} \qquad ; \qquad \boldsymbol{U}' = \boldsymbol{AV}'$$

soit par rotation inverse :

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{U} \qquad ; \qquad \boldsymbol{V}' = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{U}'$$

La transformation de $\boldsymbol{V}$ en $\boldsymbol{V}'$ à l'aide de $\boldsymbol{M}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{U})$$

d'où la transformation de $\boldsymbol{U}$ en $\boldsymbol{U}'$:

$$\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{AMA}^T\boldsymbol{U} \qquad ; \qquad \boldsymbol{U}' = \boldsymbol{DU}$$

Si la rotation fait coïncider les nouveaux axes avec les directions principales, alors la matrice $\boldsymbol{D}$ est diagonale. La matrice de rotation contient les deux nouveaux vecteurs unitaires calculés en normalisant les directions principales.

Exemple

Dans l'exemple précédent les directions principales sont données par les deux droites $y - 2x = 0$ et $2y - x = 0$. Les vecteurs unitaires dans ces deux directions sont : $\boldsymbol{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1 \quad 2 >$ et $\boldsymbol{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} < -2 \quad 1 >$

La matrice de rotation est : $\boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

L'angle de rotation est : $\theta = \arccos(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_1) = 63.435°$

La matrice diagonale s'obtient par :

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{AMA}^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Avec la rotation d'axe, la transformation $\boldsymbol{M}$ est décrite d'une manière plus simple. Dans le nouveau repère, on peut écrire :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 6y \end{cases}$$

Tenseurs

Les tenseurs sont la généralisation des scalaires, des vecteurs et des matrices. Un tenseur est un mot générique d'entités mathématiques qui désigne une quantité physique. La description d'un tenseur dépend du repère de référence utilisé. Dans ce cours, on s'intéresse aux tenseurs cartésiens, le système de référence est donc un repère orthonormé $(OXYZ)$ qui peut subir une rotation de matrice A et changer en un repère $(OX'Y'Z')$.

Ordre	Entité	Dimension	Nbr. Composantes	Notation
0	scalaire	$2D$	$2^0 = 1$	a
		$3D$	$3^0 = 1$	
1	vecteur	$2D$	$2^1 = 2$	a_i
		$3D$	$3^1 = 3$	
2	matrice	$2D$	$2^2 = 4$	a_{ij}
		$3D$	$3^2 = 9$	
n		$2D$	2^n	$a_{ijk\cdots}$
		$3D$	3^n	

Définition

Un tenseur cartésien T d'ordre n est une fonction qui associe à un repère (2D/3D) un groupe de $(2^n/3^n)$ composantes réelles $T_{ijk\cdots}$ qui se transforment selon la relation suivante :

$$T'_{lmn\cdots} = \sum_{i,j,k\cdots=1}^{3} a_{li} a_{mj} a_{nk} \cdots T_{ijk\cdots} \tag{1}$$

lorsque le repère subi une rotation de matrice A. Les a_{li} désignent les cosinus directeurs des nouveaux axes du repère $(OX'Y'Z')$ par rapport au repère initial $(OXYZ)$. $T_{ijk\cdots}$ sont les composantes du tenseur exprimées par rapport au repère initial et $T'_{lmn\cdots}$ sont les nouvelles valeurs des composantes du même tenseur exprimées dans le nouveau repère.

Tenseur d'ordre 1

Un tenseur d'ordre 1 (vecteur) est un ensemble de trois composantes (repère $3D$) V_i définies dans un repère $(OXYZ)$ et deviennent V'_l lorsque le repère subi une rotation de matrice A.

$$V'_l = \sum_{i=1}^{3} a_{li} V_i \tag{2}$$

Exemple

Une poutre inclinée de 30° par rapport à l'horizontal, chargée à son extrémité par une force F verciale de $500KN$.

La force est une quantité physique représentée par un tenseur d'ordre 1 dans un repère $2D$. Son expression par rapport au repère (OXY) est :

$$F = \left\{ \begin{array}{l} F_1 = 0 \\ F_2 = -500 \end{array} \right\}$$

La matrice de rotation du repère (OXY) au repère $(OX'Y')$ lié à la poutre est :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} = \cos(30) & a_{12} = \sin(30) \\ a_{21} = -\sin(30) & a_{22} = \cos(30) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

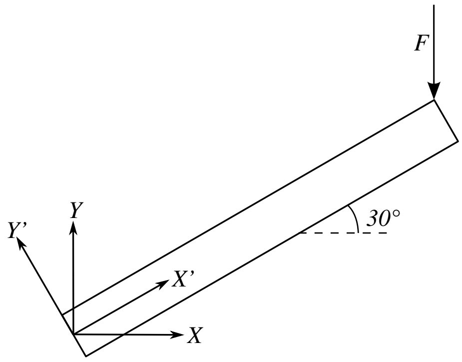


FIGURE 1 – Exemple de rotation de repère

L'expression de la force dans le nouveau repère $(OX'Y')$ devient :

$$\begin{aligned} F'_1 &= \sum_{i=1}^{2} a_{1i} F_i = a_{11}F_1 + a_{12}F_2 = -250KN \\ F'_2 &= \sum_{i=1}^{2} a_{2i} F_i = a_{11}F_1 + a_{12}F_2 = -250\sqrt{3}KN \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$F' = \begin{bmatrix} \cos(30) & \sin(30) \\ -\sin(30) & \cos(30) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -250 \\ -250\sqrt{3} \end{Bmatrix} KN$$

Tenseur d'ordre 2

Un tenseur d'ordre 2 (matrice) est un ensemble de neuf (09) composantes (repère $3D$) V_{ij} définies dans un repère $(OXYZ)$ et deviennent V'_{kl} lorsque le repère subi une rotation de matrice A.

$$V'_{kl} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ki} a_{lj} V_{ij} \tag{3}$$

Exemple

Si dans l'exemple précédent le vecteur force est lié au vecteur déplacement de l'extrémité libre :

$$F = KU$$

avec K est une matrice 2×2 ou tenseur d'ordre 2, alors dans le nouveau repère $(OX'Y')$ nous avons :

$$F' = AF \text{ et } U' = AU$$

ce qui donne par inversion :

$$F = A^T F' \text{ et } U = A^T U'$$

En remplaçant dans l'expression $F = KU$, on exprime la nouvelle relation entre la force et le déplacement :

$$A^T F' = K(A^T U')$$

soit :

$$F' = K'U' \text{ avec } K' = AKA^T$$

Posons $V = KA^T$, ses composantes s'écrivent :

$$V_{iq} = \sum_{j=1}^{2} K_{ij}(a_{jq})^T = \sum_{j=1}^{2} a_{qj}K_{ij}$$

La multiplication à gauche par A donne les composantes de K dans le nouveau repère :

$$K'_{pq} = \sum_{i=1}^{2} a_{pi}V_{iq} = \sum_{i=1}^{2} a_{pi} \sum_{j=1}^{2} a_{qj}K_{ij} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{pi}a_{qj}K_{ij}$$

Propriétés des tenseurs

a) Symétrie

Un tenseur d'ordre $n > 2$ est dit symétrique par rapport à une paire d'indices si ses composantes restent inchangées sous l'effet d'une permutation de ces indices :

$V_{ijk\cdots} = V_{jik\cdots}$: symétrie par rapport à ij, et

$V_{ijk\cdots} = V_{ikj\cdots}$: symétrie par rapport à jk

b) Antisymétrie

Un tenseur d'ordre $n > 2$ est dit antisymétrique par rapport à une paire d'indices si ses composantes changent de signe sous l'effet d'une permutation de ces indices :

$V_{ijk\cdots} = -V_{jik\cdots}$: antisymétrie par rapport à ij, et

$V_{ijk\cdots} = -V_{ikj\cdots}$: antisymétrie par rapport à jk

c) Isotropie

Un tenseur est dit isotrope si ses composantes restent inchangées sous l'effet d'une rotation de repère. *Exemple : le tenseur identité I* : $I' = AIA^T = I$

Notation indicielle

Pour une écriture compacte et allégée des expressions mathématiques, on utilise la notation indicielle. L'espace tridimensionnel est rapporté à un repère orthonormé $(OX_1X_2X_3)$ dont les vecteurs unitaires sont notés : $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$. Un point M est localisé par les coordonnées x_1, x_2 et x_3 et noté $M(x_i)$, l'indice i prend les valeurs 1 à 3 (ou 1 à 2 si l'espace est 2D).

Les tenseurs que nous rencontrerons dans ce cours seront notés comme suit :

Tenseur d'ordre 0	Scalaire	a , b , α	1 composante
Tenseur d'ordre 1	Vecteur	a_i , v_i , V_i	3 composantes
Tenseur d'ordre 2	Matrice	a_{ij} , v_{ij} , T_{ij}	9 composantes
Tenseur d'ordre 3		a_{ijk} , v_{ijk} , T_{ijk}	27 composantes
Tenseur d'ordre 4		a_{ijkl}, v_{ijkl}, D_{ijkl}	81 composantes

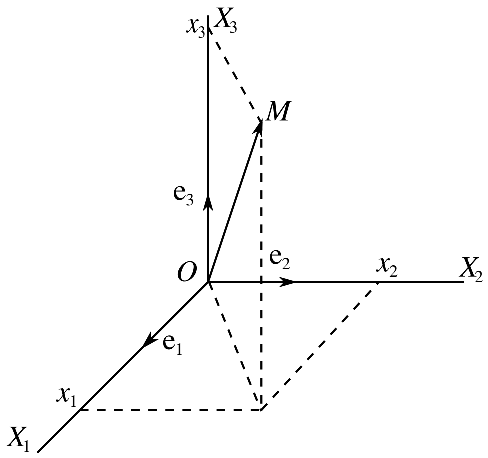


FIGURE 2 – Notations utilisées pour l'espace 3D

Convention de somme

Si on considère la somme :

$$S = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

son écriture compacte usuelle est :

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad \text{ou : } S = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \quad \text{ou bien : } S = \sum_{m=1}^{n} a_m x_m$$

Les indices i, j et m sont appelés *indices muets* dans le sens où la valeur de S ne dépend pas de l'indice utilisé dans l'expression de la somme.

On peut simplifier d'avantage l'écriture de cette somme on adoptant la convention de somme *d'Einstien* suivante :

Lorsqu'un indice est répété (apparait 2 fois) dans un même terme, ça implique une somme sur l'indice répété

L'écriture précédente se simplifie donc en :

$$S = a_i x_i \tag{4}$$

Remarque

Les expressions telles que $a_i b_i x_i$ où l'indice apparait plus de deux fois sont exclues de la convention, le signe $\sum$ doit être gardé pour désigner une somme des termes, sinon l'ecriture est interprétée comme un seul terme.

En élasticité sauf indication ou précision, la somme s'applique de 1 à 3.

Exemples :

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad \text{(produit scalaire)}$$
$$c_{ii} = c_{11} + c_{22} + c_{33} \qquad \text{(trace de la matrice)}$$

Double somme

Lorsqu'un terme contient deux indices, chacun apparaît deux fois, une double somme sur les deux indices est interprétée.

Exemple :

$$\begin{aligned}
a_{ij} x_i x_j &= (a_{i1} x_i x_1) + (a_{i2} x_i x_2) + (a_{i3} x_i x_3) \\
&= (a_{11} x_1 x_1 + a_{21} x_2 x_1 + a_{31} x_3 x_1) \\
&+ (a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2 x_2 + a_{32} x_3 x_2) \\
&+ (a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3 x_3)
\end{aligned}$$

Indice libre

Un indice est dit *indice libre* s'il est répété de part et d'autre du signe égal (=) d'une équation. L'écriture :

$$C_i = A_i + B_i \tag{5}$$

est interprétée comme suit : le vecteur C est la somme des vecteurs A et B.

L'écriture :

$$Y_i = A_{ij} X_j \tag{6}$$

comporte un indice libre i qui désigne 3 équations et un indice muet j qui désigne une somme. Explicitement :

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{1,j} x_j = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\
y_2 &= a_{2,j} x_j = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\
y_3 &= a_{3,j} x_j = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3
\end{aligned}$$

L'écriture :

$$V_{ij} = U_{ik} U_{jk} \tag{7}$$

comporte 2 indices libres i et j et un indice muet k. C'est un ensemble de 9 équations qui donnent l'expression du tenseur V en fonction de U : ($V = UU^T$).

Symbol de Kronecker

Le symbole *delta de Kronecker* est défini comme suit :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{8}$$

Il est équivalent à la matrice identité :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les propriétés du symbole δ que nous allons rencontrer dans ce cours sont :

1. symétrie : $\delta_{ij} = \delta_{ji}$
2. isotropie : $\delta_{kl} = a_{ki} a_{lj} \delta_{ij} = \delta_{ij}$
3. trace : $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$
4. produit avec un vecteur : $\delta_{ij} V_j = V_i$; $\delta_{ij} V_i = V_j$
   particulièrement : $\boldsymbol{e}_i = \delta_{ij} \boldsymbol{e}_j$
5. produit scalaire des vecteurs unitaires : $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$
6. trace d'une matrice : $\delta_{ij} A_{ij} = A_{ii} = A_{jj}$

Symbole de Permutation

Le symbole de permutation $\mathscr{E}$ est défini comme suit :

$$\mathscr{E}_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk \text{ apparaissent dans l'ordre } 12312\ ... \\ -1 & \text{si } ijk \text{ apparaissent dans l'ordre } 32132\ ... \\ 0 & \text{si } ijk \text{ apparaissent dans un autre ordre} \end{cases} \tag{9}$$

Dans le cas où les indices i, j et k prennent en rotation circulaire les valeurs 1,2 et 3, on peut mettre :

$$\mathscr{E}_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i) \tag{10}$$

on a :

$$\mathscr{E}_{123} = \mathscr{E}_{231} = \mathscr{E}_{312} = 1$$

et :

$$\mathscr{E}_{132} = \mathscr{E}_{321} = \mathscr{E}_{132} = -1$$

mais dès que l'un des indices est répété $\mathscr{E}$ prend la valeur nulle :

$$\mathscr{E}_{112} = \mathscr{E}_{122} = \mathscr{E}_{233} \cdots = 0$$

Toute interchange dans les indices entraîne l'inversion de signe du symbole :

$$\mathscr{E}_{ijk} = -\mathscr{E}_{kji} = \mathscr{E}_{kij} = -\mathscr{E}_{ikj}$$

Les produits vectoriels des vecteurs unitaires s'écrivent comme suit :

$$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = \mathscr{E}_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{11}$$

D'une manière générale le produit vectoriel de deux vecteurs U et V s'écrit :

$$\begin{aligned} U \wedge V &= (u_i \boldsymbol{e}_i) \wedge (v_j \boldsymbol{e}_j) \\ &= u_i v_j (\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j) \\ &= \mathscr{E}_{ijk} u_i v_j \boldsymbol{e}_k \end{aligned} \tag{12}$$

Identité $\mathscr{E}$-δ

Le produit de deux symboles de permutation peut être écrit en fonction des symboles de Kronecker par l'identité suivante :

$$\mathscr{E}_{ijk}\mathscr{E}_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr} \tag{13}$$

$$\mathscr{E}_{ijm}\mathscr{E}_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} \tag{14}$$

Une des applications de cette identité est la démonstration la relation suivante concernant le triple produit vectoriel.

$$U \wedge (V \wedge W) = (U \cdot W)V - (U \cdot V)W$$

U, V et W étant trois vecteurs (ou tenseurs d'ordre 1).

En effet, l'equation 12 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} U \wedge (V \wedge W) &= u_i \boldsymbol{e}_i \wedge (v_j \boldsymbol{e}_j \wedge w_k \boldsymbol{e}_k) \\ &= u_i \boldsymbol{e}_i \wedge (v_j w_k \mathscr{E}_{jkl} \boldsymbol{e}_l) \\ &= \mathscr{E}_{jkl} u_i v_j w_k (\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_l) \\ &= \mathscr{E}_{jkl} \mathscr{E}_{ilm} u_i v_j w_k \boldsymbol{e}_m \end{aligned}$$

mais $\mathscr{E}_{ilm} = -\mathscr{E}_{iml}$ et l'identité δ-$\mathscr{E}$ donne :

$$-\mathscr{E}_{iml}\mathscr{E}_{jkl} = \delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij}$$

Le triple produit vectoriel devient donc :

$$U \wedge (V \wedge W) = (\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij}) u_i v_j w_k \boldsymbol{e}_m$$

et compte tenu de :

$$\begin{aligned} \delta_{mj} v_j &= v_m \\ \delta_{ik} w_k &= w_i \\ \delta_{mk} w_k &= w_m \\ \delta_{ij} v_j &= v_i \end{aligned}$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} U \wedge (V \wedge W) &= u_i w_i v_m \boldsymbol{e}_m - u_i v_i w_m \boldsymbol{e}_m \\ &= (U \cdot W)V - (U \cdot V)W \end{aligned}$$