السلسلة الأولى: عموميات

التمرين 01: عيّن **الحلّ العام** لكل معادلة تفاضليّة عاديّة في كل حالة من الحالات الآتية:

1- $xu'=u$ ، 2- $u'-xu=x$ ، 3- $u''\pm\lambda^2u=0$ ، 4- $x^2u''+xu-\lambda^2u=0$ حيث $\lambda>0$

التمرين 02: تحقق أنّ الدّالة u حلاً لـ **م ت ج** المرفقة في كل حالة مما يلي:

1- $u(x,y)=x^2-y^2$ ، $u_{xx}+u_{yy}=0$ 3- $u(x,y)=f(x)+g(y)$ ، $u_{xy}=0$

2- $u(x,y)=f(xy)$ ، $xu_x-yu_y=0$ 4- $u(t,x)=f\left(\frac{x}{t}\right)$ ، $tu_t+xu_x=0$

حيث f و g اختياريتين قابلتين للمفاضلة باستمرار بكفاية.

التمرين 03: صنّف الـ **م ت ج** الآتيّة من حيث **الرتبة** و **الخطّية** و **التجانس**:

1- $u_{xx}+xu_y=y$ ، 4- $(u_x)(u_y)+xu_y=0$ ، 7- $(u_{xx})(u_y)+yuu_y=e^u$

2- $(u_x)^2+uu_y=1$ ، 5- $u_x-xu_{xxy}=\sin(u)$ ، 8- $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=\sin x$

3- $u_{xx}+yuu_y=u$ ، 6- $y\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)-x\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial y}\right)=u^2$ ، 9- $\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+2\left(\frac{\partial^4u}{\partial^2x\partial^2y}\right)\frac{\partial^4u}{\partial y^4}=0$

التمرين 04: شكّل **م ت ج** تكون الدّالة u حلاً لها في كل حالة مما يلي:

1- $u(x,y)=xf(y)$ 3- $u(x,y)=xy+f(x^2+y^2)$ *5- $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

2- $u(x,y)=e^{-x}f(x-2y)$ 4- $u(x,y)=f(xy)$ *6- $u(x,y)=f(y)\sin(x)+g(y)\cos(x)$

حيث f و g اختياريتين قابلتين للمفاضلة باستمرار بكفاية.

التمرين 05: أوجد **الحلّ العام** لـ **م ت ج** في كل حالة مما يلي:

1- $u_{yy}=x^2+y^2$ 4- $u_{yy}-xu_y=x$

2- $u_{xy}=x^2y$ *5- $x^2u_{xx}+5u_x+4u=0$

3- $u_{yy}-4u_y+3u=0$ *6- $xu_{xx}-u_x=x^2y^2$

التمرين 06 لتكن الـ **م ت ج** التاليّة:

$$(x^2+1)u_x+2xyu_y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(E)$$

أوجد حلول المعادلة (E) من الصنف $C^1(\mathbb{R}^2)$ و ذلك بوضع $\xi=x$ و $\eta=\frac{y}{(x^2+1)}$.

***التمرين 07:** لتكن g دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ و h دالة أصليّة لها على $\mathbb{R}$

1- أوجد الحلول من الصنف $C^1(\mathbb{R}^2)$ لـ:

$$g(y)u_x+u_y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(E)$$

و ذلك بوضع $x=\xi+h(\eta)$ و $y=\eta$

2- استعمل نتيجة 1 لحلّ المعادلة:

$$yu_x+(y^2+1)u_y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(E')$$

التمرين 08: أوجد الحلّ العام لـ $u_{xx}-u_{yy}=0$ و ذلك بوضع: $\xi=x+y$ و $\eta=x-y$.

ملاحظة هامّة : التمارين و الحالات المسبوقة بإشارة (*) إضافية ، يترك حلها للطالب لإعداده لأشكال التقويم المختلفة

حلّ السلسلة الأولى

التمرين 01: تعيّن **الحلّ العام** لكل معادلة تفاضليّة عاديّة :

-2 $$xu' = u \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

(1) هي معادلة ذات متغيرات منفصلة :

(1) تكافئ المعادلة $\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$ بمكاملة الطرفين نجد $\ln|u| = \ln|x| + C$

بتركيب الدالة الأسيّة نجد $|u(x)| = e^{\ln|x|+C} = e^C |x|$

و بوضع $K = \pm e^C$ نجد الحل العام على الشكل : $u(x) = Kx$ حيث $K \in \mathbb{R}$.

-3 $$u' - xu = x \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(2) معادلة خطّية من الرتبة الأولى حلّها من الشكل $u(x) = u_h + u_p$

حيث u_h حلّ للمعادلة المتجانسة و u_p حلّ خاص للمعادلة (2)

حساب u_h:

المعادلة المتجانسة ذات متغيّرات منفصلة بحلّها نجد : $u_h(x) = Ke^{\frac{1}{2}x^2}$ حيث $K \in \mathbb{R}$

حساب u_p:

باستعمال طريقة تغيير الثابت للاغرانج

أي نضع $u_p(x) = K(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$ ثمّ نجد الدالة $K(x)$ بالتعويض في (2)

بالاشتقاق و التعويض في (2) نجد

$$K'(x)e^{\frac{1}{2}x^2} + xK(x)e^{\frac{1}{2}x^2} - xK(x)e^{\frac{1}{2}x^2} = x$$

أي أنّ:

$$K'(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

بالمكاملة نجد:

$$K(x) = \int xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C'$$

و عليه الحلّ الخاص هو: $u_p(x) = -e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{2}x^2} = -1$

و بالتالي الحلّ العام لـ (2) هو: $u(x) = Ke^{\frac{1}{2}x^2} - 1$ حيث $K \in \mathbb{R}$.

-4 $$u'' - \lambda^2 u = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$ نفرض أنّ $\lambda > 0$

(3) معادلة خطّية من الرتبة الثانيّة بمعاملات ثابتة معادلتها المميّزة تقبل حلين مختلفين $r = \pm\lambda$ حلّها العامّ هو:

$$u(x) = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}$$ حيث C_1, C_2 ثابتان حقيقيان

و المعادلة $u''+\lambda^2 u=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$ $\lambda>0$

بنفس الطريقة المعادلة المميّزة لـ (4) تقبل حلين مركبين مترافقين هما $r=\pm i\,\lambda$

و بالتالي الحلّ لـ (4) هو:

$$u(x)=C_1\cos(\lambda x)+C_2\sin(\lambda x)$$ حيث C_1,C_2 ثابتان حقيقيان

-5 $x^2u''+xu-\lambda^2 u=0\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$ حيث $\lambda>0$

المعادلة (5) هي معادلة تفاضليّة متجانسة **لكوشي أولر**

معادلتها المميّزة: $r^2+(p-1)r+q=r^2-\lambda^2=0$ تقبل حلين حقيقين مختلفين هما $r=\pm\lambda$

و عليه الحلّ العام لـ (5) هو:

$$u(x)=C_1x^{-\lambda}+C_2x^{\lambda_2}$$ حيث C_1,C_2 ثابتان حقيقيان

التمرين 02: التحقق أنّ الدّالة u حلاً لـ **م ت ج** المرفقة :

بالاشتقاق و التعويض في المعادلة المرفقة نجد المطلوب:

-1 بسيطة

-2 $u(x,y)=f(xy)$ $xu_x-yu_y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

لدينا:

$$u_x=\frac{\partial}{\partial x}(f(xy))=yf'(xy)$$

$$u_y=\frac{\partial}{\partial y}(f(xy))=xf'(xy)$$

بالتعويض في الطّرف الأوّل لـ (2) نجد المطلوب: $xyf'(xy)-yxf'(xy)=0$.

-3 $u(x,y)=f(x)+g(y)$ $u_{xy}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

لدينا:

$u_y=\frac{\partial}{\partial y}(f(x)+g(y))=g'(y)$ و بالتالي $u_{xy}=\frac{\partial}{\partial x\,\partial y}(f(x)+g(y))=\frac{\partial}{\partial x}(g'(y))=0$

و هو المطلوب.

-4 $u(t,x)=f\left(\frac{x}{t}\right)$، $tu_t+xu_x=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

لدينا:

$$u_t=\frac{\partial}{\partial t}\left(f\left(\frac{x}{t}\right)\right)=-\frac{x}{t^2}f'\left(\frac{x}{t}\right)$$

$$u_y=\frac{\partial}{\partial x}\left(f\left(\frac{x}{t}\right)\right)=\frac{1}{t}f'\left(\frac{x}{t}\right)$$

بالتعويض في الطّرف الأوّل لـ (4) نجد المطلوب:

$$tu_t + xu_x = t\left(-\frac{x}{t^2}f'\left(\frac{x}{t}\right)\right) + x\left(\frac{1}{t}f'\left(\frac{x}{t}\right)\right) = 0$$

التمرين 03: تصنّف الـ **م ت ج** الآتيّة من حيث **الرتبة** و **الخطّية** و **التجانس**:

4- **المعادلة التفاضليّة الجزئيّة** $u_{xx} + xu_y = y$ خطّيّة من الرتبة الثانيّة غير متجانسة.

5- **المعادلة التفاضليّة الجزئيّة** $(u_x)^2 + uu_y = 1$ غير خطّيّة من الرتبة الأولى.

6- **المعادلة التفاضليّة الجزئيّة** $u_{xx} + yuu_y = u$ شبه خطّية من الرتبة الثانيّة.

7- **المعادلة التفاضليّة الجزئيّة** $(u_x)(u_y) + xu_y = 0$ غير خطّيّة من الرتبة الأولى.

8- **المعادلة التفاضليّة الجزئيّة** $u_x - xu_{xxy} = \sin(u)$ نصف خطّية من الرتبة الثانيّة.

9- **المعادلة التفاضليّة الجزئيّة** $y\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - x\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}\right) = u^2$ نصف خطّية من الرتبة الثالثة.

10- **المعادلة التفاضليّة الجزئيّة** $(u_{xx})(u_y) + yuu_y = e^u$ غير خطّيّة من الرتبة الثانيّة.

11- **المعادلة التفاضليّة الجزئيّة** $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = \sin x$ خطّيّة من الرتبة الثانيّة غير متجانسة.

12- **المعادلة التفاضليّة الجزئيّة** $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$ غير خطّيّة من الرابعة.

التمرين 04: تشكّيل **م ت ج** تكون الدّالة u حلا لها:

الطريقة بمفاضلة الدّالة u و إجراء بعض العمليات الجبريّة:

3- $u(x,y) = xf(y)$

لدينا:

$u_x = f(y)$ و علية يمكن ملاحظة أنّ $xf(y) - xf(y) = 0$ أي أنّ الدالة u حلا للمعادلة:

$$xu_x - u = 0$$

4- $u(x,y) = e^{-x}f(x-2y)$

لدينا:

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x}f(x-2y)\right) = -e^{-x}f(x-2y) + e^{-x}f'(x-2y) \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

$$u_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x}f(x-2y)\right) = -2e^{-x}f'(x-2y) \cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

بضرب طرفي $(*)$ في 2 و الجمع نجد

$$2u_x + u_y = -2e^{-x}f(x-2y) = -2u$$

و عليه الدالة $u(x,y) = e^{-x}f(x-2y)$ حلا للمعادلة:

$$2u_x + u_y + 2u = 0$$

و هو المطلوب.

5- $u(x,y) = xy + f(x^2 + y^2)$

لدينا:

$$u_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(xy+f\left(x^2+y^2\right)\right)=y+2xf'\left(x^2+y^2\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$
$$u_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(xy+f\left(x^2+y^2\right)\right)=x+2yf'\left(x^2+y^2\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

بضرب طرفي $(*)$ في y و طرفي $(**)$ في $-x$ و الجمع نجد

$$yu_x-xu_y=y^2-x^2$$

وهي المعادلة المطلوبة.

-6 $u(x,y)=f(xy)$

لدينا:

$$u_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(f(xy)\right)=yf'(xy)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$
$$u_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(f(xy)\right)=xf'(xy)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

بضرب طرفي $(*)$ في x و طرفي $(**)$ في $-y$ و الجمع نجد

$$xu_x-yu_y=0$$

ملاحظة: المعادلة المُراد ايجادها ليست وحيدة.

التمرين 05: إيجاد **الحلّ العام** لـ **م ت ج** :

-4 $$u_{yy}=x^2+y^2\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

بالمكاملة (1) بالنسبة لـ y نجد:

$$u_y(x,y)=\int\left(x^2+y^2\right)dy=x^2y+\frac{1}{3}y^3+F(x)$$ حيث F دالة اختياريّة لـ x

وبالمكاملة مرّة ثانيّة بالنسبة لـ y نحصل على:

$$u(x,y)=\int\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3+F(x)\right)dy=\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{12}y^4+F(x)y+G(x)$$

حيث G دالة اختياريّة لـ x، و عليه الحلّ العام لـ (1) هو:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{12}y^4+F(x)y+G(x)$$

حيث F,G دالتين اختياريتين لـ x و قابلتين للمفاضلة بكفاية.

-5 $$u_{xy}=x^2y\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

بالمكاملة (2) بالنسبة لـ x نجد:

$$u_y(x,y)=\int\left(x^2y\right)dx=\frac{1}{3}yx^3+F(y)$$ حيث F دالة اختياريّة لـ y

وبالمكاملة مرّة ثانيّة بالنسبة لـ y نحصل على:

$$u\left(x,y\right)=\int\left(\frac{1}{3}yx^{3}+F\left(y\right)\right)dy=\frac{1}{6}x^{3}y^{2}+\left(\int F\left(y\right)dy\right)+G\left(x\right)$$

حيث G دالة اختياريّة لـ x ، و بوضع: $H\left(y\right)=\int F\left(y\right)dy$ نجد الحلّ العام لـ (2) هو:

$$u\left(x,y\right)=\int\left(\frac{1}{3}yx^{3}+F\left(y\right)\right)dy=\frac{1}{6}x^{3}y^{2}+H\left(y\right)+G\left(x\right)$$

حيث G,H دالتين اختياريتين قابلتين للمفاضلة بكفاية.

-6 $u_{yy}-4u_{y}+3u=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

من أجل x مثبّت نضع: $u\left(x,y\right)=v\left(y\right)$

و عليه : $u_{y}\left(x,y\right)=v'(y)$ و $u_{yy}\left(x,y\right)=v''(y)$

و بالتالي المعادلة (3) تكافئ المعادلة العاديّة: $v''-4v'+3v=0$

وهي خطّية متجانسة من الرتبة الثانيّة بمعاملات ثابتة معادلتها المميّزة تقبل حلين مختلفين هما $r_1=1$ و $r_2=3$

و منه حلّها العام هو: $v\left(y\right)=C_1\left(x\right)e^{y}+C_2\left(x\right)e^{3y}$ حيث C_1,C_2 متعلّقين بـ x .

بالرجوع إلى المتغيّر الأول نجد الحلّ العام لـ (3) هو:

$$u\left(x,y\right)=C_1\left(x\right)e^{y}+C_2\left(x\right)e^{3y}$$

حيث C_1,C_2 دالتين اختياريتين للمتغيّر x

-7 $u_{yy}-xu_{y}=x\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

من أجل x مثبّت نضع: $u_{y}\left(x,y\right)=v\left(y\right)$

و عليه $u_{yy}\left(x,y\right)=v'(y)$

و بالتالي المعادلة (4) تكافئ المعادلة العاديّة: $v'-xv=x$

تمّ حلّها في التمرين 1 و علية $v\left(y\right)=K\left(x\right)e^{\frac{1}{2}y^{2}}-1$ حيث K متعلّقة بـ x

بالرّجوع إلى المتغيّر الأوّل و المكاملة بالنسبة لـ y نجد الحلّ العام لـ (4) هو:

$$u\left(x,y\right)=\int\left(K\left(x\right)e^{\frac{1}{2}y^{2}}-1\right)dy$$

<u>التمرين 06</u> م ت ج بتغيير المتغيّر:

$$\left(x^{2}+1\right)u_{x}+2xyu_{y}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(E)$$

إيجاد حلول المعادلة (E) من الصنف $C^{1}\left(\mathbb{R}^{2}\right)$ و ذلك بوضع $\xi=x$ و $\eta=\dfrac{y}{\left(x^{2}+1\right)}$.

و منه: $y=\eta\left(\xi^{2}+1\right)$

نضع : $u\left(x,y\right)=v\left(\xi,\eta\right)$

لنحسب u_x و u_y باستعمال قاعدة دالّة مركّبة:

$$u_x = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{2xy}{\left(x^2+1\right)^2}\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{2\xi\eta}{\left(\xi^2+1\right)}\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$u_y = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\left(x^2+1\right)}\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{1}{\left(\xi^2+1\right)}\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

بالتعويض (E):

$$\left(\xi^2+1\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{2\xi\eta}{\left(\xi^2+1\right)}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) + 2\xi\eta\left(\xi^2+1\right)\left(\frac{1}{\left(\xi^2+1\right)}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\xi^2+1\right)\frac{\partial v}{\partial \xi} - 2\xi\eta\frac{\partial v}{\partial \eta} + 2\xi\eta\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$$

و عليه المعادلة (E) مكافئة لـلمعادلة:

$$\left(\xi^2+1\right)\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$$

و بمأنّ $\left(\xi^2+1\right) \neq 0$ فإنّ : $\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$ و بالمكاملة بالنسبة لـ ξ نجد: $v\left(\xi,\eta\right) = f\left(\eta\right)$

حيث f دالّة اختياريّة

بالرجوع إلى المتغيرين x و y نجد حلّ (E):

$$u\left(x,y\right) = f\left(\frac{y}{x^2+1}\right)$$

حيث f دالة قابلة للمفاضلة.

التمرين 08: إيجاد الحلّ العام لـ $u_{xx} - u_{yy} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (E)$

و ذلك بوضع: $\xi = x + y$ و $\eta = x - y$.

نضع : $u\left(x,y\right) = v\left(\xi,\eta\right)$

لدينا:

$$u_x = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$u_y = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

و:

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

$$u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

بالتعويض نجد أنّ (E) مكافئة للمعادلة:

$$4\frac{\partial^2 v}{\partial\eta\partial\xi}=0\cdots\cdots\cdots(E')$$

أي أنّ $\frac{\partial^2 v}{\partial\eta\partial\xi}=0$ بالمكاملة بالنسبة لـ η نجد $\frac{\partial v}{\partial\xi}=h(\xi)$ و بالمكاملة بالنسبة لـ ξ نجد

$$v(\xi,\eta)=\left(\int h(\xi)d\xi\right)+g(\eta)$$

بوضع: $f(\xi)=\int h(\xi)d\xi$ و عليه حل المعادلة (E') هو : $v(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta)$

بالرجوع إلى المتغيّرات القديمة نجد حلّ المعادلة (E) هو:

$$u(x,y)=f(x+y)+g(x-y)$$

حيث $f\ ,g$ دالتين اختياريتين قابلتين للمفاصلة مرّتين.

السلسلة الثانيّة : المعادلات التفاضليّة الجزئيّة من الرتبة الأولى Equ-phy-Math

التمرين 01: حلّ الجمل التفاضليّة التاليّة:

1- $\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xz^2}$ ، **2*-** $\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}=-\frac{xdz}{z^2}$ ، **3-** $\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y+2z}=\frac{dz}{3y+4z}$.

التمرين 02: أُعطي الحلّ العامّ لكل معادلة تفاضليّة جزئيّة مما يلي:

1- $xu_x+2(y-a)u_y=y$.

2- $u_x-xu_y=-\frac{u^2}{x}$.

3- * $uu_x=\sqrt{1-u^2}$.

4- * $(y+u)u_x+(u+x)u_y=x+y$.

5- $yzu_x+xzu_y+xyu_z=0$.

6- $yzu_x+xzu_y+xyu_z+xyz=0$.

7- * $yu_x+xu_y+\left(1+z^2\right)u_z=3zu$.

8- * $x(cu-by)u_x+y(ax-cu)u_y=u(by-ax)$.

***التمرين 03:** برهن أنّ الحلّ العام لـ **م ت ج** $Au_x+Bu_y+Cu=0$ حيث A,B,C ثوابت حقيقيّة يُعطى بـ: $u(x,y)=f(Ay-Bx)e^{-Cx/A}$، حيث f دالة اختياريّة.

التمرين 04: لتكن المسألة الكوشيّة التاليّة:

$$\begin{cases} yu_x+u_y=0 \quad sur \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ u(x,0)=e^{-x} \end{cases}$$

1- عيّن المميّزات المرفقة بالمسألة.

2- برهن أنّ الحل يكون ثابتاً على طول كل مميّزة.

3- أعطي حلّ المسألة إذا كان موجوداً.

***التمرين 05:** نعتبر المسألة الكوشيّة على $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} yu_x-xu_y=0 \\ u(x,0)=f(x) \quad x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

1- عيّن المنحنيات المميّزة المرفقة بالمسألة.

2- ما هو الشرط على f حتى يكون للمسألة حلّ.

3- أعطي الحلّ في حالة $f(x)=\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^4}$.

التمرين 06: (مسألة في البعد 3) حلّ المسألة الكوشيّة التالية:

$$\begin{cases} au_x+bu_y+cu_z+du=0 \\ u(x,y,0)=e^{-\left(x^2+y^2\right)} \end{cases}$$

حيث a,b,c,d ثوابت حقيقيّة.

التمرين 07: حلّ المسألتين التاليتين:

***-1** $\begin{cases} u_x+3u_y-5u=2x^2 \\ u(x,0)=25x^2+10x+2 \end{cases}$ ، **2-** $\begin{cases} u_x+2u_y+2u=0 \\ u(x,y)=F(x,y) \quad sur \quad (C):y=x \end{cases}$

ملاحظة هامة : التمارين و الحالات المسبوقة بإشارة (*) إضافية ، يترك حلها للطالب لإعداده لأشكال التقويم المختلفة

حلّ السلسلة الثانية : المعادلات التفاضليّة الجزئيّة من الرتبة الأولى

<u>التمرين 01</u>: حلّ الجمل التفاضليّة التاليّة:

-2 الجملة $\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xz^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(S_1)$ تُكتب على الشكل:

$$\begin{cases}\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}\cdots\cdots\cdots(1)\\ \frac{dx}{x}=\frac{dz}{xz^2}\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

بمكاملة المعادلة (1) نجد: $xy=C_1$ و بالتالي: $y(x)=\frac{C_1}{x}$

بمكاملة المعادلة (2) نجد: $x+\frac{1}{z}=C_2$ و عليه: $z(x)=\frac{1}{C_2-x}$

-3 $$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y+2z}=\frac{dz}{3y+4z}\cdots\cdots\cdots\cdots(S_3).$$

لنعيّن التكاملات الأوّليّة لـ (S_3) و ذلك بالاستعانة بالتوطئة التاليّة

<u>توطئة:</u>

المساواة $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ **يمكن تفسيرها حسب التناسبيّة بـ**

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}\qquad \frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\lambda$$

و بالتّالي من أجل الثنائيّة الحقيقيّة (α,β) **حيث** $\alpha B+\beta D\neq 0$ **فإنّ:**

$$\frac{\alpha A+\beta C}{\alpha B+\beta D}=\frac{\alpha\lambda B+\beta\lambda D}{\alpha B+\beta D}=\lambda$$

وعلية بفضل التوطئة السابقة من (S_3) لدينا

$$\frac{dx}{x}=-\frac{(-3)dy}{(-3)(y+2z)}=\frac{(-2)dz}{(-2)(3y+4z)}=\frac{3dy+2dz}{3y+2z}=\frac{d(3y+2z)}{3y+2z}$$

أي أنّ

$$d(\ln(x))=d(\ln(3y(x)+2z(x)))$$

دالتّان لهما نفس المشتق معناه أنّهما تختلفان بثابت و عليه

$$\ln\left(\frac{3y(x)+2z(x)}{x}\right)=K$$

و هذا يعني أنّ

$\Phi_1(x,y,z)=\frac{3y+2z}{x}=C_1$ وهو تكامل أوّلي لـ (S_3)

(S_3) تؤديّ أيضًا إلى

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y+2z}=\frac{dz}{3y+4z}=\frac{dy+dz}{2(y+z)}=\frac{d(y+z)}{y+z}$$

وبالتّالي

$$d(\ln(x^2))=d(\ln(y(x)+z(x)))$$

وعلية

$\Phi_2(x,y,z)=\frac{y+z}{x^2}=C_2$ هو تكامل أولي آخر لـ (S_3)

و لحساب $y(x)$ و $z(x)$ يمكن اعتبار الجملة التالية

$$\begin{cases}3y+2z=C_1x\\ y+z=C_2x^2\end{cases}$$

بضرب المعادلة الثانية في -2 و الجمع نجد : $y(x)=C_1x-2C_2x^2$

و بالتعويض عن عبارة $y(x)$ في المعادلة الثانية نجد : $z(x)=-C_1x+3C_2x^2$

التمرين 02: إيجاد الحلّ العامّ لكل معادلة تفاضليّة:

9- $xu_x+2(y-a)u_y=y \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

الجملة المميّزة المرفقة بـ (1) هي: $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{2(y-a)}=\frac{dz}{y}\cdots\cdots\cdots\cdots(SC)$

بمكاملة المعادلة $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{2(y-a)}$ نجد: $\frac{x^2}{y-a}=C_1$ و عليه $\Phi_1(x,y,z)=\frac{x^2}{y-a}$ هو تكامل أوّلي لـ (SC)

و بمكاملة المعادلة $\frac{dy}{2(y-a)}=\frac{dz}{y}$ نجد $z-\frac{1}{2}y-\frac{a}{2}\ln(y-a)=C_1$

و علية $\Phi_2(x,y,z)=z-\frac{1}{2}y-\frac{a}{2}\ln(y-a)$ هو تكامل أوّلي ثاني لـ (SC)

و منه الدوال من الشكل $\Psi(x,y,z)=F\left(\Phi_1(x,y,z),\Phi_2(x,y,z)\right)$ تشكّل التكاملات الأوليّة للجملة المميّزة (SC).

و عليه حلول المعادلة (1) تُعطى بالشكل الضمني التالي:

$$(x,y,u)\mapsto F\left(\frac{x^2}{y-a},u(x,y)-\frac{1}{2}y-\frac{a}{2}\ln(y-a)\right)=Cons\tan te$$

10- $u_x-xu_y=-\frac{u^2}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

الجملة المميّزة المرفقة بـ (2) هي: $\frac{dx}{1}=-\frac{dy}{x}=\frac{xdz}{z^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(SC)$

بمكاملة المعادلة: $\frac{dx}{1}=-\frac{dy}{x}$ نجد: $\frac{1}{2}x^2+y=C_1$ و عليه $\Phi_1(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2+y$ هو تكامل أوّلي لـ (SC)

و بمكاملة المعادلة: $\frac{dx}{1}=-\frac{xdz}{z^2}$ نجد: $\ln(x)+\frac{1}{z}=C_2$ و عليه $\Phi_2(x,y,z)=\ln(x)+\frac{1}{z}$ هو تكامل أوّلي ثاني لـ (SC).

و منه الدوال من الشكل $\Psi(x,y,z)=F\left(\Phi_1(x,y,z),\Phi_2(x,y,z)\right)$ تشكّل التكاملات الأوليّة للجملة المميّزة (SC).

و عليه حلول المعادلة (2) تُعطى بالشكل الضمني التالي:

$$(x,y,u)\mapsto F\left(\frac{1}{2}x^2+y,\ln(x)+\frac{1}{u(x,y)}\right)=Cons\tan te$$

-5 $yzu_x + xzu_y + xyu_z = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

الجملة المميّزة المرفقة بـ (5) هي: $\begin{cases} \dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{xy} \cdots\cdots\cdots\cdots (SC) \\ dw = 0 \end{cases}$

بمكاملة المعادلة : $\dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{xz}$ نجد: $x^2 - y^2 = C_1$

و بمكاملة المعادلة : $\dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{xy}$ نجد: $y^2 - z^2 = C_2$

و المعادلة: $dt = 0$ تعطي: $w = C_3$

و بالتالي التكاملات الأوليّة للجملة (SC) هي: $\Phi_1(x,y,z,t) = x^2 - y^2$ ، $\Phi_2(x,y,z,t) = y^2 - z^2$ ، $\Phi_3(x,y,z,t) = w$.

و عليه حلول المعادلة (5) تُعطى بالشكل الضمني التالي:

$$(x,y,z,u) \mapsto F\left(x^2 - y^2, y^2 - z^2, u\right) = Cons\tan te$$

وحسب نظرية الدوال الضمنيّة توجد دالة g قابلة للمفاضلة بكفاية تسمح بكتابة الحلّ على الشكل:

$$u(x,y,z) = g\left(x^2 - y^2, y^2 - z^2\right)$$

-6 $yzu_x + xzu_y + xyu_z = -xyz \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

الجملة المميّزة المرفقة بـ (6) هي: $\dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{xy} = -\dfrac{dw}{xyz} \cdots\cdots\cdots\cdots (SC)$

بمكاملة المعادلة: $\dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{xz}$ نجد: $x^2 - y^2 = C_1$ و بالتالي: $\Phi_1(x,y,z,t) = x^2 - y^2$ هو منحنى تكاملي لـ (SC).

و بمكاملة المعادلة: $\dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{xy}$ نجد $y^2 - z^2 = C_2$ وبالتالي: $\Phi_2(x,y,z,t) = y^2 - z^2$ هو منحنى تكاملي ثاني لـ (SC).

بنفس الطريقة بمكاملة : $\dfrac{dz}{xy} = -\dfrac{dw}{xyz}$ نجد: $\dfrac{1}{2}z^2 + w = C_3$ و بالتالي: $\Phi_3(x,y,z,t) = \dfrac{1}{2}z^2 + w$

و عليه حلول المعادلة (5) تُعطى بالشكل الضمني التالي:

$$(x,y,z,u) \mapsto F\left(x^2 - y^2, y^2 - z^2, \frac{1}{2}z^2 + u\right) = Cons\tan te$$

<u>التمرين 04:</u> دراسة المسألة الكوشيّة التاليّة:

$$(IP)\begin{cases} yu_x + u_y = 0 \quad sur \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ u(x,0) = e^{-x} \end{cases}$$

-4 تعيّين المميّزات المرفقة بالمسألة.

الجملة المميّزة المرفقة بـ(IP): $\begin{cases}\dfrac{dx}{ds}=y\\ \dfrac{dy}{ds}=1\end{cases}$ و باعتبار $\begin{cases}x(0)=\tau\\ y(0)=0\end{cases}$ نكامل $\dfrac{dy}{ds}=1$ لنجد $y(s,\tau)=s$

وبالتعويض في المعادلة الأولى للجملة $dx=sds$ وبالمكاملة نجد $x=\frac{1}{2}s^2+c_1$ وبتعويض الشرط الابتدائي نجد

$x(s,\tau)=\frac{1}{2}s^2+\tau$ وبالتالي $x=\frac{1}{2}y^2+\tau$ و عليه المميّزات هي المنحنيات $x-\frac{1}{2}y^2=\tau$ حيث τ وسيط حقيقي.

5- إثبات أنّ الحل يكون ثابتاّ على طول كل منحنى مميز.

على طول كل مميّزة يكون τ ثابتا و عليه الدالة u للمتغيّر s فقط و بالتالي:

$$\frac{du}{ds}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}y+\frac{\partial u}{\partial y}1=0$$

و عليه الحلّ u ثابتا على كلّ مميزة.

6- حساب حلّ المسألة إذا كان موجوداً.

المنحنى الابتدائي للمسألة هو محور الفواصل تمثيله الوسيطي: $(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau))=(\tau,0)$

المسألة تقبل حلاً و حيداً لأنّ: $\gamma_2'(\tau)y(\tau)-\gamma_1'(\tau)1=-1\neq 0$

بحلّ المعادلة التفاضليّة العاديّة:

$\dfrac{du}{ds}=0$ مرفقة بالشرط الابتدائي $u(\tau,0)=e^{-\tau}$

نجد $u(\tau,s)=C$ منت الشرط الابتدائي نجد $u(\tau,s)=e^{-\tau}$

بالرجوع إلى x,y نجد: $u(x,y)=e^{\frac{1}{2}y^2-x}$

<u>التمرين 06:</u> (مسألة في البعد 3) حلّ المسألة الكوشيّة التالية:

$$\begin{cases}au_x+bu_y+cu_z+du=0\\ u(x,y,0)=e^{-(x^2+y^2)}\end{cases}$$
حيث a,b,c,d ثوابت حقيقيّة.

المسألة في $\mathbb{R}^3$ لها سطح ابتدائي هو المستوي $z=0$ تمثيله الوسيطي هو $(\tau_1,\tau_2,0)$ حيث $\tau_1,\tau_2\in\mathbb{R}$

1- حل الجملة المميّزة:

الجملة المميّزة هي: $\begin{cases}\dfrac{dx}{ds}=a\\ \dfrac{dy}{ds}=b\\ \dfrac{dz}{ds}=c\end{cases}$ مرفقة بالشروط الابتدائيّة $\begin{cases}x(0)=\tau_1\\ y(0)=\tau_1\\ z(0)=0\end{cases}$

بالمكاملة و تعويض الشروط الابتدائيّة نجد: $\begin{cases}x=as+\tau_1\\ y=bs+\tau_2\\ z=cs\end{cases}$ نفرض أنّ $c\neq 0$ (لو كان معدوم لكانت المسألة في $\mathbb{R}^3$)

و عليه مميزات المسألة هي المستقيمات من $\mathbb{R}^3$ المعرّفة بـ : $\begin{cases}x-\dfrac{a}{c}z=\tau_1\\ y-\dfrac{b}{c}z=\tau_2\end{cases}$ حيث $\tau_1,\tau_2\in\mathbb{R}$.

2- حلّ المعادلة التفاضليّة العاديّة:

على المميّزات لدينا: $\frac{du}{ds}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}=a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial z}{\partial s}$

و عليه نحلّ المعادلة الخطّية المتجانسة: $\frac{du}{ds}+du=0$ مرفقة بالشرط الابتدائي: $u(\tau_1,\tau_2,0)=e^{-(\tau_1^2+\tau_2^2)}$

لنحصل على $u(\tau_1,\tau_2,s)=Ke^{-ds}$ و بتعويض الشرط الابتدائي نجد $K=e^{-(\tau_1^2+\tau_2^2)}$

حلّ المسألة في الاحداثيات الجديدة هو $u(\tau_1,\tau_2,s)=e^{-(\tau_1^2+\tau_2^2+s)}$

و بالرجوع إلى الاحداثيات القديمة نجد: $u(x,y,z)=e^{-\frac{1}{c^2}\left((cx-az)^2+(cy-bz)^2+cz\right)}$

<u>التمرين 07:</u> حلّ المسألة:

-2 $\begin{cases} u_x+2u_y+2u=0 \\ u(x,y)=F(x,y) \quad sur \quad (C): y=x \end{cases}$

المنحنى الابتدائي للمسألة هو: تمثيله الوسيطي هو (τ,τ) حيث $\tau\in\mathbb{R}$

المسألة تقبل حلاً و حيداً لأنّ: $\gamma_2'(\tau)1-\gamma_1'(\tau)2=-1\neq 0$.

1- تعيّين المميّزات المرفقة بالمسألة.

الجملة المميّزة بالمسألة هي: $\begin{cases}\frac{dx}{ds}=1\\ \frac{dy}{ds}=2\end{cases}$ حيث $\begin{cases}x(0)=\tau\\ y(0)=0\end{cases}$ بالمكاملة نحصل على: $x=s+\tau$ و $y=2s$

وبالتعويض عن s نحصل على: $x-\frac{y}{2}=\tau$

وعليه المميّزات هي المنحنيات $x-\frac{1}{2}y=\tau$ حيث τ وسيط حقيقي.

2- حلّ المعادلة التفاضليّة العاديّة:

على المميّزات لدينا: $\frac{du}{ds}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}$

و عليه نحلّ المعادلة الخطّية المتجانسة: $\frac{du}{ds}+2u=0$ مرفقة بالشرط الابتدائي: $u(\tau,\tau)=F(\tau,\tau)$

بفصل المتغيرات نجد: $u(\tau,s)=Ke^{-2s}$ ومن الشرط الابتدائي نجد $u(\tau,\tau)=Ke^{-2\tau}$ أي أنّ

$K=u(\tau,\tau)e^{2\tau}=F(\tau,\tau)e^{2\tau}$ ، و بالتالي حلّ المسألة في الاحداثيات الجديدة هو $u(\tau,s)=F(\tau,\tau)e^{2(\tau-s)}$

و بالرجوع إلى الاحداثيات القديمة نجد: $u(x,y)=F\left(x-\frac{y}{2},x-\frac{y}{2}\right)e^{2(x-y)}$

السلسلة الثالثة: المعادلات التفاضليّة الخطّية من الرتبة الثانيّة

Équa-phy-Math

التمرين 01: عيّن حسب قيم المتغيرين x و y صنف **م ت ج** في كل حالة ممايلي:

1- $u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 15x + 2y$ ، 2- $x^2 y u_{xx} + xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$

3- $\sin(x) u_{xx} + 2\cos(x) u_{xy} + \sin(x) u_{yy} = 0$ ، 4- $x \ln(x) u_{xx} + 4u_{yy} + u_x - 3xyu = 0$

*5- $(1-x^2) u_{xx} + 2xyu_{xy} + (1-y^2) u_{yy} + xu_x + 3xu_y = 2u$

6- $(2x+\lambda) u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$

*7- $(\sin(x))^2 u_{xx} + 2y \sin(x) u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$

***التمرين 02:** عيّن الحلّ العام لكل **م ت ج** في كل حالة ممايلي:

1- $u_{yy} = x^2 + y^2$ ، 2- $u_{xy} = x^2 y$ ، 3- $u_{yy} - xu_y = x^2$

4- $u_{yy} - 4u_y + 3u = 0$ ، 5- $x^2 u_{xx} + 5u_x + 4u = 0$ 6- $xu_{xx} = u_x + x^2 y^2$

التمرين 03: حلّ المسائل الحاديّة التاليّة:

1- $\begin{cases} u_{xy} = 0 \\ u_x(x,0) = \cos(x) \\ u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \sin(y) \end{cases}$ ، 2- $\begin{cases} u_{xx} = \cos(x) \\ u_x(0,y) = y^2 \\ u(\pi, y) = \pi \sin(y) \end{cases}$ ، *3- $\begin{cases} u_{xy} = (1+x^2) y^2 \\ u_y(0,y) = y^3 \\ u(x,2) = \cos(x) \end{cases}$

التمرين 04: عيّن الشكل القياسي المرفق لكل **م ت ج** في كل حالة ممايلي:

1- $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = u_x - xu_y$ ، 2- $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} = 3u_x - yu$

3- $3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 0$ ، *4- $u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 4uu_x = 0$

*5- $4u_{xx} - 8u_{xy} + 4u_{yy} = 1$ ، *6- $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = u_x + u_y$

***التمرين 05:** ناقش حسب قيم المتغيّر y صنف المعادلة التفاضليّة الجزئيّة التاليّة:

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

ثمّ عيّن الشكل القياسي المرفق في كلّ حالة.

التمرين 06: نعتبر الـ **م ت ج** التاليّة:

$$x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

1- عيّن صنف المعادلة $(*)$.
2- عيّن الشكل القياسي لـ $(*)$.
3- أوجد الحلّ العام لـ $(*)$.

<u>التمرين 07:</u> نعتبر الـ **م ت ج** التاليّة:

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

1- عيّن الساحة التي تكون من أجلها $(**)$ زائديّة .

2- عيّن الشكل القياسي المرفق.

*3- نفس الأسئلة في الحالة الناقصيّة.

***<u>التمرين 08:</u>** لتكن الـ **م ت ج**:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$$ حيث A, B, C ثوابت حقيقيّة

1- عيّن الشكل القياسي المرفق (ناقش كل الحالات) .

<u>النتيجة:</u> في الحالة الزائديّة: $v_{\xi\eta} = 0$.

في الحالة المكافئيّة: $v_{\xi\xi} = 0$.

في الحالة الناقصيّة: $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = 0$.

***التمرين09:** بيّن أنّ التحويل $\xi = \ln x$ و $\eta = \ln y$ يحوّل المعادلة التفاضليّة الجزئيّة التاليّة:

$$Ax^2u_{xx} + Bxyu_{xy} + Cy^2u_{yy} + Dxu_x + Eyu_y + F(u) = G(x, y)$$ حيث A, B, C, D, E ثوابت حقيقيّة

إلى معادلة ذات معاملات ثابتة.

<u>تطبيق:</u> أوجد الحلّ العام لكل **م ت ج** مايلي:

1- $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = xy$.

2- $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} - xu_x = 1$.

<u>ملاحظة هامة</u> : التمارين و الحالات المسبوقة بإشارة (*) إضافية ، يترك حلها للطالب لإعداده لأشكال التقويم المختلفة

حلّ السلسلة الثالثة: المعادلات التفاضليّة الخطّية من الرتبة الثانيّة

التمرين 01: تعيين حسب قيم المتغيرين x و y صنف م ت ج :

-2
$$u_{xx}+2yu_{xy}+u_{yy}=15x+2y\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
لدينا: $\Delta(x,y)=(2y)^2-4=4y^2-4=4(y^2-1)$ و عليه

- ✓ إذا كان $y=\pm 1$ فإنّ المعادلة (1) مكافئيّة من أجل x.
- ✓ إذا كان $-1<y<1$ فإنّ المعادلة (1) ناقصيّة من أجل x.
- ✓ إذا كان $(y<-1)\vee(y>1)$ فإنّ المعادلة (1) زائديّة من أجل x.

-3
$$x^2yu_{xx}+xyu_{xy}-y^2u_{yy}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
لدينا: $\Delta(x,y)=(xy)^2-4x^2y^3=x^2y^2(1-4y)$ و عليه

- ✓ إذا كان $(x=0)\vee(y=0)\vee\left(y=\frac{1}{4}\right)$ فإنّ المعادلة (2) مكافئيّة.
- ✓ إذا كان $\left(y<\frac{1}{4}\right)\wedge(x\neq 0)\wedge(y\neq 0)$ فإنّ المعادلة (2) زائديّة.
- ✓ إذا كان $\left(y>\frac{1}{4}\right)\wedge(x\neq 0)\wedge(y\neq 0)$ فإنّ المعادلة (2) ناقصيّة.

-4
$$\sin(x)u_{xx}+2\cos(x)u_{xy}+\sin(x)u_{yy}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$
لدينا: $\Delta(x,y)=(2\cos x)^2-4(\sin x)^2=4\left[(\cos x)^2-(\sin x)^2\right]=4\cos(2x)$ و عليه

- ✓ إذا كان $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ فإنّ $\cos(2x)=0$ وبالتالي المعادلة(3) مكافئيّة.
- ✓ إذا كان $x\in\left]-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right[$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ فإنّ $\cos(2x)>0$ وبالتالي المعادلة(3) زائديّة.
- ✓ إذا كان $x\in\left]\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{3\pi}{4}+k\pi\right[$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ فإنّ $\cos(2x)<0$ وبالتالي المعادلة(3) ناقصيّة.

-5
$$x\ln(x)u_{xx}+4u_{yy}+u_x-3xyu=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$
المعادلة (4) معرّفة إذا كان $x>0$

وعليه : $\Delta(x,y)=(0)^2-16x\ln(x)=-16x\ln(x)$ أي أنّ إشارة $\Delta(x,y)$ عكس إشارة $\ln(x)$

- ✓ إذا كان $x=1$ فإنّ المعادلة (4) مكافئيّة.
- ✓ إذا كان $0<x<1$ فإنّ المعادلة (4) زائديّة.
- ✓ إذا كان $x>1$ فإنّ المعادلة (4) ناقصيّة.

-6
$$(2x+\lambda)u_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(6)\quad\text{حيث}\quad\lambda\in\mathbb{R}$$
لدينا: $\Delta(x,y)=(2xy)^2+4y^2(2x+\lambda)=4y^2\left(x^2+2x+\lambda\right)$

ليكن $\delta(x,y)=4-4\lambda=4(1-\lambda)$ مميّز العبارة $\left(x^2+2x+\lambda\right)$

- ✓ إذا كان $y=0$ فإنّ المعادلة (6) مكافئيّة من أجل $\lambda\in\mathbb{R}$.
- ✓ إذا كان $y\neq 0$ فإنّ إشارة $\Delta(x,y)$ من نفس إشارة العبارة $x^2+2x+\lambda$.
  - ▪ إذا كان $\lambda=1$ فإن $\delta(x,y)=0$ أي أنّ $x^2+2x+\lambda>0$ فإنّ المعادلة (6) زائديّة.

- إذا كان $\lambda > 1$ فإن $\delta(x,y) < 0$ أي أنّ $x^2+2x+\lambda > 0$ فإنّ المعادلة (6) زائديّة.
- إذا كان $\lambda < 1$ فإن $\delta(x,y) > 0$ أي أنّ $x^2+2x+\lambda = 0$ نقبل حلّين مختلفين $x_1 = -1-\sqrt{1-\lambda}$ و $x_2 = -1+\sqrt{1-\lambda}$ وعليه.

- إذا كان $(x = x_2) \vee (x = x_1)$ فإنّ المعادلة (6) مكافئيّة.
- إذا كان $x \in]x_1, x_2[$ فإنّ $x^2+2x+\lambda < 0$ أي أنّ المعادلة (6) ناقضيّة.
- إذا كان $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ فإنّ $x^2+2x+\lambda > 0$ و بالتالي (6) زائديّة.

<u>التمرين 03:</u> حلّ المسائل الحاديّة التاليّة:

-1
$$(IP_1)\begin{cases} u_{xy} = 0 \\ u_x(x,0) = \cos(x) \\ u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \sin(y) \end{cases}$$

بالمكاملة المباشرة نجد الحلّ العام للمعادلة: $u_{xy} = 0$ هو: $u(x,y) = f(y) + g(x)$ حيث f, g دالتين اختياريتين.

$u_x(x,y) = g'(x)$ و حسب الشرط الأول نجد $u_x(x,0) = g'(x)$ معناه أنّ $g'(x) = \cos x$ أي أنّ $g(x) = \sin x$

و حسب الشرط الثاني نجد $\sin(y) = u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = f(y) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و عليه: $f(y) = \sin(y) - 1$

و بالتالي حل المسألة (IP_1) هو: $u(x,y) = \sin(y) + \sin(x) - 1$.

-2
$$(IP_2)\begin{cases} u_{xx} = \cos(x) \\ u_x(0,y) = y^2 \\ u(\pi, y) = \pi\sin(y) \end{cases}$$

بالمكاملة المباشرة نجد الحلّ العام للمعادلة: $u_{xx} = \cos(x)$ هو: $u(x,y) = -\cos(x) + xf(y) + g(y)$ حيث f, g دالتين اختياريتين.

لدينا $u_x(x,y) = \sin(x) + f(y)$ حسب الشرط الابتدائي الأول نجد: $f(y) = y^2$.

و حسب الشرط الثاني لدينا: $\pi\sin(y) = u(\pi, y) = -\cos(\pi) + \pi y^2 + g(y) = 1 + \pi y^2 + g(y)$

وعليه $g(y) = \pi\sin(y) - \pi y^2 - 1$

و بالتالي حلّ المسألة (IP_2) هو: $u(x,y) = -\cos(x) + (x-\pi)y^2 + \pi\sin(y) - 1$

<u>التمرين 04:</u> عيّن الشكل القياسي المرفق لكل **م ت ج** في كل حالة ممايلي:

-2 $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = u_x - xu_y \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$.

$\Delta(x,y) = (2)^2 - 4(1)(1) = 0$ المعادلة (1) مكافئيّة

المعادلة المميّزة الوحيدة هي:

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

بمكاملتها نجد $x - y = C$ و عليه نحصل المنحنى التكاملي $\varphi_2(x,y) = x - y$

و بالتالي $\eta = x - y$.

لتعيين المركبة الثانية لإحداثيات المميّزة هناك الكثير من الخيارات نختار مثلا: $\xi = x$

هذا الاختيار جيّد لأنّ $\xi = x$ قابلة للاشتقاق باستمرار مرّتين و $J(\xi,\eta) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

وعليه من أجل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ نستعمل جملة الاحداثيات التالية: $\begin{cases} \xi = x \\ \eta = x - y \end{cases}$ $u(x,y) = v(\xi,\eta)$

و باستعمال قاعدة اشتقاق تركيب الدوال نجد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}$$

بالتعويض في (1) نجد:

$$v_{\xi\xi} = (1+\xi) v_{\eta} + v_{\xi}$$

-3 $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} = 3u_x - yu \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$.

$\Delta(x,y) = (2)^2 - 4(1)(5) = -16 < 0$ المعادلة (2) ناقصيّة.

المعادلتين المميزتين هما:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a} = \frac{2 \pm i\sqrt{16}}{2} = 1 \pm 2i$$

بالتطبيق طريقة فصل المتغيرات نجد: $y - x \pm 2xi = C$

و عليه نضع:

$\begin{cases} \xi(x,y) = y - x \\ \eta(x,y) = 2x \end{cases}$ أي أنّ: $\begin{cases} x = \dfrac{\eta}{2} \\ y = \dfrac{2\xi + \eta}{2} \end{cases}$

و بالتالي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial v}{\partial \eta}-\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)=4\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}-4\frac{\partial v}{\partial \eta \partial \xi}+\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)=-\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}$$

بالتعويض في (2) نجد:

$$v_{\eta\eta}+v_{\xi\xi}=\frac{3}{2}v_{\eta}-\frac{3}{4}v_{\xi}-\frac{2\xi+\eta}{8}v$$

-4 $$3u_{xx}+10u_{xy}+3u_{yy}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$\Delta(x,y)=(10)^2-4(3)(3)=64>0$ المعادلة (3) زائديّة.

المعادلتين المميّزتين لـ (3) هما: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}$ و $\frac{dy}{dx}=3$

بفصل المتغيرات والمكاملة نجد:

$x-3y=C_1$ و $3x-y=C_2$ حيث C_1,C_2 ثابتين حقيقيين

وعليه المنحنيات المميّزة لـ (1) هي:

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y)=x-3y\\ \varphi_2(x,y)=3x-y\end{cases}$$

وبالتالي نضع:

$$\begin{cases}\xi=x-3y\\ \eta=3x-y\end{cases} \quad \text{و} \quad u(x,y)=v(\xi,\eta)$$

وحسب قاعدة اشتقاق دالة مركبة لدينا:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial \xi}+3\frac{\partial v}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=-3\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

وبالتالي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}+3\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+6\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}+9\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-3\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)=9\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+6\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-3\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)=-3\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-10\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}-3\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

و بالتعويض في (3) نجد:

$-64v_{\eta\xi}=0$ أي أنّ: $v_{\eta\xi}=0$

التمرين 06: نعتبر الـ م ت ج التاليّة:

$$x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+xu_x+yu_y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

4- تعيّين صنف المعادلة $(*)$:

لدينا: $\Delta(x,y)=(2xy)^2-4x^2y^2=4x^2y^2-4x^2y^2=0$ و عليه المعادلة $(*)$ مكافئيّة على $\mathbb{R}^2$.

5- تعيّين الشكل القياسي لـ $(*)$:

نفرض أنّ $(x,y)\neq(0,0)$ لأنّه إذا كان $(x,y)=(0,0)$ فإنّ المعادلة $(*)$ تافهة (0=0).

المعادلة المميّزة المرفقة بـ $(*)$ هي: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2xy}{2x^2}=-\dfrac{y}{x}$

بفصل المتغيرات و المكاملة نجد: $xy=C_2$ عليه نحصل المنحنى التكاملي $\varphi_2(x,y)=xy$

و بالتالي نضع: $\eta=xy$. لتعيين المركبة الثانية لإحداثيات المميّزة هناك الكثير من الخيارات نختار مثلا: $\xi=x$

هذا الاختيار جيّد لأنّ $\xi=x$ قابلة للاشتقاق باستمرار مرّتين و $J(\xi,\eta)=\begin{vmatrix}1 & y\\ 0 & x\end{vmatrix}=x\neq0$

وباستعمال قاعدة اشتقاق تركيب الدوال نجد:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial\xi}+y\frac{\partial v}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{\partial v}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}+y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial^2v}{\partial\xi^2}+2y\frac{\partial^2v}{\partial\xi\partial\eta}+y^2\frac{\partial^2v}{\partial\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)=x^2\frac{\partial^2v}{\partial\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial v}{\partial\eta}+xy\frac{\partial^2v}{\partial\eta^2}+x\frac{\partial^2v}{\partial\xi\partial\eta}$$

وبالتعويض في $(*)$ نجد:

$$\begin{aligned}&x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+xu_x+yu_y\\&=\xi^2\left(\frac{\partial^2v}{\partial\xi^2}+2\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2v}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\eta^2}{\xi^2}\frac{\partial^2v}{\partial\eta^2}\right)-2\eta\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}+\eta\frac{\partial^2v}{\partial\eta^2}+\xi\frac{\partial^2v}{\partial\xi\partial\eta}\right)+\frac{\eta^2}{\xi^2}\left(\xi^2\frac{\partial^2v}{\partial\eta^2}\right)\\&\quad+\xi\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)+\eta\frac{\partial v}{\partial\eta}=0\end{aligned}$$

و عليه الشكل القياسي لـلمعادلة $(*)$ هو:

$$\frac{\partial^2v}{\partial\xi^2}=-\frac{1}{\xi}\frac{\partial v}{\partial\xi}$$

6- إيجاد الحلّ العام لـ $(*)$.

في الشكل القياسي لـ $(*)$ نضع من أجل η مثبّت : $\dfrac{\partial v}{\partial\xi}=z(\xi,\eta)$ و بالتالي: $\dfrac{\partial^2v}{\partial\xi^2}=\dfrac{dz}{d\xi}$

و عليه الشكل القياسي مكافئ للمعادلة العاديّة: $\dfrac{dz}{d\xi}=-\dfrac{1}{\xi}z$

بفصل المتغيرات و المكاملة نجد: $z(\xi,\eta)=\dfrac{f(\eta)}{\xi}$ أي أنّ: $\dfrac{\partial v}{\partial \xi}=\dfrac{f(\eta)}{\xi}$

وبالمكاملة بالنسبة لـ ξ نجد: $v(\xi,\eta)=\int \dfrac{f(\eta)}{\xi}d\xi=f(\eta)\int\dfrac{d\xi}{\xi}=f(\eta)\ln(\xi)+g(\eta)$

و عليه الحلّ العام لـ $(*)$ هو:

$$u(x,y)=f(xy)\ln(x)+g(xy)$$

حيث $f\,,g$ دالتين اختياريتين قابلتين للمفاضلة مرّتين.

التمرين 07: نعتبر الـ **م ت ج** التاليّة:

$$u_{xx}+yu_{yy}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

3- تعيّين الساحة التي تكون من أجلها $(**)$ زائديّة .

لدينا: $\Delta(x,y)=(0)^2-4y=-4y$ و عليه تكون $(**)$ زائديّة إذا كان $y<0$.

4- تعيّين الشكل القياسي المرفق في حالة $y<0$.

المعادلتان المميّزتان لـ $(**)$ هما:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0\pm 2\sqrt{-y}}{2}=\pm\sqrt{-y}$$

بفصل المتغيرات و المكاملة نجد:

$x-2\sqrt{-y}=C_1$ و $-x-2\sqrt{-y}=C_2$ حيث C_1,C_2 ثابتين حقيقين

و عليه المنحنيات المميّزة لـ $(**)$ هي:

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y)=x-2\sqrt{-y}\\ \varphi_2(x,y)=-x-2\sqrt{-y}\end{cases}$$

و بالتالي نضع:

$$\begin{cases}\xi=x-2\sqrt{-y}\\ \eta=-x-2\sqrt{-y}\end{cases} \quad \text{و} \quad u(x,y)=v(\xi,\eta)$$

و عليه
$$\begin{cases}x=\dfrac{\xi-\eta}{2}\\ \sqrt{-y}=-\dfrac{1}{4}(\xi+\eta)\end{cases}$$

وحسب قاعدة اشتقاق دالة مركبة لدينا:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

و

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial v}{\partial \eta \partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)$$

$$=-\frac{1}{y}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-\frac{1}{y}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}-\frac{1}{2}(-y)^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{1}{2}(-y)^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial v}{\partial \eta}-\frac{2}{y}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}$$

و بالتعويض في $(**)$ نجد:

$$u_{xx}+yu_{yy}=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial v}{\partial \eta \partial \xi}$$

$$+y\left(-\frac{1}{y}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-\frac{1}{y}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}-\frac{1}{2}(-y)^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{1}{2}(-y)^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial v}{\partial \eta}-\frac{2}{y}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}\right)=0$$

وعليه الشكل القياسي لـ $(**)$ هو:

$$\frac{\partial v}{\partial \eta \partial \xi}=-\frac{1}{2(\xi+\eta)}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)$$