1 . تذكير بمكاملة جمل المعادلات التفاضليّة العاديّة من الرتبة الأولى:

نعتبر جملة المعادلات التفاضلية العاديّة من الرتبة الأولى:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n) \\ \qquad \ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n) \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (S)$$

حيث $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n$ دوال مجهولة للمتغير المستقل x .

مكاملة الجملة (S) تعني إيجاد n دالّة $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n$ تحقق الجملة (LS) و الشروط الابتدائيّة

$$y_1(x_0) = y^0, y_2(x_0) = y^1, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n(x_0) = y^n$$

نحلّ الجملة (S) بالطريقة التاليّة:

- نشتق المعادلة الأولى في الجملة (S) بالنسبة لـ x لنحصل على

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{df_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$$

نعوّض على $\dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{dy_2}{dx} \cdots\cdots\cdots\cdots, \dfrac{dy_n}{dx}$ بدلالة $f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, f_n$ و ذلك من معادلات الجملة (LS) لنجد

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

نعيد نفس العمل على المعادلة (2) لنجد

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

نكرّر العمليّة بشكل دوري فنحصل على

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (n)$$

و بضم المعادلة الأولى في الجملة (LS) و الـ $n-1$ معادلة المحصّل عليها لنجد الجملة التاليّة:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n) \\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n) \\ \qquad \ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots \\ \dfrac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n) \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (S1)$$

من الـ $n-1$ معادلة الأولى من الجملة $(S1)$ نعبّر على $y_2, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n$ بدلالة x, y_1 و المشتقّات $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2} \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ لنحصل على الجملة التاليّة

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2\left(x, y_1, y_1', \ldots\ldots\ldots\ldots, y_1^{(n-1)}\right) \\ y_3 = \varphi_3\left(x, y_1, y_1', \ldots\ldots\ldots\ldots, y_1^{(n-1)}\right) \\ \quad \ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n\left(x, y_1, y_1', \ldots\ldots\ldots\ldots, y_1^{(n-1)}\right) \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (S2)$$

وبتعويض معادلات الجملة $(S2)$ في المعادلة الأخيرة للجملة $(S1)$ نجد المعادلة

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, y_1', \ldots\ldots\ldots\ldots, y_1^{(n-1)}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (E)$$

وبمكاملتها نجد

$$y_1 = \Psi_1(x, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_n)$$

- نعيد نفس الخطوات على باقي معادلات الجملة (S) (أي من المعادلة 2 الى المعادلة n) لنحصل على

$$\begin{cases} y_1 = \Psi_1(x, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_n) \\ y_2 = \Psi_2(x, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_n) \\ y_3 = \Psi_3(x, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_n) \\ \vdots \qquad \vdots \\ y_n = \Psi_n(x, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_n) \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (S')$$

و بالتّالي نكون قد وجدنا الحلّ العام لـ (S)، و لإيجاد الثوابت الاختباريّة $C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_n$ نعوّض بالشروط الابتدائيّة لنجد حل المسألة كما في حالة معادلة وحيدة.

ملاحظة: إذا كانت معادلات الجملة (S) خطّية بالنسبة للدّوال المجهولة فإنّ المعادلة (E) أيضا خطّية.

مثال: كامل الجملة التاليّة

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - z \\ \frac{dz}{dx} = -4y + z \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

حيث x هو المتغيّر المستقل

باشتقاق المعادلة الأولى نجد

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - z \\ \frac{d^2y}{dx^2} = 5y - 2z \end{cases}$$

و بضرب الأولى في -2 والجمع نجد المعادلة التالية

$$y''-2y'-3y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

معادلتها المميّزة هي $r^2-2r-3=0$ ، جذراها $r_1=-1$ و $r_2=3$

و بالتالي الحلّ العام لـ(2) هو: $y(x)=Ae^{-x}+Be^{3x}$ و بالتعويض في المعادلة الأولى لـ (1) نجد

$$z(x)=y(x)-y'(x)=Ae^{-x}+Be^{3x}+Ae^{-x}-3Be^{3x}=2Ae^{-x}-2Be^{3x}$$

و علية $y(x)=F_1(x,A,B)$ و $z(x)=F_2(x,A,B)$ حيث A,B ثابتين اختياريين.

✓ التكاملات الأوليّة لجملة تفاضليّة عاديّة من الرتبة الأولى:

من الجملة (S') التي تعبّر على الحلّ العام لـ (S) نستطيع حساب الثوابت C_i بدلالة المتغيّر المستقل x و الدّوال المجهولة y_i لنحصل على الجملة التالية:

$$\begin{cases} C_1=\Phi_1(x,y_1,y_2,\ldots\ldots\ldots,y_n) \\ C_2=\Phi_2(x,y_1,y_2,\ldots\ldots\ldots,y_n) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ C_n=\Phi_n(x,C_1,C_2,\ldots\ldots\ldots,C_n) \end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(IC)$$

تعريف1:

الدوال Φ_i الثابتة المعرّفة في الجملة (IC) تُسمى **التكاملات الأولية** للجملة (S) .

تعريف2:

نسمي **تكاملاً أوليا** للجملة (S) كل دالّة Φ من الصنف C^1 ليست ثابتة معرّفة على $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}$، ثابتة من أجل كلّ حلّ لـ (S) أي من أجل $(y_1(x),y_2(x),\ldots\ldots\ldots,y_n(x))$ حلّ لـ (S) فإنّ

$\Phi(y_1(x),y_2(x),\ldots\ldots\ldots,y_n(x))=Canst$.

مثال: لنحل الجملة التاليّة

$$\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx}+y+2z=0 \\ x\dfrac{dz}{dx}-3y-4z=0 \end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

انطلاقا من تعيين تكاملاتها الأوّليّة

الجملة $(*)$ مكافئة للجملة

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y+2z}=\frac{dz}{3y+4z}\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

لنعيّن التكاملات الأوّلية لـ$(**)$ و ذلك بالاستعانة بالتوطئة التاليّة

توطئة:

المساواة $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ يمكن تفسيرها حسب التناسبيّة بـ

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}\qquad \frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\lambda$$

و بالتّالي من أجل الثنائيّة الحقيقيّة (α,β) حيث $\alpha B+\beta D\neq 0$ فإنّ:

$$\frac{\alpha A+\beta C}{\alpha B+\beta D}=\frac{\alpha\lambda B+\beta\lambda D}{\alpha B+\beta D}=\lambda$$

وعلية بفضل التوطئة السابقة من $(**)$ لدينا

$$\frac{dx}{x}=-\frac{(-3)dy}{(-3)(y+2z)}=\frac{(-2)dz}{(-2)(3y+4z)}=\frac{3dy+2dz}{3y+2z}=\frac{d(3y+2z)}{3y+2z}$$

أي أنّ

$$d\left(\ln(x)\right)=d\left(\ln\left(3y(x)+2z(x)\right)\right)$$

دالّتان لهما نفس المشتق معناه أنّهما تختلفان بثابت وعليه

$$\ln\left(\frac{3y(x)+2z(x)}{x}\right)=K$$

وهذا يعني أنّ

$$\Phi_1(x,y,z)=\frac{3y+2z}{x}=C_1$$ وهو تكامل أوّلي لـ $(*)$

$(**)$ تؤدّي أيضا إلى

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y+2z}=\frac{dz}{3y+4z}=\frac{dy+dz}{2(y+z)}=\frac{d(y+z)}{y+z}$$

وبالتّالي

$$d\left(\ln(x^2)\right)=d\left(\ln\left(y(x)+z(x)\right)\right)$$

وعلية

$$\Phi_2(x,y,z)=\frac{y+z}{x^2}=C_2$$ هو تكامل أولي آخر لـ $(*)$

و لحساب $y(x)$ و $z(x)$ يمكن اعتبار الجملة التالية

$$\begin{cases}3y+2z=C_1x\\ y+z=C_2x^2\end{cases}$$

بضرب المعادلة الثانية في -2 و الجمع نجد : $y(x)=C_1x-2C_2x^2$

و بالتعويض عن عبارة $y(x)$ في المعادلة الثانية نجد : $z(x)=-C_1x+3C_2x^2$

2. الحلّ العامّ للمعادلة التفاضليّة الجزئيّة النصف خطّية من الرتبة الأولى:

سنهتم فقط بالحالة الشبّه خطّية (لأنّ الحالتين **الخطّية** و **النصف خطّية** حالات خاصّة من الشّبه خطّية)

تعريف:

نسمّي معادلة تفاضليّة جزئيّة **نصف خطّية** من الرتبة الأولى ذات المجهول u كل معادلة من الشكل:

$$a_1(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=f(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n,u)$$

حيث $(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)\in\Omega$ ، Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$ ، و المعاملات $a_1,a_2,\cdots\cdots\cdots,a_n$ و الطّرف الثاني f دوال معطاه.

كحالة خاصّة في البعد 2 المعادلة التفاضليّة الجزئيّة النصف خطّية لها الشكل التّالي:

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y,u)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(E)$$

حيث $(x,y)\in\Omega$ مفتوح من $\mathbb{R}^2$ ، و الدوال a,b,c نفرض أنّها من الصنف C^1 على مفتوح من $\mathbb{R}^3$.

مثال: المعادلة

$$x(y-u)\frac{\partial u}{\partial x}+y(x+u)\frac{\partial u}{\partial y}=(x-y)u$$

نصف خطّية من الرتبة الأولى في البعد 2 .

- **البحث على الحلّ بشكل ضمني:**

إذا كانت الدّالة u حلّ لـ (E) فيمكن اعتبار النقط $(x,y,u(x,y))$ كسطح من $\mathbb{R}^3$ ، وبالتالي نبحث على حلول (E) على شكل ضمني، أي نبحث على دوال φ تحتوي الحلّ u ضمنيا

$$\varphi(x,y,z)=Cons\tan te\Leftrightarrow z=u(x,y)$$

حسب **نظريّة الدّوال الضمنيّة** من أجل (x,y) حيث $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y)\neq 0$ لدينا

$$\frac{\partial u}{dx}=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}},\quad \frac{\partial u}{dy}=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$$

u حلّ لـ (E) إذا كان

$$a(x,y,u(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b(x,y,u(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial y}+c(x,y,u(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

ولدينا من جهة أخرى

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=0$$

من المعادلتين الأخيرتين نستنتج أنّ حلّ (E) مرتبط بحل الجملة التفاضليّة العاديّة التالية

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b(x,y,z)}{a(x,y,z)}\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{c(x,y,z)}{a(x,y,z)}\end{cases}.$$

والتي يمكن صياغتها على الشكل التالي

$$\frac{dx}{a(x,y,z)}=\frac{dy}{b(x,y,z)}=\frac{dz}{c(x,y,z)}\cdots\cdots\cdots\cdots(SC)$$

هذه الجملة تسمى **الجملة المميّزة للمعادلة** (E) .

وعلية يمكن كتابة النظريّة التالية

نظريّة:

حلول المعادلة (E) هي التكاملات الأوليّة للجملة المميّزة (SC)، فإذا كان Φ_1,Φ_2 تكاملين أوليين مستقلين للجملة المميّزة (SC) وكانت F دالة لمتغيرين قابلة للمفاضلة ليست ثابتة فإنّ حلول (E) تُكتب على الشكل الضمني

$$F\left(\Phi_1(x,y,u(x,y)),\Phi_2(x,y,u(x,y))\right)=Cons\tan te$$

مثال: لنحل المعادلة

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+(y+2u)\frac{\partial u}{\partial y}=3y+4u$$

الجملة المميّزة المرفقة

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y+2z}=\frac{dz}{3y+4z}$$

التي تمّ حلها في مثال سابق، تكاملاتها الأولية هي:

$$\Phi_2(x,y,z)=\frac{y+z}{x^2}\quad و\quad \Phi_1(x,y,z)=\frac{3y+2z}{x}$$

و منه الدوال من الشكل $\Psi(x,y,z)=F\left(\Phi_1(x,y,z),\Phi_2(x,y,z)\right)$ تشكّل التكاملات الأوليّة للجملة المميّزة

وعلية يمكن التعبير على حلول المعادلة المعتبرة بالشكل الضمني التالي

$$(x,y,u)\mapsto F\left(\frac{3y+2u}{x},\frac{y+u}{x^2}\right)=Cons\tan te$$

تعريف:

نسميّ منحنى مميّزاً C للمعادلة (E) كلّ حلّ للجملة المميّزة المرفقة بها .

مثال: لنحل المعادلة

$$y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

الجملة المميّزة المرفقة

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{y}=-\dfrac{dy}{x}\\ dz=0\end{cases}$$

التكاملان الأوّليان لها هما

$$\Phi_2(x,y,z)=x^2+y^2 \quad \text{و} \quad \Phi_1(x,y,z)=z$$

وبالتالي المنحنيات المميّزة لهذه المعادلة هي تقاطع السطحين من $\mathbb{R}^3$ المعرّفين بـ

$$S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad z=c_1\},\quad c_1\in\mathbb{R}$$

$$S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad x^2+y^2=c_2\},\quad c_2\in\mathbb{R}$$

ومنه

$$C=S_1\cap S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad z=c\wedge x^2+y^2=c\},\quad c\in\mathbb{R}$$

وعليه حلول المعادلة تعطى بالشكل الضمني

$$(x,y)\mapsto F\left(x^2+y^2,u(x,y)\right)=Cons\tan te$$

وحسب نظرية الدّوال الضمنيّة فإنّ الحل هو

$$u(x,y)=g\left(x^2+y^2\right)$$

حيث g دالّة اختيارية من الصف C^1 .

- **التعميم إلى ابعاد أكبر:**

نعتبر المعادلة التفاضلية الجزئيّة ذات المجهول u

$$a_1(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots\cdots+a_n(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=f(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n,u)\ldots(E)$$

الجملة المميّزة المرفقة بها هي

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n,u)}+\frac{dx_2}{a_2(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n,u)}+\cdots\cdots+\frac{dx_n}{a_n(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n,u)}\ldots\ldots\ldots(S)$$

البحث على مجموعة حلول (E) يؤول إلى إيجاد n **تكاملا أوّليا مستقلة** للجملة (S)، فإذا كانت $\Phi_1,\Phi_2,\cdots\cdots\cdots,\Phi_n$ تكاملات أوّلية مستقّلة للجملة (S) فإنّ مجموعة حلول (E) من الشكل:

$$F\left(\Phi_1,\Phi_2,\cdots\cdots\cdots,\Phi_n\right)=Constante$$

مثال: حلّ المعادلة التفاضليّة التالية:

$$yz\frac{\partial u}{\partial x}+xz\frac{\partial u}{\partial y}-xy\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

لنبحث على دالة φ تُعطي الحلّ u بشكل ضمنّي

$$\varphi(x,y,z,u)=Constante \Leftrightarrow w=u(x,y,z)$$

الجملة المميّزة هي

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{yz}=\dfrac{dy}{xz}=-\dfrac{dz}{xy}\\ dw=0\end{cases}$$

التكاملات الأوّلية المرفقة بها

$\Phi_1(x,y,z,w)=w$ ، $\Phi_2(x,y,z,w)=x^2-y^2$ و $\Phi_2(x,y,z,w)=y^2+z^2$

و بالتّالي كل الحلول معرّفة بالشكل الضّمني

$$(x,y,z)\mapsto F\left(x^2-y^2,y^2+z^2,u(x,y,z)\right)=Constante$$

و علية

$$u(x,y,z)=g\left(x^2-y^2,y^2+z^2\right)$$

حيث g دالّة سلسة بكفاية.

3. حل مسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضليّة الجزئية من الرتبة الأولى (طريقة المميّزات):

3.1 حالة معادلة خطّية:

سنستعرض في هذه الفقرة طريقة تمكننا من حلّ مسائل القيم الابتدائيّة من الشكل:

$$\begin{cases}a(x,t)u_x+b(x,t)u_t+c(x,t)u=0\\ u(x,0)=\phi(x)\end{cases}$$

حيث $-\infty<x<\infty$ ، $0<t<\infty$ و ϕ دالة معطاه.

إنّ حل هذه المسألة يُفسر بحقيقية فيزيائيّة هي أنّ الاضطراب في نقطة ما x ينتقل على طول خط (أو منحنى) في المستوي tx يُسمى بالمنحنى المميّز لهذه المعادلة الخطّية المتجانسة، لتعيين

هذه المنحنيات المميّزة نغيّر جملة الإحداثيات x,t بجملة جديدة s,τ حيث:

- ✓ s يتغيّر على المنحنيات المميّزة.
- ✓ τ ثابت على المنحنيات المميّزة ويتغير فقط على المنحنى الابتدائي ($t=0$ على أكثر احتمال).

نبدأ أولاً باختيار المتغيّر الجديد s الذي يحقق الصفة السابقة، لتتحوّل المعادلة التفاضليّة الجزئيّة:

$$a(x,t)u_x+b(x,t)u_t+c(x,t)u=0$$

إلى المعادلة التفاضليّة العاديّة:

$$\frac{du}{ds}+c(x,t)u=0$$

نختار المنحنيين $\{x(s),t(s)\quad 0<s<\infty\}$ و بوضع:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{ds}=a(x,t)\\[2mm] \dfrac{dt}{ds}=b(x,t)\end{cases}\qquad \text{(الجملة المميّزة)}$$

نجد:

$$\frac{du}{ds}=u_x\frac{dx}{ds}+u_t\frac{dt}{ds}=a(x,t)u_x+b(x,t)u_t$$

و بالتالي المعادلة التفاضلية الجزئيّة على المنحنيين $\{x(s),t(s)\quad 0<s<\infty\}$ هي معادلة تفاضليّة عاديّة بالنسبة للمتغيّر s، بحلّها ثمّ بالرجوع إلى المتغيرين x,t نجد حلّ المسألة المفروضة.

مثال تطبيقي 1:

لنحل المسألة $\begin{cases}u_x+u_t+2u=0\\ u(x,0)=\sin(x)\end{cases}$ (IP_1) حيث $-\infty<x<\infty$ ، $0<t<\infty$

الخطوة 1 : نعيّن المميزات و ذلك بحل الجملة المميزة المرفقة بالمعادلة

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{ds}=1\\[2mm] \dfrac{dt}{ds}=1\end{cases}\qquad \text{حيث}\quad 0<s<\infty$$

بمكاملة الجملة السابقة نجد:

$t(s)=s+c_2$ و $x(s)=s+c_1$

ولإيجاد الثابتين c_1,c_2 نختار في غالب الأحيان $\begin{cases} x(0)=\tau \\ t(0)=0 \end{cases}$

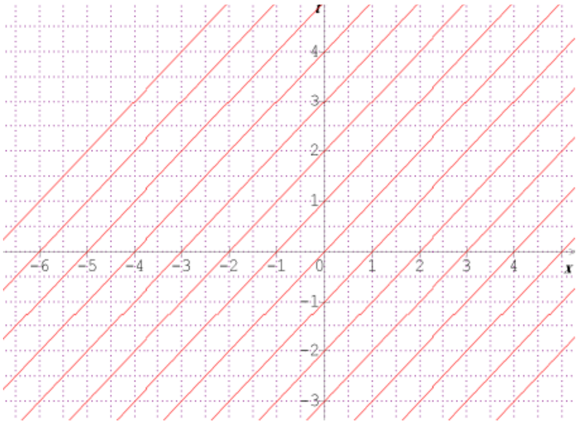
وبالتالي $c_1=\tau$ و $c_2=0$، وعليه المنحنيان المميزان للمعادلة هما

$t(s)=s$ $\quad\quad x(s)=s+\tau$

و بحذف s نحصل على

$$x-t=\tau \qquad -\infty<\tau<\infty$$

من أجل كل قيمة حقيقية لـ τ نجد خط مستقيم في المستوي xt



الشكل 1 : مميزات المسألة (IP_1)

الخطوة 2: تحويل المعادلة التفاضليّة الجزئيّة إلى المعادلة التفاضليّة العاديّة

$\frac{du}{ds}+2u=0$ مرفقة بالشرط الابتدائي $u(0)=\sin(\tau)$

بحل هذه المسألة الخطّية المتجانسة نجد:

$$u(s,\tau)=\sin(\tau)e^{-2s}$$

ولكن هذا الحلّ بدلالة المتغيرات الجديدة، لذا يجب كتابته بدلالة المتغيرات القديمة x,t .

الخطوة 3: نعبّر على s,τ بدلالة x,t

لدينا $t=s$ و $x=s+\tau$

لنجد $\tau=x-t$ و $s=t$

و عليه حل المسألة هو: $u(x,t)=\sin(x-t)e^{-2t}$.

خلاصة:

لحلّ المسألة $\begin{cases} a(x,t)u_x + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$ نمر بثلاث خطوات.

الخطوة 1: نحلّ الجملة المميّزة $\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = a(x,t) \\ \dfrac{dt}{ds} = b(x,t) \end{cases}$ و نجد ثابتي التكامل بوضع $\begin{cases} x(0) = \tau \\ t(0) = 0 \end{cases}$ ثمّ نعبّر على x,t بدلالة s,τ

أي نكتب: $\begin{cases} x = x(s,\tau) \\ t = t(s,\tau) \end{cases} \quad (*)$

الخطوة 2: نحل المسألة الابتدائية (الكوشية) التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{ds} + c\left[x(s,\tau), t(s,\tau)\right]u = 0 \\ u(0) = \phi(\tau) \end{cases}$$ حيث $0 < s < \infty$

لنجد الحلّ بدلالة s,τ (لأننا كتبنا المعامل c بدلالة s,τ)

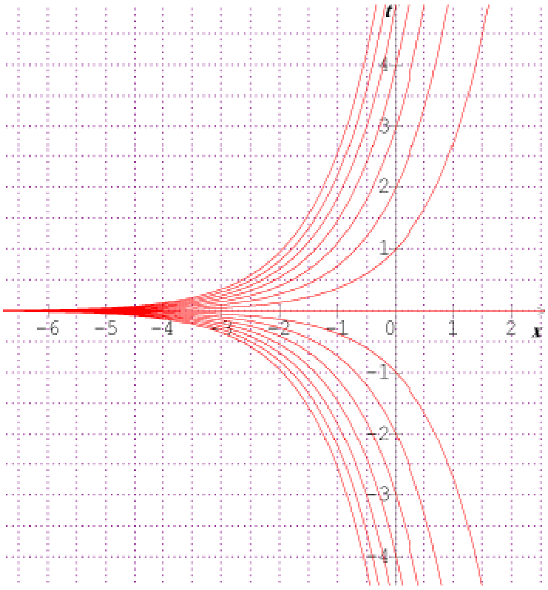
الخطوة 3: بعد حلّ المسألة السابقة نجد $u(s,\tau)$ نكتب s,τ بدلالة x,t باستعمال التحويل $(*)$ و بالتعويض في العبارة $u(s,\tau)$ نجد الحل بدلالة x,t .

مثال تطبيقي 2:

لنحل المسألة $\begin{cases} xu_x + u_t + tu = 0 \\ u(x,0) = F(x) \end{cases} \quad (IP_2)$ حيث $-\infty < x < \infty$ ، $0 < t < \infty$ و F دالة اختيارية

الخطوة 1: بمكاملة الجملة المميّزة $\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = x \\ \dfrac{dt}{ds} = 1 \end{cases}$ نجد $\begin{cases} x(s) = c_1e^s \\ t(s) = s + c_2 \end{cases}$ و بوضع $\begin{cases} x(0) = \tau \\ t(0) = 0 \end{cases}$ نحصل على $\begin{cases} c_1 = \tau \\ c_2 = 0 \end{cases}$

و عليه نجد الاحداثيات الجديدة بالتحويل $\begin{cases} x(s) = \tau e^s \\ t(s) = s \end{cases}$ و مميزات المسألة موضحة بالشكل



الشكل 2 : مميزات المسألة (IP_2)

الخطوة 2: لنحل المسألة الابتدائية الخطّية العاديّة التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{ds} + su = 0 \\ u(0) = F(\tau) \end{cases} \quad \text{حيث} \quad 0 < s < \infty$$

لنحصل على $u(s,\tau) = F(\tau)e^{-s^2/2}$

الخطوة 3: نعبّر على s,τ بدلالة x,t لنجد $\begin{cases} \tau = xe^{-t} \\ s = t \end{cases}$

و عليه الحل هو: $u(x,t) = F(xe^{-t})e^{-t^2/2}$

3.2 حالة معادلة شبه خطّية:

سنقدّم في هذه الفقرة نتيجة عامّة حول حلّ مسألة قيم ابتدائية مرفقة بمعادلة **شبه خطّية** بشرط ابتدائي أكثر عموميّة.

نعتبر المسألة:

$$(I.P) \begin{cases} a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) ....(E) \\ u(x,y) = g(x,y) \quad sur \quad (\Gamma) \end{cases}$$

حيث (Γ) منحنى كيفي من $\mathbb{R}^2$. لدينا النتيجة التالية:

نظريّة: u

- إذا لم يكن (Γ) منحنى **مميزاً** للمعادلة (E) فإنّ المسألة $(I.P)$ تقبل حلاً وحيداً .
- إذا كان (Γ) **مميزاً** لـ (E) فإنّ للمسألة $(I.P)$ عدد غير منته من الحلول أو لا تقبل أي حل .

برهان:

لنبرهن أنّ (Γ) لا يمكن أنّ يكون منحنى مميزاً للمعادلة (E) إذا كان للمسألة $(I.P)$ حلاً و حيداً، لنفرض أنّ للمسألة $(I.P)$ حلاً و حيداً u فإنّ هذا الحلّ معطى على (Γ) و مشتقاته الجزئيّة في الاتجاه المماسي لـ (Γ) .

موجوده.

لنفرض أنّ المنحنى (Γ) معرّف بالتمثيل الوسيطي: $(\Gamma)=(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau))$

و بالتّالي الشرط الابتدائي للمسألة هو:

$$u(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau))=g(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau))=G(\tau)$$

والمشتقات الجزئية على المنحنى (Γ) هي:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau))=H_1(\tau)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau))=H_2(\tau)$$

المعادلة (E) تعطي:

$$a(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau),G(\tau))u_x+b(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau),G(\tau))u_y=c(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau),G(\tau))\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

المشتق المماسي لحلّ u على (Γ) هو:

$$\frac{dG}{ds}=\gamma_1'(\tau)H_1(\tau)+\gamma_2'(\tau)H_2(\tau)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

من المعادلتين (1) و (2) يمكن صياغة الجملة التالية:

$$\begin{pmatrix} a(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau),G(\tau)) & b(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau),G(\tau)) \\ \gamma_1'(\tau) & \gamma_2'(\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_1(\tau) \\ H_2(\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau),G(\tau)) \\ \dfrac{dG}{d\tau}\end{pmatrix}$$

لكي تقبل الجملة الخطيّة الأخيرة ذات المجهول $\begin{pmatrix} H_1(\tau) \\ H_2(\tau)\end{pmatrix}$ حلاً وحيداً يلزم و يكفي أن يكون محدد المصفوفة المرفقة بها غير معدوم أي أنّ:

$$\gamma_2'(\tau)a(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau),G(\tau))-\gamma_1'(\tau)b(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau),G(\tau))\neq 0\cdots\cdots\cdots(*)$$

و هذا ما يُفسر أنّ (Γ) لا يمكن أن يكون مميزاً للمعادلة (E) .

نتيجة:

لإثبات أنّ المسألة $(I.P)$ تقبل حلاً وحيداً يكفي إثبات أنّ:

$$\gamma_2'(\tau)a\left(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau),G(\tau)\right)-\gamma_1'(\tau)b\left(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau),G(\tau)\right)\neq 0$$

(أي أنّ المنحنى (Γ) ليس مميزاً لـ $(I.P)$).

تعميم طريقة المميّزات إلى المعادلات شبة خطيّة:

لتكن المسألة $\begin{cases} a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u) \\ u(x,y)|_\Gamma=g(x,y) \end{cases}$ حيث $(\Gamma)=\left(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau)\right)$.

نفرض أنّ (Γ) غير مميّز للمسألة

الجملة المميّزة المرفقة:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds}=a(x,y,z) \\ \dfrac{dy}{ds}=b(x,y,z) \\ \dfrac{dz}{ds}=c(x,y,z) \end{cases}$$ مرفقة بالشروط $$\begin{cases} x(\tau,0)=\gamma_1(\tau) \\ y(\tau,0)=\gamma_2(\tau) \\ z|_\Gamma=g\left(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau)\right) \end{cases}$$

بعد حل هذه الجملة نضع:

$$u(x,y)=z\left(\tau(x,y),s(x,y)\right)$$

ملاحظة:

قد تتعلّق الدّالة المجهولة z بنفسها و بالتالي الحلّ يكون ضمني.

مثال تطبيقي 1 (مسألة نصف خطيّة):

لحل المسألة $(IP_1)\begin{cases} u_t+au_x=u^2 \\ u(x,0)=\cos(x) \end{cases}$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$

لدينا (Γ) هو محور الفواصل تمثيلة الوسيطي $(\Gamma)=(\tau,0)$

(Γ) غير مميّز لـ (IP_1) لأنّ: $\gamma_2'(\tau).1-\gamma_1'(\tau).a=0.1-1.a=-a\neq 0$

و بالتالي المسألة (IP_1) تقبل حلاً و حيداً.

حساب الحلّ:

الجملة المميّزة المرفقة هي:

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{ds}=1 \\ \dfrac{dx}{ds}=a \\ \dfrac{dz}{ds}=z^2 \end{cases} \quad \text{مع} \quad (IC).\begin{cases} t(\tau,0)=0 \\ x(\tau,0)=\tau \\ z(\tau,0)=\cos(\tau) \end{cases}$$

بالمكاملة نجد:

$$t(\tau,s)=s+c_1(\tau)$$
$$x(\tau,s)=as+c_2(\tau)$$
$$\frac{-1}{z(\tau,s)}=s+c_3(\tau)$$

و باستعمال الشروط الابتدائيّة (IC) نجد: $c_1(\tau)=0$ ، $c_2(\tau)=\tau$ و $c_3(\tau)=-\dfrac{1}{\cos(\tau)}$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} t(\tau,s)&=s \\ x(\tau,s)&=as+\tau \\ \frac{-1}{z(\tau,s)}&=s-\frac{1}{\cos(\tau)} \end{aligned} \quad \text{و} \quad \tau=x-at$$

وعليه:

$$u(\tau,s)=z(\tau,s)=\frac{\cos(\tau)}{1-s\cos(\tau)}$$

وبالرّجوع إلى المتغيّرات القديمة نجد:

$$u(x,t)=\frac{\cos(x-at)}{1-t\cos(x-at)}$$

مثال تطبيقي 2:

لحل المسألة $(IP_2)\begin{cases} u_t+uu_x=0 \\ u(x,0)=\phi(x) \end{cases}$

لدينا التمثيل الوسيطي لـ (Γ) هو: $(\Gamma)=(\tau,0)$

يكون (Γ) غير مميّزاً لـ (IP_2) إذا كان: $\gamma_2'(\tau).1-\gamma_1'(\tau)u(\tau,0)=0.1-1.\phi(\tau)=-\phi(\tau)$

و بالتالي لكي تقبل المسألة (IP_2) حلاً و حيداً **يجب أن يكون** $\phi(\tau)\neq 0$.

حساب الحلّ في حالة وجوده:

الجملة المميّزة المرفقة هي:

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{ds}=1 \\ \dfrac{dx}{ds}=z \\ \dfrac{dz}{ds}=0 \end{cases} \quad \text{حيث} \quad (IC).\begin{cases} t(\tau,0)=0 \\ x(\tau,0)=\tau \\ z(\tau,0)=\phi(\tau) \end{cases}$$

بالمكاملة نجد:

$$\begin{gathered} t(\tau,s)=s+c_1(\tau) \\ x(\tau,s)=c_3(\tau)s+c_2(\tau) \\ z(\tau,s)=c_3(\tau) \end{gathered}$$

باستعمال الشروط الابتدائيّة (IC) نجد: $c_1(\tau)=0$ ، $c_2(\tau)=\tau$ و $c_3(\tau)=\phi(\tau)$

وبالتالي:

$$\begin{gathered} t(\tau,s)=s \\ x(\tau,s)=\phi(\tau)s+\tau \\ z(\tau,0)=\phi(\tau) \end{gathered} \quad \text{و} \quad \tau=x-\phi(\tau)t=x-zt$$

وعليه:

$$u(\tau,s)=z(\tau,s)=\phi(\tau)$$

وبالرّجوع إلى المتغيّرات القديمة نجد:

$$u(x,t)=\phi(x-zt)=\phi(x-ut)$$

نلاحظ أنّ حلّ المسألة معرّف بشكل ضمني.