Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de ECHAHID HAMA LAKHDAR ELOUED
Faculté des Sciences Exactes
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Dr: ben ali brahim

COURS

Equations Intégrales

Equations Intégrales

Dr: B. Ben Ali
Univérsité Hamma Lakhdar El oued
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

06/12/2020

ABSTRACT This document uses the “Springer Verlag Multi-authored” Style. Replace this text with your own abstract.

Contents

Preface

Dans ce cours, nous proposons quelques notions be base sur les équations intégrales linéaires de Fredholm de second espèce avec leurs differentes méthodes de résolution. Une partie de ce cours est aussi destinée à étudier quelques types d'équations intégrales singulières. Nous terminons cette brochure par la construction de la fonction de Green pour quelques problèmes aux limites.

1

Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1 Espace de Banach

Définition: Une norme sur un espace vectoriel réel X est une fonction

$$X \to \mathbb{R} : u \to \|u\|$$

telle que :
1) si $u \epsilon X \backslash \{0\}$, $\|u\| > 0$;
2) si $u \epsilon X$ et si $\alpha \epsilon \mathbb{R}$, $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$;
3) si $u, v \epsilon X$, $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité de Minkowski).
Un espace normé (réel) est un espace vectoriel (réel) muni d'une norme.

Définition: Un espace normé X est complet si toute suite de Cauchy dans X converge. Un espace de Banach est un espace normé complet.

Proposition: Dans un espace de Banach, toute série normalement convergente converge.

Définition: Un espace normé est séparable s'il contient une partie dense et dénombrable.

1.2 Espace de Hilbert

Définition: Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel X est une fonction

$$X \times X \to \mathbb{R} : (u, v) \to (u \backslash v)$$

telle que
($\mathcal{L}1$) si $u \epsilon X \backslash \{0\}, (u \backslash u) > 0$;
($\mathcal{L}2$) si $u, v, w \epsilon X$ et si $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}, (\alpha u + \beta v \backslash w) = \alpha(u \backslash w) + \beta(v \backslash w)$;
($\mathcal{L}3$) si $u, v, \epsilon X$; $(u \backslash v) = (v \backslash u)$.
Nous posons $\|u\| = \sqrt{(u \backslash u)}$. Un espace préhilbertien (réel) est un espace vectoriel (réel) muni d'un produit scalaire.

Proposition: Soit X un espace préhilbertien. Si $u, v \epsilon X$ alors :
a) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$ (identité du parallélogramme) ;
b) $(u \backslash v) = \frac{1}{4}||u+v||^2 - \frac{1}{4}||u-v||^2$(identité de polarisation) ;
c) $(u \backslash v) = 0 \Rightarrow \|u+v\|^2 = ||u||^2 + ||v||^2$ (identité de Pythagore).

Proposition: Soit X un espace préhilbertien. Si $u, v \epsilon X$ alors
a) $|(u \backslash v)| \leq ||w|| \, \|v\|$(inégalité de Cauchy-Schwarz),
b) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité de Minkowski).

Définition: Une famille $(e_j)j\epsilon J$ dans un espace préhilbertien X est orthonormée si

$$\begin{cases}(e_j\backslash e_k) = 1, & j = k,\\ \quad = 0, & j \neq k\end{cases}$$

Définition: Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet.

1.3 Opérateurs Compacts

Définitions. Propriétés

Soient E et F deux espaces de Banach.

Définition: On dit qu'un opérateur $T\epsilon\mathcal{L}(E,F)$ est compact si $T(B_E)$ est relativement

compact pour la topologie forte. On désigne par $\mu(E,F)$ l'ensemble des opérateurs

compacts et on pose $\mu(E) = \mu(E,E)$.

Théorème: L'ensemble $\mu(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E,F)$ (pour

la norme$\|\|_{\mathcal{L}(E,F)}$).

Définition: On dit qu'un opérateur $T\epsilon\mathcal{L}(E,F)$ est de rang fini si $dimR(T) < \infty$.

Corollaire: Soit (T_n) une suite d'opérateurs continus de rangs finis de E dans F et

soit $T\epsilon\mathcal{L}(E,F)$ tels que $||T_n - T||_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$. Alors $T\epsilon\mu(E,F)$.

Théorème (Riesz): Soit E un e.v.n.(espace vectoriel normé) tel que B_E soit compact. Alors E est de dimension finie.

Théorème (Alternative de Fredholm): Soit $T\epsilon\mu(E)$. Alors

a) $N(I-T)$ est de dimension finie,

b) $R(I-T)$ est fermé, et plus précisément $R(I-T) = N(I-T^*)^\perp$

c) $N(I-T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I-T) = E$

d) $dimN(I-T) = dimN(I-T^*)$.

Spectre d'un opérateur compact

Définition: Soit $T\epsilon\mathcal{L}(E,F)$. L'ensemble résolvant est

$$\rho(T) = \{\lambda\epsilon\mathbb{R}; (T-\lambda I) \text{ est bijectif de } E \text{ sur } E\}.$$

Le spectre $\sigma(T)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant, $\sigma(T) = \mathbb{R}\backslash\rho(T)$.

On dit que λ est valeur propre et on note $\lambda\ \epsilon VP(T)$ si $N(T-\lambda I) \neq 0$;

$N(T-\lambda I)$ est l'espace propre associé à λ.

Remarque: 1) si $\lambda\epsilon\rho(T)$ alors $(T-\lambda I)^{-1}\epsilon\mathcal{L}(E)$.

2) Il est clair que $VP(T) \subset \sigma(T)$. Il peut exister λ tel que $N(T-\lambda I) = \{0\}$ et $R(T-\lambda I) \neq E$.

Définition: On dit qu'un opérateur $T\epsilon\mathcal{L}(H)$ est autoadjoint si $T^* = T$, c'est-à-dire

$(Tu, v) = (u, Tv) \qquad \forall u, v\epsilon H.$

Corollaire: Soit $T\epsilon\mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint tel que $\sigma(T) = \{0\}$. Alors $T = 0$.

Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit que T est un opérateur de Hilbert- Schmidt s'il existe une base (e_n) de H telle que $||T||_{hS} = \sum |Te_n|^2 < \infty$.

Théorème: Soient $H = L^2(\Omega)$ et $K(x,t)\epsilon L^2(\Omega x\Omega)$. Alors Vopérateur

$$f \to (kf)(x) = \int k(x,t) f(t)\, dt$$

est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Réciproquement tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\Omega)$ se représente de manière

unique à l'aide d'une fonction $K(x,t)\epsilon L^2(\Omega x\Omega)$.

Lemme: Soit k une fonction de $L^2\left(]a,b[\times]a,b[\right)$,alors l'opérateur T tel que

$$Tf(x) = \int_a^b k(x,t) f(t)\, dt, \quad x\epsilon\,]a,b[\tag{1.1}$$

est bien défini, en tant qu'opérateur T de$L^2\left(]a,b[\right)$ dans lui même.

preuve: l'opérateur T est évidament linéaire, il suffit de prouver sa continuté, en effet l'inigalité de Couchy Schwarz

$$\int_a^b |Tf(t)|^2\, dt \leq \left(\int_a^b |f(s)|^2\, ds\right)\left(\int_a^b\int_a^b |k(x,s)|^2\, dsdx\right)$$

est puisque $k\epsilon L^2\left(]a,b[\times]a,b[\right)$ alors il existe $M\epsilon R_+$ tel que $\int_a^b\int_a^b |k(x,s)|^2\, dsdx = M^2$

donc $\|Tf\|_{L^2([a,b])} = \left(\int_a^b |Tf(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq M\left(\int_a^b |f(s)|^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}} = M\,\|f\|$

et on conclut que(1.1)est bien défini un opérateur continue.

proposition: Soit T opératuer linéaire borné d'un espace de Banach X (e,v,n,complet) dans X avec $\|T\| < 1$ et I l'opérateur identique dans X, alors $(I-T)$ admet un opérateur inverse borné donne par la série de Neumann

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n, \text{ de plus } \left\|(I-T)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$$

preve: poson

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k \text{ avec } \|T\| < 1$$

et montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S = (I-T)^{-1}$$

$$\text{d'où } (I-T)\,S_n = (I-T)\sum_{k=0}^{n} T^k = \sum_{k=0}^{n} T^k - \sum_{k=0}^{n+1} T^k = I - T^{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (I-T)\,S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(I - T^{n+1}\right) = I, \text{ puisque } \|T\| < 1$$

$$\text{donc } (I-T)\,S = I \tag{1.2}$$

d'autre par

$$S\,(I-T) = \lim_{n\to+\infty} S_n\,(I-T) = \lim_{n\to+\infty} \left(I - T^{n+1}\right) = I \tag{1.3}$$

d'aprés(1.2) et (1.3) on a $S = (I-T)^{-1}$

aussi puisque $\|T\| < 1$

$$\left\|(I-T)^{-1}\right\| = \|S\| = \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} T^n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|}.$$

Théorème: Soit T un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X danx lui même avec $\|T\| < 1$ et I l'opérateur identique dans X, $\forall g \epsilon X$ l'approximation successive donne par la suite de fonctions

$$f_0 \epsilon X, \forall n \geqslant 1, f_n = Tf_{n-1} + g$$

converge vers une unique solution f vérifier

$$f - Tf = g \tag{1.4}$$

preve: Construisons (f_n) par la méthode itérative de Picard i-e(c'est-à-dire), en considerant la somme fini

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} T^k g$$

donc

$$\begin{aligned} Tf_n + g &= T\left(T^0 g + T^1 g + ... + T^n g\right) + g \\ &= T\,(g + Tg + ... + T^n g) + g \\ &= Tg + T^2 g + ... + T^{n+1} g + g \\ &= T^0 g + Tg + T^2 g + ... + T^{n+1} g \\ &= f_{n+1} \text{ i-e } f_{n+1} = Tf_n + g \end{aligned}$$

d'autre par puisque $\|T\| < 1$ donc $(I-T)$ admet inverse$(I-T)^{-1}$(voir proposition) et comme X espace de Banache et $T\{f_n\} \subset X$ alors

$$f = \lim_{n\to+\infty} f_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} (Tf_n + g) = Tf + g \Rightarrow f = (I-T)^{-1} g$$

la suite (f_n) ansi construisent implique l'existence et l'unicitéde la solution de l'équation fonctionnelle linéaire(1.4).

Théorème: Si on prend $G\,(\text{compact}) \subset X \subset R^n$ et

$$\|T\|_{C(G)} = Max \int_G |k\,(x,t)|\,dt < 1$$

alors l'équationintégrale de second espèce

$$f\,(x) - \lambda \int_X k\,(x,t)\,f\,(t)\,dt = g\,(x)$$

admet une unique solution $(g \epsilon C\,(X))$.

remarque: pour beaucou plus sur l'analyse fonctionnelle voir (Analyse fonctionnelle.H Brezis ou Analyse fonctionnelle élémentaire.M Willem).

2

Equations Intégrales

2.1 Généralité sur les équations intégrales

Introduction

définition: une équation intégrale est une équation où l'inconnu est une fonction qui apparait sous le signe intégrale

exemple: Soit le problème de trouver une fonction f qui vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_a^b k(x,t) f(t)\, dt \tag{2.1}$$

$$f(x) = g(x) + \int_a^b k(x,t) f(t)\, dt \tag{2.2}$$

$$f(x) = \int_a^b k(x,t) [f(t)]^2\, dt \tag{2.3}$$

les fonctions g et k sont suposé connus, les équations(2.1),(2.2),(2.3)sont les équations intégrales

Equation intégrale linéaire

définition: une équation intégrale est dite linéaire si la fonction inconnu sr figure d'une manière linéaire.

par exemple les équations (2.1)et(2.2)sont linéaires par contre l'éqution (2.3) ne l'est pas.

Remarque: Dans ce cours nous intéressons seulement les équations intégrales linéaires de Fredholm de seond espèce.

Classification des équations intégrales

Equations intégrales de Fredholm

définition: 1) On appelle équation intégrale de Fredholm de deuxieme espèce une équation de la forme

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f(t)\, dt \tag{2.4}$$

si $g(x) = 0$ l'équation (2.4) s'appelle équation intégrale homogène, si $g(x) \neq 0$ l'équation (2.4) s'appelle équation intégrale non homogène.

2) On appelle équation intégrale de Fredholm de premiere espèce une équation de la forme

$$g(x) = \lambda \int_a^b k(x,t) f(t)\, dt \tag{2.5}$$

où f est la fonction inconnu et g, k sont deux fonctions connus, $k(x,t)$ s'appelle le noyau de l'équation intégrale et λ est une paramétre numérique.

Exemple: Vérifier que $f(x) = \sqrt{x}$ est une solution de l'équation intégrale de Fredholm

$$f(x) - \int_0^1 k(x,t) f(t)\, dt = \sqrt{x} + \frac{x}{15}\left(4x^{\frac{3}{2}} - 7\right)$$

telle que

$$k(x,t) = \begin{cases} \frac{t(2-x)}{2}, & 0 \leqslant t \leqslant x \\ \frac{x(2-t)}{2}, & x \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

solution: on a $f(x) = \sqrt{x}$ et l'équation intégrale de Fredholm

$$f(x) - \int_0^1 k(x,t) f(t)\, dt = f(x) - \int_0^x k(x,t) f(t)\, dt + \int_x^1 k(x,t) f(t)\, dt \tag{2.6}$$

pour $t \in [0,x]$ en remplace $k(x,t)$ par $\frac{t(2-x)}{2}$ à la second intégrale de(2.6) on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^x k(x,t) f(t)\, dt &= \int_0^x \frac{t(2-x)}{2}\sqrt{t}dt \\ &= \int_0^x t\sqrt{t}dt - \frac{x}{2}\int_0^x t\sqrt{t}dt = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{5} \end{aligned} \tag{2.7}$$

de même maniere pour $t \in [x,1]$ la substitution de $k(x,t)$ par $\frac{x(2-t)}{2}$ à la troisième intégrale de(2.6) donne

$$\int_x^1 k(x,t) f(t)\, dt = x\int_x^1 \frac{(2-t)}{2}\sqrt{t}dt = \frac{7}{15}x - \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{5} \tag{2.8}$$

en subistituant les résultats (2.7)et (2.8) à (2.6) on obtient

$$f(x) - \int_0^1 k(x,t) f(t)\, dt = \sqrt{x} + \frac{x}{15}\left(4x^{\frac{3}{2}} - 7\right).$$

Equation intégrale de Volterra

Définition: 1) on appelle équation intégrale de Volterra de dexiéme espèce une équation de la forme

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k(x,t) f(t)\, dt \tag{2.9}$$

2) on appelle équation intégrale de Volterra de premiére espèce une équation de la forme

$$g\left(x\right)=\lambda\int_{a}^{x}k\left(x,t\right)f\left(t\right)dt \tag{2.10}$$

Remarques: 1) l'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'éqution intégrale de Fredholm, il seffit de prendre le noyau $k\left(x,t\right)=0$ pour $x<t$,

2) si $g\left(x\right)\neq 0$ les équations (2.9) et(2.10) sont dites nons homogènes,

3) si $g\left(x\right)=0$ les équations (2.9) et(2.10) sont dites homogène.

exemple: Montrer que $f\left(x\right)=\left(1-x\right)e^{-2x}$ est une solution de l'éqution intégrale de Volterra suivante:

$$x=\int_{0}^{x}\exp\left(x+t\right)f\left(t\right)dt \tag{2.11}$$

solution: on a $f\left(x\right)=\left(1-x\right)e^{-2x}$, en substituant à (2.11) on obtien

$$\int_{0}^{x}\exp\left(x+t\right)f\left(t\right)dt=e^{x}\int_{0}^{x}\left(1-t\right)e^{-t}dt$$

$$=e^{x}\left[-\left(1-t\right)e^{-t}\right]_{0}^{x}-e^{x}\left[-e^{-t}\right]_{0}^{x}=x-1+e^{x}+1-e^{x}=x.$$

Equation intégrale singuliere

Définition: on appelle équation intégrale singuliere, l'équation si l'une ou les deux de bornes de l'intégrale sont infinies où si le noyau de l'équation intégrale est indéfinie dans un nombre finie de points dans l'intérvalle d'intégration

Exemple: les équations intégrales

$$f\left(x\right)=g\left(x\right)+\lambda\int_{a}^{+\infty}k\left(x,t\right)f\left(t\right)dt$$

$$f\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}k\left(x,t\right)f\left(t\right)dt$$

$$f\left(x\right)=\int_{a}^{x}\frac{1}{\left(x-t\right)^{\alpha}}f\left(t\right)dt,\qquad 0<\alpha<1$$

sont des équations singulieres.

Lien entre équation intregrale de et équation différentielle

La résolution de l'éqution différentilles linéaire

$$\frac{d^{n}y}{dx^{n}}+a_{1}\left(x\right)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n^{-1}}}+...+a_{n}\left(x\right)y=G\left(x\right) \tag{2.12}$$

aceofficients continus $a_i(x), i = 1, ..., n$ avec les conditions initiales

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, ..., y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}. \tag{2.13}$$

peut etre ramène à la resolution d'une éqution intégrale de Volterra de seconde éspece. Illustrons notre afirmation sur l'exemple de l'équation différentielle de seconde ordre

exemple: soit le problème à valeur initial suivant:

$$\begin{cases} y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = \phi(x) \\ y(0) = \alpha, \qquad\qquad y'(0) = \beta \end{cases} \tag{2.14}$$

poson $y''(x) = f(x)$ alors

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x f(t)\,dt \text{ c-à-d } y'(x) = \beta + \int_0^x f(t)\,dt \tag{2.15}$$

dexième intégration donne

$$y(x) = \beta x + \alpha + \int_0^x \int_0^x f(t)\,dtdt$$

le développement limité de Taylor au voisinage de zéro avec reste intégrale de y est

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \int_0^x (x-t)\,y''(t)\,dt$$

$$\text{d'ou } \; y(x) = \alpha + \beta x + \int_0^x (x-t) f(t)\,dt \tag{2.16}$$

en substituant les résultats (2.15)et (2.16) à (2.14) on obtient

$$f(x) + a_1(x)\left[\beta + \int_0^x f(t)\,dt\right] + a_2(x)\left[\alpha + \beta x + \int_0^x (x-t) f(t)\,dt\right] = \phi(x)$$

$$f(x) = \phi(x) - [\beta a_1(x) + (\alpha + \beta x) a_2(x)] - \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)] f(t)\,dt$$

$$\text{poson } g(x) = \phi(x) - [\beta a_1(x) + (\alpha + \beta x) a_2(x)]$$

$$\text{et } k(x,t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)]$$

donc on a l'équation intégrale formelle de Volterra

$$f(x) = g(x) + \int_a^x k(x,t) f(t)\,dt$$

exemple: soit l'équation différentielle

$$y'' + y = 0 \quad (*) \quad \text{et} \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

poson $y''(x) = f(x)$ par intégration on obtien

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x f(t)\,dt$$

en intégron $2^{ème}$ fois nous obtenons

$$y(x) - y(0) = xy'(0) + \int_0^x \int_0^x f(t)\,dt$$

d'où

$$y(x) = x + \int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt$$

en substituant à (*) en trouve

$$f(x) = -x - \int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt$$

qu'est une équation intégrale de Volterra de second espèce.

Reduction du problème aux limite à une l'équation intregrale de Fridholm

En considére l'équation différentielle de seconde ordre avec condition aux limites

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = \phi(x) \qquad (1)$$

et

$$\begin{cases} x = a, & y(a) = \alpha \\ x = b, & y(b) = \beta \end{cases} \text{où } \alpha, \beta \text{ sont des constantes données}$$

poson $y''(x) = f(x)$ par intégration on a

$$y'(x) = y'(a) + \int_a^x f(t)\,dt \qquad (1')$$

on intégrons l'équation intégrale précédante de a à x on obtien

$$y(x) = y(a) + (x-a)\,y'(a) + \int_a^x \int_a^x f(t)\,dtdt$$

$$= \alpha + (x-a)\,y'(a) + \int_a^x \int_a^x f(t)\,dtdt \qquad (2)$$

pour $x = b$ l'équation (2) s'écrit

$$\beta = y(b) = \alpha + (b-a)\,y'(a) + \int_a^b \int_a^b f(t)\,dtdt$$

d'où

$$y'(a) = \frac{\beta - \alpha}{b-a} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_a^b f(t)\,dtdt \qquad (3)$$

en substituant (3) à (2) et (1') en trouve

$$y(x)=\alpha+(x-a)\left[\frac{\beta-\alpha}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b f(t)\,dtdt\right]+\int_a^x\int_a^x f(t)\,dtdt \quad (2')$$

$$y'(x)=(x-a)\left[\frac{\beta-\alpha}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b f(t)\,dtdt\right]+\int_a^x f(t)\,dt \quad (1")$$

puis en renplace (1") et (2') à (1) on obtien

$$\begin{aligned} f(x) &= \phi(x)-P(x)\left\{(x-a)\left[\frac{\beta-\alpha}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b f(t)\,dtdt\right]+\int_a^x f(t)\,dt\right\} \\ &\quad -Q(x)\left\{\alpha+(x-a)\left[\frac{\beta-\alpha}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b f(t)\,dtdt\right]+\int_a^x\int_a^x f(t)\,dtdt\right\} \end{aligned}$$

Cas particuliére

pour $a=0$ et $b=1$, $0\leq x\leq 1$ on a

$$(2)\Leftrightarrow y(x)=\alpha+xy'(0)+\int_0^x\int_0^x f(t)\,dtdt$$

d'aprés la formule

$$\underbrace{\int_0^x dt...\int_0^x f(t)\,dt}_{n\ fois}=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f(t)dt$$

$$y(x)=\alpha+xy'(0)+\int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt$$

l'inconnue $y'(0)$ peut détérminée par

$$\begin{aligned} y'(0) &= \beta-\alpha-\int_0^1 (1-t)\,f(t)\,dt \\ &= \beta-\alpha-\int_0^x (1-t)\,f(t)\,dt-\int_x^1 (1-t)\,f(t)\,dt \end{aligned}$$

aussi

$$f(x)=\phi(x)-P(x)\left\{y'(0)+\int_0^x f(t)\,dt\right\}-Q(x)\left\{\alpha+xy'(0)+\int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt\right\}$$

$$=\phi(x)-(\beta-\alpha)\left[P(x)+xQ(x)\right]-\alpha Q(x)+\int_0^1 k(x,t)\,f(t)\,dt$$

où

$$k(x,t) = \begin{cases} [P(x) + tQ(x)](1-x) & \text{si } 0 \leq t \leq x \\ [P(x) + xQ(x)](1-t) & \text{si } x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Rmarque: Il est simple de vérifier que $k(x,t) = k(t,x)$, on appelle le noyau $k(x,t)$ symetrique.

exemple: soit l'équation différentielle

$$y''(x) + y(x) = x \qquad (\delta)$$

$$\text{avec } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ et } \quad y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$\text{on a } y''(x) = f(x) \Rightarrow y'(x) - y'(0) = \int_0^x f(t)\,dt$$

la deuxième intégration donne

$$y(x) - y(0) = xy'(0) + \int_0^x \int_0^x f(t)\,dtdt$$

$$\text{c-a-d } y(x) = xy'(0) + \int_0^x (x-t) f(t)\,dt \qquad (\delta_1)$$

pour $x = \frac{\pi}{2}$ on a

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \pi = \frac{\pi}{2} y'(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) f(t)\,dt \\ &\Rightarrow y'(0) = 2 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) f(t)\,dt \qquad (\delta_2) \end{aligned}$$

en substituant (δ_2) à (δ_1) on obetien

$$y(x) = x\left[2 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) f(t)\,dt\right] + \int_0^x (x-t) f(t)\,dt$$

$$= 2x - \frac{2t}{\pi} \int_0^x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) f(t)\,dt - \frac{2x}{\pi} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) f(t)\,dt$$

en fin

$$f(x) = -x + \frac{2t}{\pi} \int_0^x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) f(t)\,dt + \frac{2x}{\pi} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) f(t)\,dt$$

qui est équation intégrale de Fredholm de la forme

$$f(x) = g(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k(x,t) f(t)\,dt$$

$$\text{où } g(x) = -x, \text{et } k(x,t) = \begin{cases} t\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & \text{si} \quad 0 \le t \le x \\ x\left(\frac{\pi}{2} - t\right), & \text{si} \quad x \le t \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Remarque: par fois en resous quelques équations intégrales en les ramènes à des équations différentielles avec condition initiales

exemple: soit l'équation intégrale

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \int_0^x e^{x-t} f(t)\, dt \Rightarrow f(x) = x + e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt \\ &= e^x \left(x e^{-x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt \right) = e^x y(x) \end{aligned}$$

$$\text{où } y(x) = x e^{-x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$$

$$\text{d'où } y'(x) = (1-x)\, e^{-x} - e^{-x} f(x)$$

$$= (1-x)\, e^{-x} - e^{-x} e^x y(x) \Rightarrow y' + y = (1-x)\, e^{-x} \quad (\vartheta) \text{ avec } y(0) = 0$$

l'équation (ϑ) est une équation différentielle linéaire de première ordre en résoudre par la méthode de variation de constantes, soit l'équation (ϑ) sans second menbre

$$y' + y = 0 \Rightarrow y(x) = c e^{-x}, \text{ donc } y' = c' e^{-x} - c e^{-x}$$

en substituant cette résultat à l'équation (ϑ) nous obtenons

$$c' e^{-x} - c e^{-x} + c e^{-x} = (1-x)\, e^{-x} \Rightarrow c' = 1 - x \Rightarrow c(x) = x - \frac{x^2}{2} + c$$

donc $y(x) = \left(x - \dfrac{x^2}{2} + c \right) e^{-x}$ puisque $y(0) = 0 \Rightarrow y(x) = \left(x - \dfrac{x^2}{2} \right) e^{-x}$

en fin la solution de l'équation intégrale donnée est

$$f(x) = y(x)\, e^x = x - \frac{x^2}{2}.$$

Remarque: Dans tous ce qui suit de ce chapitre les fonctions existantes à les équations intégrales sont lebesgues intégrales où lebesgues carrés intégrales i-e

$$\int_a^b |g(x)|^2\, dx < +\infty$$

$$\text{le noyau } k(x,t)\, \epsilon L^2 \text{ si } \int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2\, dx dt < +\infty$$

$$\int_a^b |k(x,t)|^2\, dx < +\infty, \forall t \epsilon [a,b] \;\; ; \;\; \int_a^b |k(x,t)|^2\, dt < +\infty, \forall x \epsilon [a,b]$$

Remarque: Dans tous ce qui suit de ce chapitre notre étude s'in sacré sur les équations intégrales linéaires de Fredholm de second espèce.

2.2 Méthode de résolution des équations intégrales de second espèce

2.2.1 Solution par les noyaux itérés(méthode de Picard)

Principe de la méthode

Construison une suite (f_n) qui correspandent à du série infini $\sum_{n\geqslant 1} U_n$ ou chaque U_n définie par $U_n = f_n - f_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$ cette série converge uniformement vers U telle que la $N^{ène}$ somme parcielle est $\sum_{n=1}^{N}(f_n - f_{n-1}) = f_N - f_0$ et de plus (f_n) converge uniformement vers $U + f_0$.

proposition: soit $g\epsilon C([a,b])$ et $k, \frac{\partial k}{\partial x} \epsilon C([a,b]\times[a,b])$, alors l'équation intégrale de Fredholm de second espéce

$$f(x) = g(x) + \int_a^b k(x,t)\, f(t)\, dt$$

admet unique solution qui converge vers la limite de la suite itérative suivante

$$f_n(x) = g(x) + \int_a^b k(x,t)\, f_{n-1}(t)\, dt, \qquad x\epsilon[a,b] \tag{2.17}$$

preve: $\forall x\epsilon[a,b]$ la fonction $k(x,t)\, f_{n-1}(t)$ est continue, donc la suite(2.17) est bien définie, soit M_n(constantes) t-q $\forall n\epsilon N, \forall x\epsilon[a,b]$ on a $|U_n(x)| = |f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq M_n$ et $|k(x,t)| < L$, $|g(x)| < M$; $(f_0(x) = g(x))$, $M > 0$, $L > 0$ et $M_n > 0$.

Alors

$$|f_1(x) - f_0(x)| = \left|\int_a^b k(x,t)\, f_0(t)\, dt\right| \leq \int_a^b |k(x,t)|\, |g(t)|\, dt \leq LM(b-a)$$

on en deduit par recurence pour $n \geqslant 1$

$$\forall x\epsilon[a,b], |f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq ML^n(b-a)^n = M_n$$

donc la série géométrique convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n = M\sum_{n=1}^{+\infty}[L(b-a)]^n = \frac{ML(b-a)}{1-L(b-a)} \text{ pour } L(b-a) < 1$$

d'ou la série

$$\sum_{n\geqslant 1}(f_n - f_{n-1})$$

est uniformement convergente sur $[a,b]$ vers la fonction $U : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Montrons que (f_n) converge uniformement vers $f = U + f_0$

$$\forall\varepsilon, \exists N, \forall n; n \geqslant N \rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

d'où

$$\forall n; n \geqslant N, \forall x, t\epsilon [a,b] \rightarrow |k(x,t) f(x) - k(x,t) f_n(x)| < L\varepsilon$$

donc la suite $\left(\int_a^b k(x,t) f_n(t)\, dt\right)$ converge vers$\int_a^b k(x,t) f(t)\, dt$

d'où l'existance d'une solution de l'équation intégrale

unicité: supposon que l'équation intégrale admet deux solutions f_1, f_2 alors

$$\begin{cases} f_1(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f_1(t)\, dt \\ f_2(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f_2(t)\, dt \end{cases} \rightarrow f_2(x) - f_1(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)(f_2(t) - f_1(t))\, dt$$

en appliquent l'inégalité de SChwarz on obtien

$$|f_2(x) - f_1(x)|^2 \leq |\lambda|^2 \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dt \int_a^b |(f_2(t) - f_1(t))|^2 \, dt$$

et on intégre par rapport x

$$\int_a^b |f_2(x) - f_1(x)|^2 \, dx \leq |\lambda|^2 \int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dt dx \int_a^b |(f_2(t) - f_1(t))|^2 \, dt$$

ce qui donne

$$\left(1 - |\lambda|^2 B^2\right) \int_a^b |(f_2(t) - f_1(t))|^2 \, dt \leq 0$$

on prend en conte que $|\lambda| B < 1$ on conclu que $\int_a^b |f_2(x) - f_1(x)|^2 \, dx = 0$ et par suite $f_1 = f_2$ $p.p$

puisque les solutions sont continues.

Résolvente de l'équation intégrale de Fredholm

soit l'équation intégrale de Fredholm

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f(t)\, dt \tag{2.18}$$

on peut écrire

$$f(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n h_n(x) \tag{2.19}$$

avec $h_n(x)$ definis par

$$h_1(x) = \int_a^b k(x,t) g(t)\, dt$$

$$h_2(x) = \int_a^b k(x,t)\, h_1(t)\, dt = \int_a^b k_2(x,t)\, g(t)\, dt$$

$$h_3(x) = \int_a^b k(x,t)\, h_2(t)\, dt = \int_a^b k_3(x,t)\, g(t)\, dt$$

et ainssi le suit, où

$$k_2(x,t) = \int_a^b k(x,s)\, k_1(s,t)\, dt, \text{ tel que } k_1(x,t) = k(x,t)$$

$$k_3(x,t) = \int_a^b k(x,s)\, k_2(s,t)\, dt$$

$$\text{et en general } \; k_n(x,t) = \int_a^b k(x,s)\, k_{n-1}(s,t)\, dt, \quad \text{pour } n \geqslant 2 \qquad (2.20)$$

les fonctions définis par (2.20) s'appelle noyaux itérés, la résolvente de l'éqution intégrale (2.18) est définis par

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} k_n(x,t) \qquad (2.21)$$

ela second menbre de(2.21) est la série de Neumann du noyau $k(x,t)$ sec-onverge pour $|\lambda| < \frac{1}{B}$ avec $B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,s)|^2\, dxdt}$ sous les conditions précédantes la solution de(2.18) s'exprime par

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\, g(t)\, dt \qquad (2.22)$$

Exemple: construison la résolvente du noyau suivente

$$k(x,t) = xe^t, \qquad a = -1, \quad b = 1$$

pui à l'aide de cette résolvente trouver la solution de l'équation intégrale

$$f(x) = e^{-x} + \lambda \int_{-1}^{1} xe^t f(t)\, dt$$

solution: 1) calculons $R(x,t,\lambda)$

$$\text{on a } k(x,t) = k_1(x,t) = xe^t$$

$$\begin{aligned} k_2(x,t) &= \int_{-1}^{1} k(x,s)\, k_1(s,t)\, ds = \int_{-1}^{1} xe^s se^t ds = \\ xe^t \int_{-1}^{1} se^s ds &= xe^t \left[(s-1)\, e^s\right]_{-1}^{1} = 2e^{-1} xe^t \end{aligned}$$

$$k_3(x,t) = \int_{-1}^{1} xe^s 2e^{-1} se^t ds = 2e^{-1}xe^t \int_{-1}^{1} se^s ds = \left(2e^{-1}\right)^2 xe^t$$

$$k_4(x,t) = \int_{-1}^{1} xe^s \left(2e^{-1}\right)^2 se^t ds = \left(2e^{-1}\right)^3 xe^t$$

$$-----------------------$$

$$\text{donc } k_n(x,t) = \left(2e^{-1}\right)^{n-1} xe^t$$

et la résolvente est

$$\begin{aligned} R(x,t,\lambda) &= xe^t \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} \left(2e^{-1}\right)^{n-1} \quad \text{pour } 2|\lambda| e^{-1} < 1 \Leftrightarrow |\lambda| < \frac{e}{2} \\ &= \frac{xe^t}{1-2\lambda e^{-1}} = \frac{xe^{t+1}}{e-2\lambda} \end{aligned}$$

2) la solution de l'équation intégrale donnée est

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} + \lambda \int_{-1}^{1} \frac{xe^{t+1}}{e-2\lambda} e^{-t} dt \\ &= e^{-x} + \frac{\lambda xe}{e-2\lambda} \int_{-1}^{1} dt = e^{-x} + \frac{2\lambda xe}{e-2\lambda}. \end{aligned}$$

Remarque: L'incovénient se cette méthode est que même pour $|\lambda| B > 1$ il peut que l'équation intégrale de Fredholmde de second espèce avec des solutions.

exemple: soit l'équation intégrale

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{3} + \int_0^1 (x+t) f(t) dt, \qquad \lambda = 1$$

la fonction $f(x) = x$ est une solution de cette équation, par contre

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 \int_0^1 (x+t)^2 dxdt = \frac{1}{3} \int_0^1 \left[(x+t)^3\right]_0^1 dt = \int_0^1 \left[(1+t)^3 - t^3\right] dt \\ &= \frac{1}{12} \left[(1+t)^4 - t^4\right]_0^1 = \frac{1}{12} \left[2^4 - 1 - 1\right] = \frac{14}{12} > 1. \end{aligned}$$

Méthode des approximations successives

Soit l'équation intégrale de Fredholm de second espèce(2.18)

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f(t) dt$$

telle que

$$g \epsilon C[a,b] \text{ et } k \epsilon C([a,b] \times [a,b])$$

le princioe de cette méthode est remplacé l'inconnu f sous l'intégrale par n'importe quel sélective fonction numérique $f_0 \epsilon C[a,b]$, substituant la(i-e f_0) à $f(x)$ du second menbre de(2.18) on obtien

$$f_1(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f_0(t)\, dt$$

$f_1(x)$ c'est la premiére approximation de la solution $f(x)$, la fonction $f_1(x)$ est aussi de$C[a,b]$.

En continuant la processus nous aboutisons à la suite $f_0(x), f_1(x), ... f_n(x)$ où

$$f_n(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f_{n-1}(t)\, dt \tag{2.23}$$

sous les hypotheses des fonctions g et k la suite(f_n) quand $n \to +\infty$ converge vers $f(x)$ solution de l'éqution(2.18)

Remarque: en generale la convergence de la suite(f_n) ne de pend pas du chois $f_0(x) = g(x)$, mais pour $f_0(x) = g(x)$ on obtient une série s'appelle série de Neumann et $f_n(x)$ est la somme partielle d'ordre n, cette chois peut avoir une convergence rapide vers la solution de l'éqution(2.18).

exemple: Soit l'équation intégrale de Fredholm de secondespèce suivante

$$f(x) = 1 + \int_0^1 x f(t)\, dt$$

pour

$$f_0(x) = g(x) = 1 \Rightarrow f_1(x) = 1 + \int_0^1 x dt = 1 + x$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 1 + \int_0^1 x f_1(t)\, dt = 1 + x \int_0^1 (1+t)\, dt \\ &= 1 + x\left(1 + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

de même maniér

$$f_3(x) = 1 + x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$-------------------$$

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1 + x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ & 1 + x\frac{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1 + x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 1 + 2x \end{aligned}$$

2.2.2 *Méthode de substitutions successives*

Soit l'équation intégrale de Fredholm(2.18), construison la suite$\{f_n(x)\}$ moyennent la formmule de réccurnce(2.23) i-e

$$f_n(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f_{n-1}(t)\, dt$$

pour cette méthode, on remplace successivement la fonction $f(x)$ sous l'intégrale de(2.23) par sa valeur donné par l'équation(2.18) on obtien

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \left[g(t) + \lambda \int_a^b k(t,t_1) f(t_1)\, dt_1 \right] dt \\ &= g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) g(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b k(x,t) \int_a^b k(t,t_1) f(t_1)\, dt_1 dt \end{aligned}$$

aussi ici encore substituant $f(t_1)$ par sa valeur donnée par(2.18) en trouve

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) g(t)\, dt + \\ & \lambda^2 \int_a^b k(x,t) \int_a^b k(t,t_1) \left[g(t_1) + \lambda \int_a^b k(t_1,t_2) f(t_2)\, dt_2 \right] dt_1 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) g(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b k(x,t) \int_a^b k(t,t_1) g(t_1)\, dt_1 dt \\ &+\lambda^3 \int_a^b k(x,t) \int_a^b k(t,t_1) \int_a^b k(t_1,t_2) f(t_2)\, dt_2 dt_1 dt \end{aligned}$$

en continus à cette maniér nous obtenons

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) g(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b k(x,t) \int_a^b k(t,t_1) g(t_1)\, dt_1 dt + ... \\ &+\lambda^n \int_a^b k(x,t) \int_a^b k(t,t_1) ... \int_a^b k(t_{n-2},t_{n-1}) g(t_{n-1})\, dt_{n-1} dt_{n-2} ... dt + R_n(x) \quad (*) \end{aligned}$$

où $R_n(x) = \lambda^{n+1} \int_a^b k(x,t) \int_a^b k(t,t_1) ... \int_a^b k(t_{n-1},t_n) f(t_n)\, dt_n dt_{n-1} ... dt$

cela amène à l'examinen de la série suivente, sous les hypothése $k(x,t) \neq 0, k \epsilon C(R)$ où $R = \{(x,t), a \leq x,t \leq b\}, g(x) \neq 0, g \epsilon C([a,b]), \lambda$ constante. Donc $\exists M > 0$ tq $|k(x,t)| < M$ dans le pavé R et $\exists N > 0$ tq $|g(x)| < N$. le terme générale de la série

$$S_n(x) = \lambda^n \int_a^b k(x,t) \int_a^b k(t,t_1) ... \int_a^b k(t_{n-2},t_{n-1}) g(t_{n-1})\, dt_{n-1} dt_{n-2} ... dt$$

elle vérifier

$$|S_n(x)| \leq |\lambda^n| NM^n (b-a)^n$$

$|\lambda|^n M^n (b-a)^n$ est une terme générale d'une série qui converhe pour $|\lambda| M (b-a) < 1 \Leftrightarrow |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, aussi $f \epsilon C([a,b]), \exists U > 0$ tq $|f(x)| < U$

d'où $|R_n(x)| \leq |\lambda^{n+1}| UM^{n+1} (b-a)^{n+1}$ comme $|\lambda| M (b-a) < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$

donc $f(x)$ qui est satifer la série (*) est une solution de l'équation intégrale(2.18)

Theorème: a) Soit l'équation intégrale(2.18)

b) $k(x,t)$ fonction reelle continue sur $[a,b] \times [a,b]$ et $g(x)$fonction reelle continue sur $[a,b]$

c) $\exists \lambda$ constante, $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, donc l'équation(2.18) admet une solution continue sur$[a,b]$ donner par la convergence de la série(*).

exemple: Résoudre l'équation intégrale de Fredholm par la méthode de substitution seccessive

$$f(x) = 1 + \int_0^1 x^n t^m f(t)\,dt$$

la première substitution

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \int_0^1 x^n t^m \left[1 + \int_0^1 t^n t_1^m f(t_1)\,dt_1\right] dt \\ &= 1 + x^n \left.\frac{t^{m+1}}{m+1}\right|_0^1 + \int_0^1 x^n t^m \int_0^1 t^n t_1^m f(t_1)\,dt_1 dt \end{aligned}$$

la $2^{ème}$ substitution est

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{x^n}{m+1} + \int_0^1 x^n t^m \int_0^1 t^n t_1^m \left[1 + \int_0^1 t_1^n t_2^m f(t_2)\,dt_2\right] dt_1 dt \\ &= 1 + \frac{x^n}{m+1} + \frac{x^n}{m+1} \int_0^1 x^n t^{m+n} dt + x^n \int_0^1 t^m \int_0^1 t^n t_1^m \int_0^1 t_1^n t_2^m f(t_2)\,dt_2 dt_1 dt \\ &= 1 + \frac{x^n}{m+1} + \frac{x^n}{(m+1)(m+n+1)} + x^n \int_0^1 t^m \int_0^1 t^n t_1^m \int_0^1 t_1^n t_2^m f(t_2)\,dt_2 dt_1 dt \end{aligned}$$

la $3^{ème}$ substitution est

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{x^n}{m+1} + \frac{x^n}{(m+1)(m+n+1)} + \\ & x^n \int_0^1 t^m \int_0^1 t^n t_1^m \int_0^1 t_1^n t_2^m \left[1 + \int_0^1 t_2^n t_3^m f(t_3)\,dt_3\right] dt_2 dt_1 dt \\ &= 1 + \frac{x^n}{m+1} + \frac{x^n}{(m+1)(m+n+1)} + x^n \int_0^1 t^m \int_0^1 t^n t_1^m \int_0^1 t_1^n t_2^m dt_2 dt_1 dt \\ & + x^n \int_0^1 t^m \int_0^1 t^n t_1^m \int_0^1 t_1^n t_2^m \int_0^1 t_2^n t_3^m f(t_3)\,dt_3 dt_2 dt_1 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+\frac{x^n}{m+1}+\frac{x^n}{(m+1)(m+n+1)}+ \\ & \int_0^1 t^{m+n}\left[\int_0^1 t_1^{m+n}\left(\int_0^1 t_2^m dt_2\right)dt_1\right]dt+ \\ & x^n\int_0^1 t^m\int_0^1 t^n t_1^m\int_0^1 t_1^n t_2^m\int_0^1 t_2^n t_3^m f(t_3)\,dt_3dt_2dt_1dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+\frac{x^n}{m+1}+\frac{x^n}{(m+1)(m+n+1)}+\frac{x^n}{(m+1)(m+n+1)^2} \\ & +x^n\int_0^1 t^m\int_0^1 t^n t_1^m\int_0^1 t_1^n t_2^m\int_0^1 t_2^n t_3^m f(t_3)\,dt_3dt_2dt_1dt \end{aligned}$$

la $k^{ème}$ substitution est

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+\frac{x^n}{m+1}\left[1+\frac{1}{m+n+1}+\frac{1}{(m+n+1)^2}+...+\frac{1}{(m+n+1)^{k-1}}\right] \\ & +x^n\int_0^1 t^{m+n}\int_0^1 t_1^{m+n}...\int_0^1 t_k^m f(t_k)\,dt_kdt_{k-1}...dt_1dt \end{aligned}$$

soit $S_k(x)$ le terme générale de la série d'ordre k

$$S_k(x)=1+\frac{x^n}{m+1}\left[1+\frac{1}{m+n+1}+\frac{1}{(m+n+1)^2}+...+\frac{1}{(m+n+1)^{k-1}}\right]$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{k\to+\infty}S_k(x)=1+\frac{x^n}{m+1}\times\frac{1}{1-\frac{1}{m+n+1}} \\ &= 1+\frac{x^n(m+n+1)}{(m+1)(m+n)},\ \text{aussi} \lim_{k\to+\infty}R_k(x)=0. \end{aligned}$$

2.2.3 Méthode de determinant de Fredholm

La solution de l'équation intégrale de Fredholm de second espèce(2.18) est donnée par l'équation fonctionnelle

$$f(x)=g(x)+\lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)\,g(t)\,dt$$

où la résolvante de Fredholm est dfinie par l'égalité

$$R(x,t,\lambda)=\frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)} \tag{2.24}$$

sous les conditions $D(\lambda) \neq 0$, ici $D(x,t,\lambda), D(\lambda)$ sont des séries de puissnces deλ,

$$D(x,t,\lambda) = k(x,t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,t)\lambda^n \tag{2.25}$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n \tag{2.26}$$

avec les coefficients ainsi définis

$$B_n(x,t) = \underbrace{\int_a^b ... \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} k(x,t) & k(x,t_1) & ... & k(x,t_n) \\ k(t_1,t) & k(t_1,t_1) & ... & k(t_1,t_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ k(t_n,t) & k(t_n,t_1) & ... & k(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1...dt_n \tag{2.27}$$

où $B_0(x,t) = k(x,t)$, $B_1(x,t) = \int_a^b \begin{vmatrix} k(x,t) & k(x,t_1) \\ k(t_1,t) & k(t_1,t_1) \end{vmatrix} dt_1$ et

$B_2(x,t) = \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} k(x,t) & k(x,t_1) & k(x,t_2) \\ k(t_1,t) & k(t_1,t_1) & k(t_1,t_2) \\ k(t_2,t) & k(t_2,t_1) & k(t_2,t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2$

$$C_n = \underbrace{\int_a^b ... \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} k(t_1,t_1) & k(t_1,t_2) & ... & k(t_1,t_n) \\ k(t_2,t_1) & k(t_2,t_2) & ... & k(t_2,t_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ k(t_n,t_1) & k(t_n,t_2) & ... & k(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1...dt_n \tag{2.28}$$

où $C_0 = 1$,$C_1 = \int_a^b k(t_1,t_1)\,dt_1$et $C_2 = \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} k(t_1,t_1) & k(t_1,t_2) \\ k(t_2,t_1) & k(t_2,t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2$

les fonctions $D(\lambda)$ et $D(x,t,\lambda)$ sont respectivement le determinant de Fredholm et le mineur du determinant de Fredholm. Si le noyau $k(x,t)$ est borné où si l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b k^2(x,t)\,dxdt < +\infty$$

les séries (2.27),(2.28) convergentes quelque soit λ et sont donc des fonctions analytiques entières de λ. La résolvante $R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)}$ est une fonction analytique de λ sauf les λ qui sont zéros de $D(\lambda)$, ces derniers sont les pôles de la résolvante $R(x,t,\lambda)$.

exemple: A l'aide de determinant de Fredholm trouver la résolvante du noyau

$$k(x,t) = x\sin t = B_0(x,t), \qquad 0 \leq x,t \leq \frac{\pi}{2}$$

Solution: calculons les coeffitions

$$B_1(x,t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{vmatrix} x\sin t & x\sin t_1 \\ t_1 \sin t & t_1 \sin t_1 \end{vmatrix} dt_1 = x\sin t \int_0^{\frac{\pi}{2}} t_1 \sin t_1 dt_1 - x\sin t \int_0^{\frac{\pi}{2}} t_1 \sin t_1 dt_1 = 0$$

$$B_2(x,t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\begin{vmatrix} x\sin t & x\sin t_1 & x\sin t_2\\ t_1\sin t & t_1\sin t_1 & t_1\sin t_2\\ t_2\sin t & t_2\sin t_1 & t_2\sin t_2\end{vmatrix}dt_1dt_2$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\begin{array}{c} x\sin t_2\begin{vmatrix} t_1\sin t & t_1\sin t_1\\ t_2\sin t & t_2\sin t_1\end{vmatrix}-t_1\sin t_2\begin{vmatrix} x\sin t & x\sin t_1\\ t_2\sin t & t_2\sin t_1\end{vmatrix}\\ +t_2\sin t_2\begin{vmatrix} x\sin t & x\sin t_1\\ t_1\sin t & t_1\sin t_1\end{vmatrix}dt_1dt_2\end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t_1\sin t_2\left(x\sin t\times t_2\sin t_1-x\sin t_1\times t_2\sin t\right)dt_1dt_2\\ &= -x\sin t\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(t_1t_2\sin t_2\sin t_2-t_1t_2\sin t_2\sin t_2\right)dt_1dt_2=0\end{aligned}$$

on conclus que $\forall n\geqslant 1,\ B_n(x,t)=0$.

Aussi $C_0=1, C_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t_1\sin t_1dt_1=1$ et

$C_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\begin{vmatrix} t_1\sin t_1 & t_1\sin t_2\\ t_2\sin t_1 & t_2\sin t_2\end{vmatrix}dt_1dt_2=0$, donc $\forall n\geqslant 2, C_n=0$,

d'où $D(x,t,\lambda)=k(x,t)=x\sin t$ et $D(\lambda)=1-\lambda\Rightarrow R(x,t,\lambda)=\frac{x\sin t}{1-\lambda}$

la solution de l'éqution intégrale de Fredholm corréspendante s'exprime par la formule

$$f(x)=g(x)+\frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin tg(t)\,dt$$

Conclusion: le calcule des coefficient $B_n(x,t)$ et C_n des séries (2.25),(2.26)par les formules (2.27),(2.28) n'est possible que dans des cas trés rares,mais ces formule entrainent les relations de réccurence suivantes

$$\forall n\geqslant 1, B_n(x,t)=C_nk(x,t)-n\int_a^b k(x,s)\,B_{n-1}(s,t)\,ds \qquad (2.29)$$

$$C_n=\int_a^b B_{n-1}(s,s)\,ds \text{ sachant que } C_0=1 \text{ et } B_0(x,t)=k(x,t)$$

preve: on a l'équation

$$R(x,t,\lambda)=k(x,t)+\lambda\int_a^b k(x,s)\,R(s,t,\lambda)\,ds \qquad (2.30)$$

$$\text{c-ad } \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)}=k(x,t)+\lambda\int_a^b k(x,s)\,\frac{D(s,t,\lambda)}{D(\lambda)}ds$$

$$\Leftrightarrow D(x,t,\lambda)=D(\lambda)\,k(x,t)+\lambda\int_a^b k(x,s)\,D(s,t,\lambda)\,ds \qquad (2.31)$$

substituant (2.25),(2.26) à (2.31) on obtien

$$\begin{aligned} k(x,t)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n(x,t)\lambda^n &= \left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}C_n\lambda^n\right)k(x,t)+ \\ & \lambda\int_a^b k(x,s)\left[k(s,t)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n(s,t)\lambda^n\right]ds \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n}{n!}B_n(x,t) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n}{n!}C_nk(x,t)+ \\ & \lambda\int_a^b k(x,s)k(s,t)\,ds+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\lambda^{n+1}}{n!}\int_a^b k(x,s)B_n(s,t)\,ds \end{aligned} \tag{2.32}$$

à la second série de second membre de(2.32) en permiten par n-1on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n}{n!}B_n(x,t) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n}{n!}C_nk(x,t)+ \\ & \lambda\int_a^b k(x,s)k(s,t)\,ds+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\lambda^n}{(n-1)!}\int_a^b k(x,s)B_{n-1}(s,t)\lambda^n ds \end{aligned}$$

c-a-d

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n}{n!}B_n(x,t) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n}{n!}C_nk(x,t)+\lambda\int_a^b k(x,s)k(s,t)\,ds \\ & -\lambda\int_a^b k(x,s)k(s,t)\,ds+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\lambda^n}{(n-1)!}\int_a^b k(x,s)B_{n-1}(s,t)\,ds \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n}{n!}B_n(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n}{n!}C_nk(x,t)-n\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n}{n!}\int_a^b k(x,s)B_{n-1}(s,t)\,ds$$

donc l'égalité de réccurence(2.29) c-à-d(c'est-à-dire)

$$\forall n\geqslant 1, B_n(x,t)=C_nk(x,t)-n\int_a^b k(x,s)B_{n-1}(s,t)\,ds.$$

exemple: Résoudre par méthode de tereminant de Fredholm(relation de reccurence(2.29) l'équation intégrale suivante:

$$f(x)=\frac{x}{6}+\lambda\int_0^1(2x-t)f(t)\,dt$$

solution: on a $k(x,t)=2x-t=B_0(x,t)$ et $C_0=1$

d'où

$$C_1 = \int_0^1 (2s - s)\,ds = \int_0^1 s ds = \frac{1}{2}$$

pour $n = 1$ est d'aprés(2.29) on a

$$\begin{aligned} B_1(x,t) &= \frac{1}{2}(2x-t) - \int_0^1 (2x-s)(2s-t)\,ds \\ &= x - \frac{t}{2} - 2x + 2xt + \frac{2}{3} - \frac{t}{2} = 2xt - x - t + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$C_2 = \int_0^1 \left(2s^2 - 2s + \frac{2}{3}\right) ds = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} B_2(x,t) &= \frac{1}{3}(2x-t) - 2\int_0^1 (2x-s)\left(2st - s - t + \frac{2}{3}\right) ds \\ &= \frac{1}{3}(2x-t) - 4x\int_0^1 \left(2st - s - t + \frac{2}{3}\right) ds + 2\int_0^1 \left(2s^2t - s^2 - ts + \frac{2s}{3}\right) ds \\ &= \frac{2x}{3} - \frac{t}{3} - 4xt + 2x + 4xt - \frac{8x}{3} + \frac{4t}{3} - \frac{2}{3} - t + \frac{2}{3} = 0 \end{aligned}$$

$$C_3 = \int_0^1 B_2(s,s)\,ds = 0 \Rightarrow \forall n \geqslant 3, C_n = 0$$

aussi

$$\begin{aligned} B_3(x,t) &= 0 \times (2x-t) - 3\int_0^1 (2x-s)\,B_2(s,t)\,ds \\ &= 0 \times (2x-t) - 3\int_0^1 (2x-s) \times 0 ds = 0 \end{aligned}$$

donc $\forall n \geqslant 2, B_n(x,t) = 0$, d'où la résolvante

$$\begin{aligned} R(x,t,\lambda) &= \frac{k(x,t) - \lambda B_1(x,t)}{1 - \lambda C_1 + \frac{\lambda^2}{2} C_2} = \frac{2x - t - \lambda\left(2xt - x - t + \frac{2}{3}\right)}{1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}} \\ &= \frac{12x - 6t - 2\lambda(6xt - 3x - 3t + 2)}{\lambda^2 - 3\lambda + 6} \end{aligned}$$

la solution de l'équation intégrale donnée à l'aide la résolvante calculée est

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{6} + \lambda\int_0^1 \frac{12x - 6t - 2\lambda(6xt - 3x - 3t + 2)}{\lambda^2 - 3\lambda + 6} \times \frac{t}{6} dt \\ &= \frac{x}{6} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - 3\lambda + 6}\left[\int_0^1 \left(2xt - t^2\right) dt - \frac{\lambda}{3}\int_0^1 \left(6xt^2 - 3xt - 3t^2 + 2t\right) dt\right] \\ &= \frac{x}{6} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - 3\lambda + 6}\left(x - \frac{1}{3} - \frac{\lambda x}{6}\right) = \frac{\lambda^2 x - 3x\lambda + 6x - \lambda^2 x - 2\lambda + 6\lambda x}{\lambda^2 - 3\lambda + 6} \\ &= \frac{6x + 3\lambda x - 2\lambda}{\lambda^2 - 3\lambda + 6} \end{aligned}$$

2.2.4 Equation intégrale à noyau dégénéré(séparable)

Définition: le noyau $k(x,t)$ d'une équation intégrale de Fredholm de second espèce est dit dégénéré s'il est somme d'un nombre fini de produits des fonctions de x seul par des fonctions de t seul i-e il est de la forme

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(t) \tag{2.33}$$

les fonctions $a_k(x)$ et $b_k(t)$ $(k = 1,...,n)$ seront suposés continus dans le carré fondamental $a \leq x, t \leq b$ et linéairements independantes, donc l'équation intégrale à noyau dégénéré s'écrit

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(t)\right] f(t)\, dt \tag{2.34}$$

$$f(x) = g(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \int_a^b b_k(t)\, f(t)\, dt \tag{2.35}$$

$$\text{poson } c_k = \int_a^b b_k(t)\, f(t)\, dt \qquad (k = 1,...,n) \tag{2.36}$$

d'où l'équation intégrale(2.35) s'écrit

$$f(x) = g(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(x) \tag{2.37}$$

avec c_k des constantes inconnus (puisque $f(x)$ est inconnus), ansi la résolution d'une équation intégrale à noyau dégénérése ramène à la récherche les c_k $(k = 1,...,n)$ aprés avoir porté(2.37)dans(2.34) et effectué des calcules simples on obtien

$$\sum_{m=1}^{n} \left\{ c_m - \int_a^b b_m(t) \left[g(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(t) \right] dt \right\} a_m(x) = 0$$

les fonctions $a_m(x)$ $(m = 1,...,n)$ etant linéairement independant, il en résulte que

$$c_m - \int_a^b b_m(t) \left[g(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(t) \right] dt = 0$$

$$\text{ou } c_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b a_k(t)\, b_m(t)\, dt = \int_a^b b_m(t)\, g(t)\, dt$$

en fin poson les notations

$$a_{km} = \int_a^b a_k(t)\, b_m(t)\, dt, \qquad g_k = \int_a^b b_m(t)\, g(t)\, dt$$

nous obtenons

$$c_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_{km} = g_m \ , \quad (m = 1, ..., n)$$

ou sous forme dévelopée

$$\left.\begin{array}{cccccc} (1-\lambda a_{11})\, c_1 & -\lambda a_{12} c_2 & -\lambda a_{13} c_3 & ... & -\lambda a_{1n} c_n & = g_1 \\ -\lambda a_{21} c_1 & (1-\lambda a_{22})\, c_2 & -\lambda a_{23} c_3 & ... & -\lambda a_{2n} c_n & = g_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -\lambda a_{n1} c_1 & -\lambda a_{n2} c_2 & -\lambda a_{n3} c_3 & ... & (1-\lambda a_{nn})\, c_n & = g_n \end{array}\right\} \tag{2.38}$$

pour trouver les c_k, nous avons donc un système de n équations linéairement independantes ($(I - \lambda A)c = g, A = (a_{ij})\ (1 \leq i, j \leq n)\, , c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ et $g = (g_1, g_2, ..., g_n)$ le système matricielle equivalent), dont le detereminant est

$$\triangle (\lambda) = \left| \begin{array}{cccc} (1-\lambda a_{11}) & -\lambda a_{12} c_2 & ... & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & (1-\lambda a_{22}) & ... & -\lambda a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & ... & (1-\lambda a_{nn}) \end{array} \right| \tag{2.39}$$

si $\triangle (\lambda) \neq 0$ le système(2.38) admet une seule solution $c_1, c_2, ..., c_n$ obtennue moyenent les formules de Cramar

$$c_k = \frac{1}{\triangle (\lambda)} \left| \begin{array}{ccccccc} (1-\lambda a_{11}) & ... & -\lambda a_{1k-1} & g_1 & -\lambda a_{1k+1} & ... & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & ... & -\lambda a_{2k-1} & g_2 & -\lambda a_{2k+1} & ... & -\lambda a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -\lambda a_{n1} & ... & -\lambda a_{nk-1} & g_n & -\lambda a_{nk+1} & ... & (1-\lambda a_{nn}) \end{array} \right| \tag{2.40}$$

d'où la solution de l'éqution intégrale(2.34) défini par la fonction

$$f(x) = g(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(x)$$

avec $c_k\ (k = 1, ..., n)$ donnée par(2.40).

exemple: Résoudre l'éqution intégrale par la méthode de noyau dégénéré

$$f(x) = \cos x + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-t)\, f(t)\, dt$$

solution: il est clair que

$$k(x,t) = \sin(x-t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t$$

i-e $k(x,t)$ séparable, donc

$$f(x) = \cos x + \lambda \sin x \int_0^\pi \cos t f(t)\, dt - \lambda \cos x \int_0^\pi \sin t f(t)\, dt \tag{2.41}$$

poson

$$c_1 = \int_0^\pi \cos t f(t)\, dt \text{ , et } c_2 = \int_0^\pi \sin t f(t)\, dt \tag{2.42}$$

substituant(2.42) à (2.41) on obtien

$$f(x) = \cos x + \lambda c_1 \sin x - \lambda c_2 \cos x \tag{2.43}$$

aussi substituant(2.43) au système(2.42)

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^\pi \cos t (\cos t + \lambda c_1 \sin t - \lambda c_2 \cos t)\, dt \\ c_2 = \int_0^\pi \sin t (\cos t + \lambda c_1 \sin t - \lambda c_2 \cos t)\, dt \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \left(1 - \lambda \int_0^\pi \cos t \sin t dt\right) + \lambda c_2 \int_0^\pi \cos^2 t dt = \int_0^\pi \cos t \cos t dt \\ -\lambda c_1 \int_0^\pi \sin^2 t dt + c_2 \left(1 + \lambda \int_0^\pi \cos t \sin t dt\right) = \int_0^\pi \sin t \cos t dt \end{cases}$$

aprés certain calcule on a le système

$$\begin{cases} c_1 + \frac{\pi}{2}\lambda c_2 = \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}\lambda c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \text{ et } \triangle(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\lambda\pi}{2} \\ -\frac{\lambda\pi}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 + \frac{\lambda^2\pi^2}{4}$$

donc

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\lambda\pi}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\triangle(\lambda)} = \frac{2\pi}{4 + \lambda^2\pi^2} \text{ et } c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\lambda\pi}{2} & 0 \end{vmatrix}}{\triangle(\lambda)} = \frac{\lambda\pi^2}{4 + \lambda^2\pi^2}$$

en fin substituant c_1 et c_2 à(2.43) en trouve la solution

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + \frac{2\pi\lambda}{4 + \lambda^2\pi^2} \sin x - \frac{\lambda^2\pi^2}{4 + \lambda^2\pi^2} \cos x \\ &= \frac{4\cos x + 2\pi\lambda \sin x}{4 + \lambda^2\pi^2}. \end{aligned}$$

2.2.5 Alternative de Fredholm

Valeurs propres et Fonctions propres

Soit l'équation intégrale de Fredholm de second espèce homogène i-e

$$f(x) - \lambda \int_a^b k(x,t) f(t)\, dt = 0 \tag{2.44}$$

admet toujour la solution $f(x) = 0$ (solution triviale), une valeur λ tel que cette équation admette des solutions non nulles $f(x) \neq 0$ s'appelle valeur propre du noyau $k(x,t)$ ou de l'équation(2.44) et chaque solution non nulle de l'équation(2.44) est une fonction propre correspondante au valeur propre, pour $\lambda = 0(2.44)$ sntrain $f(x) = 0$.

Si $k(x,t)$ est continu dans le carré $R(a \leq x, t \leq b)$ ou s'il est carré sommable dans R (a et b étant finis), il correspond à chaque valeur propre λ un nombre fini de fonction propre linéairement independantes, le nombre de ces fonctions s'appelle multiplicité de valeur propre, si les valeurs propres sont distincts peut être de multiplicité différentes.

Dans le cas de l'équation intégrale de noyau dénégéré

$$f(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t) \right] f(t)\, dt = 0 \tag{2.45}$$

les valeurs propres sont racines de l'équation algebrique

$$\triangle(\lambda) = 0 \text{ de dégrés } p \leq n \tag{2.46}$$

$\triangle(\lambda)$ determinant de système

$$\left.\begin{array}{cccccc}
(1-\lambda a_{11})\, c_1 & -\lambda a_{12} c_2 & -\lambda a_{13} c_3 & \ldots & -\lambda a_{1n} c_n & = 0 \\
-\lambda a_{21} c_1 & (1-\lambda a_{22})\, c_2 & -\lambda a_{23} c_3 & \ldots & -\lambda a_{2n} c_n & = 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-\lambda a_{n1} c_1 & -\lambda a_{n2} c_2 & -\lambda a_{n3} c_3 & \ldots & (1-\lambda a_{nn})\, c_n & = 0
\end{array}\right\} \tag{2.47}$$

si l'équation(2.46) posséde p racine $(1 \leq p \leq n)$ l'équation(2.45) a p valeurs propres λ_m $(m = 1, .., p)$ corespond une solution non triviale

$$\begin{array}{cccccc}
c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & \ldots & c_n^{(1)} & \rightarrow & \lambda_1 \\
c_1^{(2)} & c_2^{(2)} & \ldots & c_n^{(2)} & \rightarrow & \lambda_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
c_1^{(p)} & c_2^{(p)} & \ldots & c_n^{(p)} & \rightarrow & \lambda_p
\end{array}$$

du système(2.47). Les solutions non nulles de(2.45) associées à ces solutions (i-e fonctions propres) sont de la forme

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)} a_k(x), \quad f_2(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(2)} a_k(x), ..., f_p(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(p)} a_k(x)$$

donc l'équation intégrale de noyau dénégéré posséde au plus n valeurs prppres et fonctions propres correspondantes.

Théorème de Fredholm: Si $\lambda_0$est une racine d'ordre $m \geqslant 1$du determinant $\triangle(\lambda)$ alors l'équation intégrale de Fredholm de second espèce homogène i-e

$$f(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\, f(t)\, dt = 0 \tag{2.48}$$

admet r solution linéairement independant $(1 \leq r \leq m)$.

Remarque1: Dans le cas d'un noyau quelconque(non dégénéré) les valeurs poropres sont les zéros de $\triangle(\lambda)$ i-e les pôles de la résolvante.

Remarque2: si $f(x)$ est unr fonction propre associée a la valeur propre λ alors $c\ f(x)$, où c est un constant arbitraire, l'est également.

Exemple: Trouver les valeurs propres et les fonctions de l'équation intégrale à noyau dégénéré suivante:

$$f(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t) f(t)\, dt = 0 \tag{2.49}$$

solution: en peu écrire(2.49)comme suite

$$f(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos x \cos t f(t)\, dt - \lambda \int_0^{\pi} \sin x \sin t f(t)\, dt \tag{2.50}$$

de même maniére poson

$$c_1 = \int_0^{\pi} \cos t f(t)\, dt, \qquad c_2 = \int_0^{\pi} \sin t f(t)\, dt \tag{2.51}$$

$$\text{d'où } C = \lambda c_1 \cos x + c_2 \sin x \tag{2.52}$$

substituant(2.52) au système(2.51) on obtien

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^{\pi} \cos t\,(\lambda c_1 \cos t - c_2 \sin t)\, dt \\ c_2 = \int_0^{\pi} \sin t\,(\lambda c_1 \cos t - c_2 \sin t)\, dt \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1\left(1 - \frac{\pi\lambda}{2}\right) + \lambda c_2 \times 0 = 0 \\ -\lambda c_1 \times 0 + c_1\left(1 + \frac{\pi\lambda}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1\left(1 - \frac{\pi\lambda}{2}\right) = 0 \\ c_2\left(1 + \frac{\pi\lambda}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \triangle(\lambda) = 1 - \frac{\pi^2\lambda^2}{4},\ \triangle(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{2}{\pi}$$

pour $\lambda = \frac{-2}{\pi} \Rightarrow c_1 = 0$ et c_2 quelconque, d'où $f_1(x) = \frac{2}{\pi} c_2 \sin x$ ou $f_1(x) = \sin x$ pour $\frac{2}{\pi} c_2 = 1$,

et pour $\lambda = \frac{2}{\pi} \Rightarrow c_2 = 0$ et c_1 quelconque, d'où $f_2(x) = \frac{2}{\pi} c_1 \sin x$ ou $f_1(x) = \cos x$ pour $\frac{2}{\pi} c_1 = 1$.

Etude de l'équation intégrale non homogène

Soit l'équation intégrale non homogène de second espèce de Fredholm i-e(2.18)

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f(t)\, dt$$

admet de solution même si $\triangle(\lambda) = 0$ on est besoin d'etudier une équation intégrale appellé transposé de l'équation intégrale de Fredholm.

Définition: on appelle équation intégrale transposé ou adjointe de l'équation intégrale de Fredholm l'équation

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\,\psi(t)\,dt \tag{2.53}$$

remarquons que f et ψ sont transposée l'une de l'autre.

Dans le cas de noyau dégénéré

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,b_k(t)$$

le noyau transposée

$$k(t,x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\,b_k(x)$$

alors de la même manière dans le cas de noyau dégénéré on écrire

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \int_a^b a_k(t)\,\psi(t)\,dt \tag{2.54}$$

poson

$$c_k = \int_a^b a_k(t)\,\psi(t)\,dt$$

donc(2.54) s'écrit

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k b_k(x)$$

et on substituant à l'équation(2.53)on aura

$$\begin{aligned} g(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k b_k(x) &= g(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \int_a^b a_k(t) \left[g(t) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j b_j(t) \right] dt \\ &= g(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \int_a^b a_k(t)\,g(t)\,dt + \lambda^2 \sum_{k,j=1}^{n} c_j b_k(x) \int_a^b a_k(t)\,b_j(t)\,dt \end{aligned}$$

et une sinblification donne pour $\lambda \neq 0$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k b_k(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \int_a^b a_k(t)\,g(t)\,dt + \lambda \sum_{k,j=1}^{n} c_j b_k(x) \int_a^b a_k(t)\,b_j(t)\,dt$$

$$\text{d'où} \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \left(c_k - \lambda \sum_{k,j=1}^{n} c_j \int_a^b a_k(t)\,b_j(t)\,dt - \int_a^b a_k(t)\,g(t)\,dt \right) = 0$$

ce qui entraineVu l'indépendance des b_k

$$c_k - \lambda \sum_{k,j=1}^{n} c_j \int_a^b a_k(t)\, b_j(t)\, dt - \int_a^b a_k(t)\, g(t)\, dt = 0, \quad (k = 1, .., n)$$

on pose $\widetilde{g}_k = \int_a^b a_k(t)\, g(t)\, dt$ et pour a_{kj} on garde la même notation de cas noyau dégénéré, donc le nouveau système s'écrit

$$\left(I - \lambda A^t\right) c = \widetilde{g} \tag{2.55}$$

on remarque ce système admet même determinant $\triangle(\lambda), (\triangle(\lambda) = \det(I - \lambda A^t))$ de systeme de l'équation homogène, ce qui signifie que ce système admet une solution uniqtue si et seulement si l'ancien système l'est.On ce qui concerne les c_i et $\widetilde{g}_i$ mais les b_i sont changé par les a_i.

Le système homogène adjoint

$$\left(I - \lambda A^t\right) c = 0$$

admet des vecteurs propres différents de ceux du système

$$(I - \lambda A)\, c = 0$$

et par suite les fonctions propres de l'équation adjointe sont differente de celles de l'équation de Fredholm.

aussi: la valeur propre λ_0 a la même rang p et par suite elle lui correspond r fonctions propres linéairement independantes $\psi_{01}, ..., \psi_{0r}$ de l'équation homogène adjointe, toute solution de l'équation homogène correspond à la valeur de propre de la forme

$$\psi_0 = \sum_{i=1}^{r} B_i \psi_{0i} \text{ où } B_i \text{ sont des constantes arbitraires.}$$

Lemme: soint λ_1, λ_2 deux valeurs propres distinctes du système homogène et son

transposé et siont f et ψ deux fonctions propres corresponds à λ_1, λ_2 réspectivement alors f et ψ sont orthogonaux.

preuve: Multiplient l'équation

$$f(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^b k(x,t)\, f(t)\, dt \quad \text{ par } \lambda_2 \psi(x)$$

$$\psi(x) = g(x) + \lambda_2 \int_a^b k(x,t)\, \psi(t)\, dt \quad \text{par } \lambda_1 f(x)$$

intégrant les sur $[a, b]$ puis soustrayant l'une se l'autre on obtien

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b f(x)\, \psi(x)\, dx = 0$$

et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = 0$ i-e f et ψ sont orthonaux.

Théorème: pour que l'équation non homogène de Fredholm de second espèce admet solution correspond à une valeur propre λ_0 il faut et il suffit que la fonction g est orthogonale a les r fonctions propres ψ_{0i} de l'éqution homogème transposé associée a λ_0.

preve: 1) si l'équation admet une solution f alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)\,\psi_{0i}(x)\,dx &= \int_a^b f(x)\,\psi_{0i}(x)\,dx - \lambda \int_a^b \psi_{0i}(x) \int_a^b k(x,t)\,f(t)\,dtdx \\
&= \int_a^b f(x)\,\psi_{0i}(x)\,dx - \lambda \int_a^b f(t) \int_a^b k(t,x)\,\psi_{0i}(x)\,dxdt \\
&= \int_a^b f(x)\,\psi_{0i}(x)\,dx - \lambda \int_a^b f(t)\,\psi_{0i}(t)\,dt = 0
\end{aligned}$$

2)si g orthogonale à r fonctions ψ_{0i} alors le système non homogène se reduit a $p = n - r$ équations independantes, donc le rang de système est $p = n - r$ etbon peut résoudre se système avec p parametres, et en substituant les p valeurs propres des c_i dans l'expression de f on trouve la solution.

Soit L l'opérateur défini par $L = I - \lambda_0 A$ alors son transposé $L^* = I - \lambda_0 A^t$ l'etude algebrique montre que $\ker\left(I - \lambda_0 A^t\right)^{\perp} = R\left(I - \lambda_0 A\right)$ c-à-d que si

$$\int_a^b g(x)\,\psi_{0i}(x)\,dx = 0, \forall i = 1,..,r, \exists f : [a,b] \to E \text{ tq } \left(I - \lambda_0 A\right) f = g.$$

Théorème d'alternative de Fredholm: pour une valeur propre λ_0

1) soit l'équatio intégrale

$$f(x) = g(x) + \lambda_0 \int_a^b k(x,t)\,f(t)\,dt$$

admet une solution unique pour n'importe qu'elle fonction $g \epsilon L^2[a,b]$ et $k \epsilon L^2[R]\,(R = [a,b] \times [a,b])$ en particulier la solution est $f = 0$ pour $g = 0$ et l'équation transposé

$$\psi(t) = g(t) + \lambda_0 \int_a^b k(t,x)\,\psi(x)\,dx$$

aussi posséde une solution unique

2) soit l'équation homogène admet r solution linéairements independantes $f_{01}, ..., f_{0r}$ et l'équation homogène transposé admet r solution linéairements independantes $\psi_{01}, ..., \psi_{0r}$ et pour que l'équation non homogène admet solution il faut et il suffit que soit la fonction g soit orthogonale avec les fonctions ψ_{0i} $(i = 1, ..., r)$ et dans ce cas la solution s'exprime à l'aide d'une combinaison linéaire des fonctions f_{0i}.

exemple: Etablir si le équations intégrale ci-dessous est résolue pour diverses valeurs de paramètre λ

$$f(x) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos x \cos t + \sin 2x \sin 2t) f(t)\, dt = \sin x$$

solution: pour résoudre cette exemple il suffit faire les trois étapes suivant

1) détérmine les vateurs propres et les fonctions propres d'éqution homogène

2) détérmine les vateurs propres et les fonctions propres d'éqution homogène transposé

3) vérifier l'orthogonalité de g (fonction de second membre) et les ψ_i (fonctions propres d'éqution homogène transposé).

1) Soit l'équation homogène

$$f(x) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos x \cos t + \sin 2x \sin 2t) f(t)\, dt = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{\lambda \cos x}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos t f(t)\, dt + \frac{\lambda \sin 2x}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2t f(t)\, dt$$

$$\text{poson } c_1 = \int_0^{2\pi} \cos t f(t)\, dt, \qquad c_2 = \int_0^{2\pi} \sin 2t f(t)\, dt$$

$$\text{d'où } f(x) = \frac{\lambda c_1 \cos x}{\pi} + \frac{\lambda c_2 \sin 2x}{\pi}$$

donc on a le système

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^{\pi} \cos t \left(\frac{\lambda c_1 \cos t}{\pi} + \frac{\lambda c_2 \sin 2t}{\pi} \right) dt \\ c_2 = \int_0^{\pi} \sin 2t \left(\frac{\lambda c_1 \cos t}{\pi} + \frac{\lambda c_2 \sin 2t}{\pi} \right) dt \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \left(1 - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt\right) - \frac{\lambda}{\pi} c_2 \int_0^{2\pi} \cos t \sin 2t dt = 0 \\ -\frac{\lambda}{\pi} c_1 \int_0^{2\pi} \sin 2t \cos t dt + c_2 \left(1 - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt\right) = 0 \end{cases}$$

on a

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\, dt = \pi = \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt$$

et

$$\int_0^{2\pi} \sin 2t \cos t dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t dt = \left. \frac{2}{3} \cos^3 t \right|_0^{2\pi} = 0$$

puis on a

$$\begin{cases} c_1 (1 - \lambda) = 0 \\ c_2 (1 - \lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow \triangle(\lambda) = (1 - \lambda)^2,$$

$\triangle(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ racine double i-e que c_1, c_2 quelconque, donc $f_1(x) = \cos x$ et $f_2(x) = \sin 2x.$ (x)

2) l'équation homogène transposé

$$\psi(x) - \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi}(\cos t\cos x + \sin 2t\sin 2x)\,\psi(t)\,dt = 0$$

le noyau dégénéré est symétrique, donc elle est la même determinant $\triangle(\lambda)$ et la même valeur propre $\lambda = 1$, on en dedui que c_1, c_2 sont quelconques et $\psi(x) = c_1\cos x +$ $c_2\sin 2x \Rightarrow \psi_1(x) = \cos x$ et $\psi_2(x) = \sin 2x$.

3) calculons les intégrales $\int_0^{2\pi} g(x)\,\psi_2(x)\,dx$ i-e

$$\int_0^{2\pi}\sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\text{et}\quad\int_0^{2\pi}\sin x\sin 2x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x\Big|_0^{2\pi} = 0$$

d'où la fonction g est orthogonale à les ψ_i $(i = 1, 2)$,donc d'aprés le théorème de Fredholm l'équation non homogène admet une solution s'exprime par

$$f(x) = \sin x + \frac{c_1}{\pi}\cos x + \frac{c_2}{\pi}\sin 2x.$$