Chapitre 2

L'espace des distributions $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$

Définition: Une distibution T sur Ω est une forme linéaire et continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

L'image d'une fonction φ par T se note par $\langle T, \varphi \rangle$ au lieu de $T(\varphi)$.

Remarque: La continuité de T s'exprime de la manière suivante:

pour tout compact $K \subset \Omega$ et pour toute suite $\{\varphi_p\}$ de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ convergeant vers $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ la suite $\{\langle T, \varphi_p \rangle\}$ converge dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vers $\langle T, \varphi \rangle$, et comme T est linéaire il est équivalant à éxprimé la continuité à l'origine; i.e.

$\forall K$ (compact) $\subset \Omega$ et $\forall \{\varphi_p\} \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ telle que $\sup\limits_{|\alpha| \leq m} \sup\limits_{x \in K} |D^\alpha \varphi_p| \longrightarrow 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$ alors;

$$\lim_{p \longrightarrow +\infty} \langle T, \varphi_p \rangle = 0.$$

Autre caractérisation de continuité de distribution: On peut montrer qu'une application linéaire définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution ssi: pour tout compact $K \subset \Omega$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists M > 0$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \text{on a } |\langle T, \varphi \rangle| \leq M \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| .$$

Exercice : Montrer que si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors l'application T_f définie par

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x) \varphi(x) \, dx$$

est une distribution.

Définition: Les distributions associées à des fonctions locallements integrables sont appelées **distributions régulières**.

Propriétés de l'espace des distributions $D'(\Omega)$:

1) $D'(\Omega)$ est un espace vetoriel sur $\mathbb{C}$.

2) La multipliation d'une distribution T par une fonction $u \in D(\Omega)$ est une distribution définie comme suit

$$\langle uT, \varphi \rangle = \langle T, u\varphi \rangle \, ; \; \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Ordre d'une distribution:

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$; s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout compact K $\left(\overset{o}{K} \neq \varnothing \right)$ il existe une constante C_K qui vérifie

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \text{on a } \left| \langle T, \varphi \rangle \right| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} \left| D^{\alpha} \varphi (x) \right|$$

la distribution T est dite d'ordre m.

Exemple: Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors pour tout compact $K \subset \Omega$ on a

$$\int_{\Omega} |f(x)| \, dx = \int_K |\chi_K f(x)| \, dx < \infty$$

on pose $C_K = \int_K |\chi_K f(x)| \, dx$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ alors

$$\left| \langle T_f, \varphi \rangle \right| \leq \int_{\Omega} |f(x) \varphi(x)| \, dx = \int_K |f(x) \varphi(x)| \, dx$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \int_K |f(x) \varphi(x)| \, dx &\leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \int_K |f(x)| \, dx \\ &\leq C_K \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \end{aligned}$$

donc T_f est une distribution d'ordre 0.

Distibutions et mesures:

Proposition 1: $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^{\infty}(\Omega)$ est contenu et dense dans $C^k(\Omega)$ pour tout $0 \leq k \leq +\infty$.

Preuve: Il est claire que $C_0^{\infty}(\Omega) \subset C^k(\Omega)$.

Pour montrer la densité on utilise une méthode de troncature et régularisation.

1) <u>Troncature</u>: On montre que $C_0^k(\Omega)$ est dense dans $C^k(\Omega)$. Soit ψ une fontion $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\psi(x) = 1$ sur $\overline{B(0;1)}$ et soit

$$\psi_p(x) = \psi\left(\frac{x}{p}\right) = 1 \text{ sur } \overline{B(0;1)}$$

alors

$$\psi_p(x) = 1 \text{ sur } \overline{B(0;p)}$$

et $\psi_p \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Pour toute $\varphi \in C^k(\Omega)$ on pose $\varphi_p(x) = \psi_p(x)\varphi(x)$, donc

$$\varphi_p \in C_0^k(\Omega)$$

et

$$\varphi_p \longrightarrow \varphi \text{ dans } C^k(\Omega).$$

En effet; $\forall K\,(\text{compact}) \subset \Omega$ il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que $K \subset \overline{B(0;p_0)}$ d'où $\forall p \geq p_0$; $\varphi_p(x) = \varphi(x)$ sur K.

2) <u>Régularisation</u>: Pour montrer que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ on utilise le résultat suivant:

Soit $f \in C_0^k(\Omega)$ et $g \in L_{loc}^1(\Omega)$ alors $f * g \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ et $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$.

En partiulier si $f \in C_0^\infty(\Omega)$ et $g \in L_{loc}^1(\Omega)$ alors $f * g \in C^\infty(\Omega)$.

La fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) \text{ si } \|x\| < 1 \\ 0 \text{ si } \|x\| > 1 \end{cases}$$

est $C_0^\infty(\overline{B(0,1)})$. Soit ρ la fonction definie par $\rho(x) = \frac{\varphi(x)}{\int_\Omega \varphi(x)dx}$ alors $\rho \in C_0^\infty(\overline{B(0,1)})$ et $\int_\Omega \rho(x)\,dx = 1$ et soit $\rho_p(x) = p^n \rho(px)$ alors $\rho_p \in C_0^\infty(\overline{B\left(0,\frac{1}{p}\right)})$ et $\int_\Omega \rho_p(x)\,dx = 1$.

Soit $u \in C_0^k(\Omega)$, on pose $u_p = \rho_p * u$ alors

$$supp(u_p) \subset supp(u) + \overline{B\left(0,\frac{1}{p}\right)}$$

et $u_p \in C^\infty(\Omega)$ donc $u_p \in \mathcal{D}(\Omega)$.

D'autre part on a

$$\begin{aligned} u_p(x) - u(x) &= \int_\Omega u(x-y)\rho_p(y)\,dy - u(x) \\ &= \int_\Omega (u(x-y) - u(x))\rho_p(y)\,dy \end{aligned}$$

car $u(x) = \int_\Omega u(x)\,\rho_p(y)\,dy$.

Notons que u est uniformement continue alors

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0;\ \text{si } |y| < \delta \text{ alors } \sup_{x\in\Omega} |u(x-y) - u(x)| < \varepsilon$$

Soit $K \subset \Omega$ un compact tel que $supp(u) + \overline{B(0,1)} \subset K$, alors si on choisi p de telle sorte que $\frac{1}{p} \leq \delta$ on aura

$$\sup_{x\in K} |u_p(x) - u(x)| \leq \int_\Omega \sup_{x\in K} |u(x-y) - u(x)|\,\rho_p(y)\,dy \leq \varepsilon$$

ce qui signifie que $u_p \longrightarrow u$ uniformement dans $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$.

De la même manière on montre que $D^\alpha u_p \longrightarrow D^\alpha u$ uniformement dans $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$, ce qui montre la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ et par suite dans $\mathcal{C}^k(\Omega)$, en particulier $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Mesure :

Définition : Une mesure μ est une forme linéaire et continue sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$

$$\mu : \mathcal{C}_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$$

On note l'image d'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ par $\mu(\varphi)$ ou par $\langle\mu,\varphi\rangle$ ou par $\int_\Omega \varphi(x)\,d\mu$. L'espace des mesures se note par $\mathcal{C}_0'(\Omega)$ ou $\mathcal{M}(\Omega)$.

Propriétés : 1) $\mathcal{M}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ toute mesure est une distribution, en effet

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{C}_0(\Omega)$$

et si une suite $\{\varphi_p\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ alors elle convergera évidemment dans $\mathcal{C}_0(\Omega)$, d'où la continuité de μ sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$ entraîne sa continuité sur $\mathcal{D}(\Omega)$, par suite $\mathcal{M}(\Omega) = \mathcal{C}_0'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Remarque : On peut prolonger μ hors $\mathcal{C}_0(\Omega)$ à une classe de fonctions mesurables et les fonctions φ pour lesquelles $\int_\Omega \varphi(x)\,d\mu$ existe et est fini sont dites sommables ou integrables par rapport μ. En partiulier si $\varphi = 1$ est sommable la mesure μ est dite sommable.

2) Une mesure est une distribution d'ordre 0.

En effet, la continuité de μ sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$ signifie que pour tout compact $K \subset \Omega$ on a

$$|\mu(\varphi)| = |\langle\mu,\varphi\rangle| \leq C_K \sup_{x\in K} |\varphi(x)|.$$

Exemples : 1) La distributions associée à une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est une mesure que l'on appelle mesure de densité f c'est une mesure absolument continue.

2) $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ alors on peut associer à toute $f \in L^p(\Omega)$ une mesure absolument continue.

3) Soit $f \in C^k(\Omega)$ alors $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et on peut définir une mesure associée à f.

Convergence d'une suite de distributions : Soit $\{T_p\}$ une suite des distributions sur Ω et T ue distribution, alors; on dit que $\{T_p\}$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, si et seulement si,

$$\langle T_p, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle \quad \text{dans } \mathbb{K},\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Support d'une distribution :

Définition: Soient T une distribution sur Ω et ω un ouvert contenu dans Ω, on dit que T est nulle sur ω si

$$\langle T, \varphi\rangle = 0,\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\omega).$$

Lemme : Si une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est nulle sur chaque ouvert d'une famille $\{\omega_i\}_{i\in I}$ alors T est nulle sur $\omega = \underset{i\in I}{\cup}\omega_i$.

Preuve: Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ alors il existe un compact $K \subset \underset{i\in I}{\cup}\omega_i$ tel que $\text{supp}\varphi = K$.

Comme K est compact on peut extraire du recouvrement $\{\omega_i\}_{i\in I}$ un sous recouvrement finie $\{\omega_i\}_{i\in J}$. Soit $\{\chi_i\}_{i\in J}$ une partition de l'unité relative à $\{\omega_i\}_{i\in J}$; i.e. $\chi_i \in \mathcal{D}(\omega_i)$ pour $i \in J$ et $\sum\limits_{i\in J}\chi_i(x) = 1\ \ \forall x \in \omega$.

Pour $x \in K \subset \omega$ on a $\varphi(x) = \sum\limits_{i\in J}\chi_i(x)\varphi(x)$ où $\chi_i\varphi \in \mathcal{D}(\omega_i)$ et donc

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi\rangle &= \left\langle T, \sum_{i\in J}\chi_i\varphi\right\rangle \\ &= \sum_{i\in J}\langle T, \chi_i\varphi\rangle = 0.\end{aligned}$$

Définition : Soit $\{\omega_i\}_{i\in I}$ la famille de tous les ouverts de Ω sur lesquels T est nulle, alors $\omega = \underset{i\in I}{\cup}\omega_i$ est le plus grand ouvert de Ω sur lequel T est nulle. Le support de T est par définition le complémontaire de ω

$$suppT = \Omega\diagdown\omega$$

remarquons que $suppT$ est fermé.

Propriétés : 1) Le support d'une distribution T se carractérise par le fait que $x_0 \in suppT \Longleftrightarrow \forall V_{x_0}$ voisinage de x_0 alors $\exists \varphi \in \mathcal{D}(V_{x_0})$ tel que $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$.

2) $suppT \subset F \Longleftrightarrow T = 0$ sur F^c

3) Si une distribution T est donnée par une fonction continue f; $T = [f]$ alors $suppT = suppf$.

4) Si T et S sont deux distributions alors $supp\,(T+S) \subset suppT + suppS$.

Proposition : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $suppT \cap supp\varphi = \varnothing$, alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Preuve : $supp\varphi \subset (suppT)^c$ qui est ouvert, alors

$$\forall x \in supp\varphi,\ \ \exists V_x \subset (suppT)^c\,,\ \text{où } V_x \text{ est un voisinage ouvert de } x$$

d'où $\chi_{V_x}\varphi \in \mathcal{D}(V_x)$ et par suite $\left\langle T, \chi_{V_x}\varphi \right\rangle = 0$.

Comme

$$supp\varphi = \underset{x \in supp\varphi}{\cup} V_x \subset (suppT)^c$$

et est compact, il existe un recouvrement finie $\{V_i\}_{i\in I}$ tel que

$$supp\varphi = \underset{i\in I}{\cup} V_i \subset (suppT)^c$$

Soit $\{\chi_i\}$ une partition de l'unité associée à $\{V_i\}_{i\in I}$ alors $\varphi = \sum\limits_{i\in I} \chi_i \varphi$ et

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i\in I} \langle T, \chi_i \varphi \rangle = 0.$$

Distribution à support compact :

Le sous ensemble des distributions à support compact dans Ω se note par $\mathcal{E}'(\Omega)$, c'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Proposition :Toute distribution à support compact s'identifié à une forme linéaire sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Preuve : 1) Soient $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Il existe $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\psi = 1$ sur un ouvert U contient $suppT$; i.e $suppT \subset U \subset \Omega$, alors $\psi\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ car $supp\,(\psi\varphi) \subset supp\psi$.

On définie une forme linéaire $\widetilde{T}$ sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ par

$$\left\langle \widetilde{T}, \varphi \right\rangle = \langle T, \psi\varphi \rangle$$

$\widetilde{T}$ est continue.

En effet, Si une suite $\{\varphi_p\}$ converge dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ vers φ alors pour tout compact $K \subset \Omega$ et toute $\alpha \in \mathbb{N}^n$ $D^\alpha \varphi_p$ converge uniformement vers $D^\alpha \varphi$ dans K, en particulier $D^\alpha(\psi\varphi_p)$ converge uniformement vers $D^\alpha(\psi\varphi)$ dans $K \cap suppT$, ce qui ni autre que la convergence de $\psi\varphi_p$ vers $\psi\varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, par suite

$$\lim_{p\to\infty}\left\langle \widetilde{T}, \varphi_p\right\rangle = \lim_{p\to\infty}\left\langle T, \psi\varphi_p\right\rangle = \left\langle T, \psi\varphi_p\right\rangle = \left\langle \widetilde{T}, \varphi\right\rangle.$$

2) Soit $\widetilde{T}$ est une forme linéaire et continue sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, et soit T sa réstriction sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ alors $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, montrons que le support de T est compact.

Soit $\{K_p\}$ la suite croissante des compacts tels que $\Omega = \underset{p\in\mathbb{N}}{\cup} K_p$ et soit $\omega_i = \Omega \diagdown K_p$.

Si $suppT$ n'est pas compact la réstriction de T à chaque $\mathcal{D}(\omega_p)$ n'est pas nulle, il existe; alors; $\varphi_p \in \mathcal{D}(\omega_p)$ telle que $\left\langle T, \varphi_p\right\rangle \neq 0$.

La suite φ_p tends vers 0 sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ par contre $\left\langle T, \varphi_p\right\rangle$ ne tends pas vers 0, c'est contradictoire.

Proposition: Toute distribution à support compact est d'ordre finie.

Preuve: 1) Soit K un compact alors il existe une fonction $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $u = 1$ dans un voisinage ouvert de K. on désigne par K_1 le support de u.

2) Soit T une distribution de support K et u la fonction définie ci-dessus, donc $K \subset K_1 \subset \Omega$.

Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a $\varphi = u\varphi + (1-u)\varphi$ où $supp(u\varphi) \subset K_1$ et $supp(1-u)\varphi \subset K^C$, alors $suppT \cap supp(1-u)\varphi = \varnothing$ et

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, u\varphi\rangle + \langle T, (1-u)\varphi\rangle = \langle T, u\varphi\rangle.$$

3) $u\varphi \in \mathcal{D}_{K_1}(\Omega)$ et la continuité de T sur $\mathcal{D}_{K_1}(\Omega)$ s'exprime comme suit:

$$\exists m \in \mathbb{N},\ \ \exists C \text{ tels que } |\langle T, u\varphi\rangle| \leq \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K_1} |D^\alpha u\varphi|,$$

d'autre part

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{K_1}(\Omega),\ \ \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K_1} |D^\alpha u\varphi| \leq \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K_1} D^\alpha u(x)\left(\sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K_1} D^\alpha \varphi(x)\right),$$

alors

$$\exists m \in \mathbb{N},\ \ \exists C_{K_1} \text{ tels que } |\langle T, \varphi\rangle| = |\langle T, u\varphi\rangle| \leq C_{K_1} \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K_1} |D^\alpha \varphi|.$$