Introduction générale à la théorie des distributions

Chapitre 1

Espaces fonctionnels fondamentaux

1.1 Espace $C(\Omega)$

Dans tous ce qui suit, $\Bbbk = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle que $\mathbb{R}^n$ est un espace normé par l'une des normes équivalentes suivantes :

$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|_\infty = \max\limits_{i=1}^{i=n} |x_i|$.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{i=n} |x_i|^2}$, $\|.\|_2$ s'appelle la norme naturelle ou euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{i=n} |x_i|$.(voir par exemple L. Schwartz : analyse, topologie générale et analyse fonctionnelle p.16).

On désigne par $C(\Omega)$ l'ensemble des fonctions numériques (réels ou complexes) définies et continues sur Ω, i.e :

$C(\Omega) = \{f : \Omega \to \Bbbk / f \text{ définie et continue sur } \Omega\}$.

Il est très facile de voir que $(C(\Omega), +, .)$ est un espace vectoriel sur le corps $\Bbbk$.

Pour définire une topologie sur l'espace $C(\Omega)$ on fait appelle au notions suivantes :

-Une semi-norme sur un espace vectoriel E est une fonction $p : E \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$,ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} 1)\ p(x) \geq 0 \text{ et } p(0) = 0; \\ 2) p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x), \lambda \in \Bbbk; \\ 3) p(x+y) \leq p(x) + p(y). \end{cases}$$

Pour que p soit une norme il faut et il suffit de plus que : $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Dans ce cas on dit que E est un espace vectoriel normé (e.v.n).

Définition 1.1.1 *un espace vectoriel est dit semi-normé s'il est muni d'une famille de semi-normes $(p_i)_{i\in I}$ ayant la propriété de fitration, i.e : quelque soit l'ensemble fini $J \subset I$ il existe $k \in I$ tel que : $p_k \geq p_j, \forall j \in J$.*

On montre qu'un espace vectoriel semi-normé est un espace vectoriel topologique localement convexe (on le note par : e.v.t.l.c), i.e qu'il possède un système fondamental de voisinages convexe à l'origine 0, mais n'est pas nécessairement un espace métrisable.

Cette topologie est séparée si la famille de semi-normes $(p_i)_{i\in I}$ est **séparante** (i.e $\forall x \in E$, $x \neq 0$, $\exists i \in I$ (dépendant de x) tel que $p_i(x) \neq 0$).

Supposons que l'ensemble des indices I est dénombrable (par exemple $I = \mathbb{N}$) alors la topologie définie par la famille $(p_i)_{i\in I}$ est, dans ce cas, métrisable i.e qu'il existe une distance qui donne néssance à cette topologie.

Définition 1.1.2 *On appelle* espace de Fréchet *tout espace vectoriel topologique localement convexe complet, à base dénombrable de voisinages, donc métrisable.*

Topologie de l'espace $C(\Omega)$: Soit maintenant K un compact quelconque de Ω, on pose

$$p_K(f) = \sup_{x\in K} |f(x)| .$$

Quand K parcourt l'ensemble des compactes de Ω, $\{p_K\}$ est une famille de semi-normes qui définie la topologie naturelle de $C(\Omega)$ (on l'appelle la topologie de la convergence uniforme sur toute partie compacte de Ω) et on montre que $C(\Omega)$ est un *espace de Fréchet.*

Remarque 1.1.1 *On rappelle que $C(K) = \{f : K \to \Bbbk / f$ définie et continue sur $K\}$ menu de la norme de la convergence uniforme i.e :$\|f\| = \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x)|$est* un espace de Banach *i.e, un espace vectoriel normé complet.*

1.2 Espace $C_0(\Omega)$

Définition 1.2.1 *Soit $f \in C(\Omega)$.On dit que f est nulle à l'infinie si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compacte K_ε de Ω, tel que : $x \in \Omega \diagdown K \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.*

Exemples :

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = \frac{1}{x}$, $f \notin C_0(\mathbb{R}^*)$ mais $\forall \varepsilon_0 > 0$, $f \in C_0(]-\infty, -\varepsilon_0[\cup], +\varepsilon_0 + \infty[)$.

2) On pose : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x^2 + y^2 < 1\}$.

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/f(x, y) = (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$ alors $f \in C_0(D)$.

On désigne par $C_0(\Omega)$ le sous ensemble de $C(\Omega)$ formé de fonctions nulles à l'infinie, on munira $C_0(\Omega)$ de la norme

$$\|f\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

ce qui en fait *un espace de Banach.*

1.3 Espace $K_K(\Omega)$

Définition 1.3.1 ***(support d'une fonction) :*** *Soit $u \in C(\Omega)$. On appelle* ***support*** *de la fonction u, et on le note par supp(u), l'adhérence dans $\mathbb{R}^n$ de l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}^n; u(x) \neq 0\}$:*

$$\mathit{supp}(u) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; u(x) \neq 0\}}\,.$$

On désigne par $K_K(\Omega)$ le sous ensemble de $C_0(\Omega)$ telles que $\mathit{supp}(f) \subset K$. on munira $K_K(\Omega)$ par la topologie induite par $C_0(\Omega)$, ce qui en fait *un espace de Banach.*

1.4 Espace $K(\Omega)$

On désigne par $K(\Omega)$ l'ensemble des foncions continues à support compact dans Ω, donc

$$K(\Omega) = \{f \in C_0(\Omega);\quad \mathit{supp}(f) \text{ est un compact de } \Omega\}\,.$$

Lemme : Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ alors il existe une suite croissante de compacts $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de Ω vérifiant :

$$\forall j \in \mathbb{N},\quad \varnothing \neq K_j \subset \overset{0}{K}_{j+1} \subset \Omega \text{ et } \Omega = \underset{j \in \mathbb{N}}{\cup} K_j.$$

Exemple : Soit $]a, +\infty[$ un ouvert de $\mathbb{R}$ pour sa topologie naturelle. Montrer que la suite $\left(\left[\frac{1}{n+1}, n+1\right]\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la proposiion du lemme précédant.

D'après le lemme précédant on peut voir facilement que $K(\Omega) = \underset{j \in \mathbb{N}}{\cup} K_{K_j}(\Omega)$.

La topologie naturelle de l'espace $K(\Omega)$ est, par définition, la topologie limite inductive stricte des topologies des espaces $K_{K_j}(\Omega)$; cette topologie ne dépend pas de la suite $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de recouvrement (voir Vo-khac p.84 tome1).

1.5 Espace $C^k(\Omega)$

Soient $\overline{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, ..., \infty\}$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$ et Ω toujours un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

Notations :

Un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est un n-uple $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ où $\alpha_i \in \mathbb{N}$. On notera

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n, \qquad \alpha! = \alpha_1!...\alpha_n! \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n} \quad , \\ D^\alpha &= \frac{\partial^{\ |\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1}...\partial {x_n}^{\alpha_n}} = \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}...\partial_n^{\alpha_n}, \qquad \text{où} \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathbb{N}^n$ des multi-indices sera muni d'une addition et une relation d'ordre :

si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_n)$ sont deux multi-indices on posera

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, ..., \alpha_n + \beta_n), \quad \alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, ..., \alpha_n - \beta_n), \\ \alpha &\leq \beta \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \ \text{ pour tout } i = 1, 2, ...n. \end{aligned}$$

On a alors les formules multinomiales de Newton suivantes

$$\begin{aligned} \forall x &\in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ on a :} \ \ (x+y)^\alpha = \sum_{\alpha \leq \beta} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} x^\beta y^{\alpha-\beta}, \\ (x_1 + x_2 + ... + x_n)^m &= \sum_{|\beta| \leq m} \frac{m!}{\beta!} x^\beta. \end{aligned}$$

Définition 1.5.1 *On dit qu'une fonction f, définie sur Ω, est de classe C^k ($k \in \mathbb{N}$) si $D^\alpha f$ existe et est continue pour tout multi-indice α vérifiant $|\alpha| \leq k$; elle est dite de classe C^∞ (ou indéfiniment différentiable) si elle est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

On désignera par $C^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions numériques (réels ou complexes) définies et de classe C^k sur l'ouvert Ω.

Soit K un compact quelconque de Ω et $m \in \mathbb{N}$ avec $m \leq k$ (si $k = +\infty$, cette condition est superflue).

On pose pour $f \in C^k(\Omega)$

$$p_{K,m}(f) = \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| .$$

Proposition 1.5.1 *Quand K parcourt l'ensemble des compacts de Ω et quand m parcourt l'ensemble $\{0, 1, 2, ...k\}$, la famille de semi-normes $\{p_{K,m}\}$ est filtrante et séparante et définie la topologie de l'espace $C^k(\Omega)$ de sorte que $C^k(\Omega)$ sera un* espace de Fréchet.

1.6 Espaces $\mathcal{D}_K(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$