CHAPITRE 5: PROBLÈME DE TRANSPORT

Le problème de transport est un problème particulier de la programmation linéaire. Le plus connu de ces problèmes est le problème du transport de marchandises des usines (unités de production) aux dépôts (magasins).

1. Modèle mathématique du problème de transport et définitions:

Etant donné m usines $A_i, i=\overline{1..m}$ et n dépôts $B_j, j=\overline{1..n}$

Chaque usine produit une quantité $a_i, i=\overline{1..m}$, qui doit être acheminée vers le dépôt $B_j, j=\overline{1..n}$, dont la capacité est $b_j, j=\overline{1..n}$.

Le problème consiste à transporter les quantités produites vers les dépôts, avec un coût de transport minimum.

Soit $x_{ij}, i=\overline{1..m}, j=\overline{1..n}$ la quantité de produit à transporter de A_i vers B_j, et c_{ij} le coût de transport d'une unité du produit à transporter de A_i vers B_j.

Si une quantité x_{ij} est acheminée de A_i vers B_j, le coût de transport de cette quantité est égal à $x_{ij}c_{ij}$. De là le coût global de transport est égale à: $Z=Z(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} où. x=(x_{ij}, i=\overline{1..m}, j=\overline{1..n})$

De plus les quantités à transporter doivent satisfaire les contraintes suivantes:

- Toute la marchandise produite doit être acheminée: $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, i=\overline{1..m}$
- Toutes les demandes doivent être satisfaites: $\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, j=\overline{1..n}$
- Toutes les quantités transportées x_{ij} doivent être positives ou nulles: $x_{ij}\geq 0, i=\overline{1..m}, j=\overline{1..n}$

$$\begin{cases} Z=Z(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, i=\overline{1..m} \\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, j=\overline{1..n} \\ x_{ij}\geq 0, \overline{i=1..m, j=\overline{1..n}} \end{cases}$$

L'ensemble $x=\{x_{ij}, i=\overline{1..m}, j=\overline{1..n}\}$ est dit plan de transport du problème s'il satisfait les contraintes. Il est dit plan optimal de transport si de plus il réalise le minimum de la fonction objective.

2. Condition d'existence d'un plan optimale de transport:

On suppose que les quantités a_i et b_j sont toutes positives ou nulles. De plus, pour que le problème de transport soit réalisable, il faut que les quantités produites soient supérieurs ou égales aux quantités demandées, c'est-à-dire: $\sum_{i=1}^{m}a_i \geq \sum_{j=1}^{n}b_j$.

Dans le cas où on aurait la condition précédente, on crée un dépôt fictif (supplémentaire), où on transporte la quantité produite restante pour avoir l'égalité: $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j=K$.

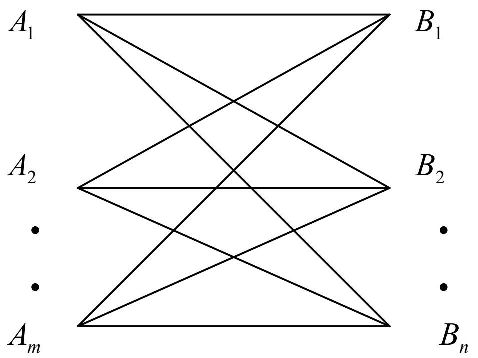
Cette condition appelée **condition de balance**, c'est-à-dire l'offre est égale à la demande.

Théorème:

Le problème de transport possède un plan optimal si et seulement si la condition de balance est vérifiée.

3. Graphe et tableau de transport associé au problème:

Le graphe associé au problème de transport est un graphe simple biparti. L'ensemble U des arcs de ce graphe est de la forme: $U = \{(i,j), i \in I, j \in J\}, I = \{1,2,..,m\}, J = \{1,2,..,n\}$.



On associe ainsi au problème un tableau de transport à m lignes et à n colonnes, défini de la manière suivante:

Chaque ligne $i(i \in I)$ correspond au point de production A_i et Chaque colonne $j(j \in J)$ au point de distribution B_j.

La case (i,j) du tableau correspond au chemin qui relie A_i et B_j.

Chaque case (i,j) contient les quantités associées à l'arc (i,j):

- Le coût unitaire c_{ij} de transport de A_i et B_j, indiqué en haut et à droite de la case.
- La valeur de la variable x_{ij} écrite en bas et à gauche de la case.

En outre, le tableau est bordé à droite par une colonne indiquant les disponibilités a_i et par une ligne située en bas et indiquant les demandes b_j.

Le tableau de transport présente alors la forme suivante:

	B_1	B_2	B_3	...	B_n	a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	b_3	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Exemple1:

Le sonatrach possède trois points de production, Hassi Messaoud (A_1), Ain Salah (A_2) et Illizi (A_3), avec des capacités de production 100 milles, 150 milles et 200 milles barils/jour respectivement. Et deux points de distribution, Skikda (B_1) et Arzew (B_2), avec des demandes de 250 milles et 200 milles barils/jour respectivement.

Les coûts unitaires de transport des points de production aux points de distribution sont donnés par le tableau suivant:

	B_1	B_2	Offres a_i (en milliers)
A_1	90 DA	75 DA	100
A_2	80 DA	70 DA	150
A_3	60 DA	95 DA	200
Demande b_j (en milliers)	250	200	450

Le problème consiste à déterminer le nombre d'unité que la société doit transporter des différents points de production aux différents points de distribution, de telle façon que le coût global de transport soit minimal.

En définissant les variables x_{ij} de la manière suivante:

x_{ij} = quantité à transporter du point de production i vers le point de distribution j. le problème peut être écrit sous la forme d'un problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{cases} Z = 90x_{11} + 75x_{12} + 80x_{21} + 70x_{22} + 60x_{31} + 95x_{32} \rightarrow \max \\ x_{11} + x_{12} = 100 \\ x_{21} + x_{22} = 150 \\ x_{31} + x_{32} = 200 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 250 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 200 \\ x_{ij} \geq 0, i = 1,2,3; j = 1,2 \end{cases}$$

Le tableau de transport correspondant à ce problème est le suivant:

	B_1	B_2	a_i
A_1	90 x_{11}	75 x_{12}	100
A_2	80 x_{21}	70 x_{22}	150
A_3	60 x_{31}	95 x_{32}	200
b_j	250	200	450

4. Résolution d'un problème de transport:

4-1 Calcul d'un plan basique initial de transport:

Il existe plusieurs méthodes d'obtention d'un plan basique initial. Les deux méthodes les plus utilisées sont les suivantes:

☒ ***Méthodes du coin nord-ouest de l'angle:***

On choisit la case (1,1), située au coin nord-ouest du tableau de transport, et on lui affecte la quantité $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$.

Deux cas peuvent alors se présenter:

a) Si $x_{11} = a_1$, alors la quantité de A_1 est entièrement transporté et ceci sature la première ligne du tableau. Dans le tableau réduit, on remplacera b_1 par $(b_1 - x_{11})$ et on répétera la même procédure que précédemment.

b) Si $x_{11} = b_1$, alors la demande du point de distribution B_1 est entièrement satisfaite par A_1 et ceci sature la première colonne du tableau. Dans le tableau réduit, on remplacera a_1 par $(a_1 - x_{11})$ et on fera la même procédure.

De cette manière, après (m+n-1) opérations, on trouve (m+n-1) quantités positives x_{ij} affectées à (m+n-1) cases, et les cases restantes auront des quantités nulles $x_{ij} = 0$, on obtiendra ainsi un plan basique de transport.

Exemple1:

Dans le tableau suivant, trouver un plan basique initial par la méthode du coin nord-ouest.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	4	2	3	20
A_2	5	1	3	4	21
A_3	2	5	1	2	35
b_j	12	23	28	13	76

En appliquant la méthode du coin nord-ouest, on trouve

$x_{11} = \min\{20,12\} = 12$; $x_{12} = \min\{20-12,23\} = 8$

$x_{22} = \min\{21,23-8\} = 15$; $x_{23} = \min\{21-15,28\} = 6$

$x_{33} = \min\{35,23-6\} = 22$; $x_{34} = \min\{35-22,13\} = 13$

Les composantes basiques du plan x sont représentées en gras dans le tableau de transport ci-dessous et $x_{ij} = 0$ pour les cases restantes:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 **(12)**	4 **(8)**	2	3	20
A_2	5	1 **(15)**	3 **(6)**	4	21
A_3	2	5	1 **(22)**	2 **(13)**	35
b_j	12	23	28	13	76

☒ ***Méthode de l'élément minimal:***

Cette méthode donne en général un plan basique initial plus proche du plan *basique optimal* que celui obtenu par la méthode du coin nord-ouest.

Le principe consiste à choisir au début une case (i_1, j_1) qui correspond à l'élément $c_{i_1 j_1}$ tel que:

$c_{i_1 j_1} = \min\{c_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$, puis on posera $x_{i_1 j_1} = \min\{a_{i_1}, b_{j_1}\}$ dans la case (i_1, j_1).

Si $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$, on exclut la ligne i_1 et on remplace b_{j_1} par $(b_{j_1} - x_{i_1 j_1})$.

Dans le cas où $x_{i_1 j_1} = b_{j_1}$, on exclut la colonne j_1 et on remplace a_{i_1} par $(a_{i_1} - x_{i_1 j_1})$. Ensuite on refait la même procédure avec le tableau réduit.

Ce processus sera répété (m+n-1) fois et permettra de trouver les (m+n-1) variables basiques du plan initial recherché.

Exemple2:

Refaire l'exemple précédant par la méthode de l'élément minimal.

On a:

$c_{11} = \min\limits_{i,j} c_{ij} = 1, x_{11} = \min\{20,12\} = 12$;

$c_{22} = \min\limits_{j \ne 1} c_{ij} = 1, x_{22} = \min\{21,23\} = 21$;

$c_{33} = \min\limits_{j \ne 1, i \ne 2} c_{ij} = 1, x_{33} = \min\{35,28\} = 28$;

$c_{34} = \min\limits_{j \ne 1,3, i \ne 2} c_{ij} = 2, x_{34} = \min\{35-28,13\} = 7$;

$c_{14} = \min\limits_{j \ne 1,3, i \ne 2,3} c_{ij} = 3, x_{14} = \min\{20-12,13-7\} = 6$;

$c_{12} = \min\limits_{j \ne 1,3,4, i \ne 2,3} c_{ij} = 4, x_{12} = \min\{20-18,23-21\} = 2$;

Les composants basiques du plan basique initial obtenu sont représentées dans le tableau de transport suivant et $x_{ij} = 0$ pour les cases restantes:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 **(12)**	4 **(2)**	2	3 **(6)**	20
A_2	5	1 **(21)**	3	4	21
A_3	2	5	1 **(28)**	2 **(7)**	35
b_j	12	23	28	13	76

Soient x et x' les plan basiques obtenus respectivement par la méthode du coin nord-ouest et par celle de l'élément minimal, alors on aura:

$Z(x) = (1\times12) + (4\times8) + (1\times15) + (3\times6) + (1\times21) + (2\times13) = 125,$

$Z(x') = (1\times12) + (4\times2) + (3\times6) + (1\times21) + (1\times28) + (2\times7) = 101,$

On remarque bien que $Z(x') \prec Z(x)$

4-2 Méthode des potentiels:

☒ ***Critère d'optimalité***

Le principe de la méthode des potentiels est issu de la théorie de la dualité. Pour cela, introduisons le problème dual de transport suivant:

$$\begin{cases} W(y) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to max \\ u_i + v_j \leq c_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \\ \text{où } y = (u,v), u = (u_i, i = \overline{1,m}), v = \left(v_j, j = \overline{1,n}\right) \end{cases}$$

Théorème 1:

Soient x^0 et $y^0=(u^0,v^0)$ deux solutions optimales respectivement du problème et de son dual, alors les relations suivantes sont vérifiées:

$$\begin{cases} u_i^0 + v_j^0 = c_{ij}, si\ x_{ij}^0 > 0, \\ u_i^0 + v_j^0 \leq c_{ij}, si\ x_{ij}^0 = 0, \\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

En s'inspirant de la métrique du simplexe, on construit les valeurs suivantes:

$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

Ici par construction, on a:

$u_i + v_j - c_{ij} = 0, (i,j) \in U_B$

$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, (i,j) \in U_H$

Les $u_i (1 \leq i \leq m)$ et $v_j (1 \leq j \leq m)$ sont appelés *potentiels* et les nombres Δ_{ij} sont appelés *estimations* des variablesx_{ij}. Les U_B sont appelés cases de base et les U_H cases hors base.

Théorème 1: (critère d'optimalité)

Les inégalités: $\Delta_{ij} \leq 0, (i,j) \in U_H$ sont suffisantes pour l'optimalité du plan basique de transport.

Remarque:

Les potentiels u_i et v_j sont de nombre (m+n) et doivent vérifier le système ($u_i + v_j - c_{ij} = 0, (i,j) \in U_B$) qui constitué de (m+n-1) équations.

Donc pour sa résolution, il faut choisir une valeur arbitraire par exemple $u_1 = 0$, et les autres potentiels sont alors déterminés d'une manière unique par les équations ,($u_i + v_j - c_{ij} = 0, (i,j) \in U_B$).

Connaissant ainsi les potentiels u_i et v_j, on calcule les estimations Δ_{ij} des variables non basiques.

☒ ***Méthode des potentiels:***

Soit x un plan basique de transport de départ, auquel correspond U_B. Si le critère d'optimalité n'est pas vérifié, alors on cherche une case $(i_0, j_0) \in U_H = \Delta_{i_0 j_0} = max\Delta_{ij}, (i,j) \in U_H$.

A l'aide de la case (i_0, j_0) et des cases de U_B, on construit un cycle qui est d'ailleurs unique. Puis on affecte des signes successivement (+) et (-) aux sommets de ce cycle, en commençant par le sommet (i_0, j_0) affecté du signe (+) et en se mouvant dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire.

Parmi les sommets du cycle affectés du signe (-), on choisit celui où la variable x_{ij} est minimale et on pose: $\theta^0 = \min x_{ij} = x_{i_1 j_1}$.

Pour les sommets affectés du signe (+), on ajoute aux variables x_{ij} la quantité θ^0 et on soustrait la même quantité des variables x_{ij}, correspondantes aux sommets affectés de signe (-). Toutes les autres x_{ij} resteront inchangées.

On obtient ainsi un nouveau plan basique de transport $\bar{x}$, avec un nouveau ensemble basique $\overline{U_B} = \{U_B \backslash (i_1, j_1)\} \cup (i_0, j_0)$.
Cette itération sera répétée jusqu'à ce que le critère d'optimalité soit vérifié.

Exemple3:

Résoudre par la méthode des potentiels le problème de transport, présenté dans l'exemple précédent:

a) On commençant par le plan basique x trouvé dans l'exemple 1.
b) On commençant par le plan basique x' trouvé dans l'exemple 2.

Dressons le tableau de transport avec les variables basiques x trouvée dans l'exemple1 en utilisant la méthode du coint nord-ouest:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 **(12)**	4 **(8)**	2	3	20
A_2	5	1 **(15)**	3 **(6)**	4	21
A_3	2	5	1 **(22)**	2 **(13)**	35
b_j	12	23	28	13	76

On posant u_1=0, on calcule les autres potentiels par la formule ($u_i + v_j - c_{ij} = 0, (i,j) \in U_B$). On placera les u_i sur une colonne à droite des a_i et les v_j sur une ligne au-dessous des b_j. En suite en utilisant la formule ($\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, (i,j) \in U_H$), on trouve les estimations Δ_{ij} qu'on va placer en bas et à droite des cases non basiques. Le nouveau tableau obtenu possède alors la forme suivante:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 **(12)**	- 4 **(8)**	+ 2 4	3 4	20	0
A_2	5 -7	+ 1 **(15)**	- 3 **(6)**	4 0	21	-3
A_3	2 -6	5 -6	1 **(22)**	2 **(13)**	35	-6
b_j	12	23	28	13	76	
v_j	1	4	6	7		

Le plan basique initiale n'est pas optimale, car $\Delta_{i_0 j_0} = max\Delta_{ij} = \Delta_{13} = 4 > 0$

A l'aide de la case (1,3), on construit le cycle (1,3) →(2,3)→(2,2)→(1,2), on aura alors:

$\theta^0 = x_{i_1 j_1} = min\{8{,}6\} = 6$

Pour le nouveau plan basique $\bar{x}$, on obtient:

$\bar{x}_{13} = x_{13} + \theta^0 = 0 + 6 = 6$; $\bar{x}_{22} = x_{22} + \theta^0 = 15 + 6 = 21$; $\bar{x}_{12} = x_{12} - \theta^0 = 8 - 6 = 2$

$\bar{x}_{23} = x_{23} - \theta^0 = 6 - 6 = 0$

Les autres $\bar{x}_{ij}$ resteront inchangées. On commencera donc une nouvelle itération avec le tableau suivant:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 **(12)**	4 **(2)**	2 **(6)**	3 0	20	0
A_2	5 -7	1 **(21)**	3 -4	4 -4	21	-3
A_3	2 -2	5 -2	1 **(22)**	2 **(13)**	35	-1
b_j	12	23	28	13	76	
v_j	1	4	2	3		

Le critère d'optimalité est vérifié dans ce tableau, donc $x^0 = \{x_{ij}^0, 1 \le i \le 3, 1 \le j \le 4\}$ avec:
$x_{11}^0 = 12, x_{12}^0 = 2, x_{13}^0 = 6, x_{14}^0 = 0, x_{21}^0 = 0, x_{22}^0 = 21, x_{23}^0 = 0, x_{24}^0 = 0, x_{31}^0 = 0, x_{32}^0 = 0,$
$x_{33}^0 = 22, x_{34}^0 = 13$, est optimale $Z^0 = \min Z(x) = Z(x^0) = 101$

Dressons le tableau de transport avec les variables basiques x' trouvée dans l'exemple2 en utilisant la méthode de l'élément minimal:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 **(12)**	4 **(2)**	2	3 **(6)**	20
A_2	5	1 **(21)**	3	4	21
A_3	2	5	1 **(28)**	2 **(7)**	35
b_j	12	23	28	13	76

On posant u_1=0, on calcule les autres potentiels par la formule ($u_i + v_j - c_{ij} = 0, (i,j) \in U_B$).
$v_1 = c_{11} - u_1 = 1 - 0 = 1, v_2 = c_{12} - u_1 = 4 - 0 = 4, v_4 = c_{14} - u_1 = 3 - 0 = 3$
$u_2 = c_{22} - v_2 = 1 - 4 = -3, u_3 = c_{34} - v_4 = 2 - 3 = -1, v_3 = c_{33} - u_3 = 1 - (-1) = 2$

Calculons les estimations Δ_{ij}:
$\Delta_{ij} = 0, (i,j) \epsilon U_B$, $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, (i,j) \epsilon U_H$
$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 2 - 2 = 0$, $\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -3 + 1 - 5 = -7$
$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -3 + 2 - 3 = -4$, $\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -3 + 3 - 4 = -4$
$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -1 + 1 - 2 = -2$, $\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -1 + 4 - 5 = -2$

Le nouveau tableau obtenu possède alors la forme suivante:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 **(12)**	4 **(2)**	2	3 **(6)**	20	0
A_2	5	1 **(21)**	3	4	21	-3
A_3	2	5	1 **(28)**	2 **(7)**	35	-1
b_j	12	23	28	13	76	
v_j	1	4	2	3		

Le critère d'optimalité ($\Delta_{ij} \le 0, (i,j) \in U_H$) est vérifié, donc le plan de transport basique x' optimal, avec $Z(x') = 101$