CHAPITRE 4: DUALITÉ

Les problèmes de la programmation linéaire existent toujours sous formes de paires. Ainsi, est associé à chaque problème de maximisation, un problème de minimisation et inversement. Il est possible de dériver d'un programme linéaire existant son programme dual selon des relations bien définies. Le programme original est appelé programme primal et le programme obtenu le programme dual.

1. Exemple:

Bouzid a un chat "Klibo" qu'il veut nourrir au moindre coût. Le chat "Klibo" a besoin d'un minimum de 3 unités de protéines et de 2 de vitamines par jour. Sur le marché local il existe deux catégories de pâtés.

- le pâté de régime qui coûte 15 dinars la boite contient une unité de protéines et une de vitamines.
- le pâté de luxe fournit deux unités de protéines et cinq de vitamines au prix de 50 dinars.

Le PLP correspondante est:

Min $Z=15x_1+50x_2$

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Ou x_1 et x_2 représentent respectivement le nombre de boites de pâté de régime et de pâte de luxe. La solution optimale à ce programme linéaire (qui peut être obtenue par la méthode graphique) est, une fois les variables d'écart x_3 et x_4 incluses respectivement dans la première et la seconde contrainte est la suivante: $Z=45$, $x_1=3$, $x_4=1$, $x_2= x_3=0$.

Désignons par y_1 et y_2 les prix respectifs d'une unité de protéines et de vitamines. Supposons que le fabriquant de pâtés pour chats connaisse les besoins minimaux en protéines et vitamines de "Klibo" et les prix du marché des deux types de nourriture. Le problème du fabriquant est de déterminer les prix y_1 et y_2 de façons à maximiser sa recette compte tenu des coûts des deux pâtés.

Le PLD qui en est dérivé est formulé de la manière suivante:

Max $V=3y_1 +2y_2$

$$y_1 + y_2 \leq 15$$

$$2y_1 + 5y_2 \leq 50$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

Connaissant les besoins minimaux du chat "Klibo" en éléments nutritifs, le fabriquant va essayer de déterminer les prix y_i de façons à maximiser sa recette.

Etant donné que le pâté de régime contient une unité de protéines et une unité de vitamines le prix total de ce type de nourriture (y_1+y_2) ne doit pas dépasser 15 dinars (le même pour la seconde contrainte). Enfin, les prix y_i doivent être non négatifs. La solution optimales à ce PL est: $V=45$, $y_1=15$, $y_4 =20$ et $y_2=y_3=0$.

Le programme PLP est désigné programme linéaire primal et PLD le programme linéaire dual. En fait, il s'agit du même problème vu sous deux angles différents celui de l'acheteur et celui de vendeur. Dans la section suivante, les relations qui existent entre les PLP et PLD sont abordées de façon détaillée.

2. Le programme dual:

Tout programme linéaire admet un programme dual. Pour cela, il suffit de suivre les règles suivantes:

Primal	Dual
Fonction objective: Max	Fonction objective: Min
m contrainte i, i=1..m	m variable y_i
n variables j, j=1..n	n contraintes j
Contrainte $i \geq 0$ Contrainte $i \leq 0$ Contrainte i=	Variable $y_i \leq 0$ Variable $y_i \geq 0$ Variable y_i qcq
Variable $x_j \geq 0$ Variable $x_j \leq 0$ Variable y_i qcq	Contrainte $j \geq 0$ Contrainte $j \leq 0$ Contrainte $j =$

Plus que:

- Les constantes des contraintes du PLP figurent dans la fonction économique du PLD comme coefficients.
- Les coefficients de la fonction économique du PLP deviennent les constantes des contraintes du PLD.
- La matrice transposée des coefficients techniques du PLP devient la matrice des coefficients techniques du PLD.

Exemple:

1- Refaire l'exemple du cours.

2- P
$$MaxZ = 2x_1 + x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_3 \geq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ x_3 \leq -2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \in \Re, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

D
$$MinW = 8y_1 + 5y_2 + 20y_3 - 2y_4$$
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ y_1 + 2y_3 = 1 \\ -y_2 + y_3 + y_4 \leq -1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 qcq, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

Remarque: il est parfois nécessaire de résoudre le PL à l'aide de son dual, ceci pour 2 raisons principales:

- En présence d'un nombre important du contrainte dans le primal.
- Existence de variables négatives dans le primal.

Il y a un lien étroit entre le primal et dual, l'illustration de ce fait s'observe à travers les théorèmes suivants.

<u>Théorème1:</u>

Considérons P
$$MaxZ = c^t x \quad \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$
et D
$$MinW = b^t y \quad \begin{cases} A^t y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Alors: on a

a) Si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont 2 solutions réalisables resp du primal et du dual, alors $\bar{Z} = c^t \bar{x} \leq \bar{W} = b^t \bar{y}$

b) Si x^* et y^* sont 2 solutions optimales, alors $c^t x^* = b^t y^*$

Théorème du dualité:

a) Si P et D ont des solutions réalisables, alors chacun d'eux possède une solution optimale, de plus $Z^* = W^*$.

b) Si l'un d'eux n'est pas borné, alors l'autre n'a pas de solution.

Théorème des écarts complémentaires:

Une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions réalisables x^* et y^* du primal et dual soient optimales et que les conditions suivants soient vérifiées:

$$\begin{cases} y_i^*\left[(Ax^*)_i - b_i\right] = 0, i = 1..m \\ \left[c_j - (y^* A)_j\right] x_j^* = 0, j = 1..n \end{cases}$$

Exemple:

Soient un PLP et son dual

$$\text{PLP} \quad MinZ = 2x_1 + 3x_2 \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{PLD} \quad MaxW = 3y_1 + 5y_2 + 6y_3 \quad \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_1 - y_2 + 4y_3 \leq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$x^* = \left(\frac{26}{9}, \frac{7}{9}\right), y^* = \left(0, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}\right)$ - Montrer que x^* et y^* sont optimales?

Le théorème des écarts donne:

$$\begin{cases} y_1^*\left(2x_1^* + x_2^* - 3\right) = 0 \\ y_2^*\left(2x_1^* - x_2^* - 5\right) = 0 \\ y_3^*\left(x_1^* + 4x_2^* - 6\right) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1^*\left(-\left(2y_1^* + 2y_2^* + y_3^*\right) + 2\right) = 0 \\ x_2^*\left(\left(-y_1^* + y_2^* - 4y_3^*\right) + 3\right) = 0 \end{cases}$$

3. Résolution par l'utilisation du dual:

Exemple: Résoudre le PL suivant: Min Z=15x_1+50x_2

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$
$$x_1 + 5x_2 \geq 2$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Nous résolvons leur dual par simplexe : Max V=3y_1 +2y_2

$$y_1 + y_2 \leq 15$$
$$2y_1 + 5y_2 \leq 50$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

e_1 et e_2 les variables d'écarts: Max V=3y_1 +2y_2

$$y_1 + y_2 + e_1 = 15$$
$$2y_1 + 5y_2 + e_2 = 50$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

(y_1,y_2,e_1,e_2)=(0,0,15,50) est une solution de base réalisable qui correspond à la base $B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc nous pouvons appliquer Simplexe.

	y_1	y_2	e_1	e_2	b
e_1	1	1	1	0	15
e_2	2	5	0	1	50
-V	3	2	0	0	0

	y_1	y_2	e_1	e_2	b
y_1	1	1	1	0	15
e_2	0	3	-2	1	20
-V	0	-1	-3	0	-45

La solution optimale qui donne $V^* = 45$ est $(y_1,y_2,e_1,e_2)=(15,0,0,20)$ et $V^* = 45$. En regardant la dernière ligne du tableau, on trouve les valeurs correspondant à la solution optimale du problème primal qui donne $Z^* = 45$ est (x1,x2,e1,e2)=(3,0,0,1).

4. Algorithme dual du Simplexe:

1. Déterminer une solution du primal telle que $c_j - z_j = c_j - c_B.B^{-1}.a_j \geq 0$ pour tout $j \in J$ (une solution duale réalisable).
2. Tester $x_B = B^{-1}.D$
   a. Si $x_B \geq 0$ alors $x = (B^{-1}{}_1.\ d, 0)$ est une solution optimale. Terminer.
   b. Si au moins une composante $x_i < 0$ (il existe au moins un indice $i \in I$), soit $I_1 \subset I$, I_1 l'ensemble des indices tel que $x_i < 0$, $i \in I$, passer au 3.
3. Tester a'_{ij}, $i \in I_1$ et pour tout $j \in J$.
   c. $a'_{ij} \geq 0$, pour $i \in I_1$ et pour tout $j \in J$. Le problème primal n'a pas de solutions.
   d. $a'_{ij} < 0$, pour au moins un $j \in J$ et pour tout $i \in I_1$, passer au 4.
4. $x_s = \min\{x_i,\ x_i < 0\}$, critère de sortie et déterminer $\frac{z_e - c_e}{a'_{se}} = \min\left\{\frac{z_j - c_j}{a'_{sj}}, a'_{sj} < 0\ j \in J\right\}$ le critère d'entrée. Passer au 5. $(a'_{se}) = B^{-1}.N$.
5. La nouvelle base B' sera définie par $x'_B = x_B - \{x_s\} + \{x_e\}$. On reconstruit le tableau par rapport à B' aller à 2.

Exemple: Résoudre le PL suivant: Min $Z=15x_1+50x_2$

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$
$$x_1 + 5x_2 \geq 2$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Forme standard: e_1 et e_2 les variables d'écarts:

Min $Z=15x_1+50x_2$

$$-x_1 - 2x_2 + e_1 = -3$$
$$-x_1 - 5x_2 + e_2 = -2$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

D'où x=(0,0,-3,-2) et Z=0. Calculons $c_j - z_j$ pour tout $j \in \{1,2\}$

$C_B=(c_3,c_4)=(0,0)$, $B^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $c_j - z_j = c_j - c_B.B^{-1}.a_j \geq 0$

Pour j=1, $c_1 - z_1 = c_1 - c_B.B^{-1}.a_1 = 15-(0,0).\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix} = 15 > 0$

Pour j=1, $c_2 - z_2 = c_2 - c_B.B^{-1}.a_2 = 50-(0,0).\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\ -5\end{pmatrix} = 50 > 0$

D'où x=(0,0,-3,-2) est une solution duale réalisable

Dans ce cas de résolution, on choisit la ligne pivot puis la colonne.

	x_1	x_2	e_1	e_2	b
e_1	-1	-2	1	0	-3
e_2	-1	-5	0	1	-2
Z_j-C_j	-15	-50	0	0	0

1

2

	x_1	x_2	e_1	e_2	b
x_1	1	2	-1	0	3
e_2	0	-3	-1	1	1
Z_j-C_j	0	-20	-15	0	45

$x_B \geq 0$ alors Z=45 , x = (3,0) est une solution optimale. Terminer.