PROGRAMMATION LINAIRE

CHAPITRE 1: RAPPELLE D'ALGÈBRE LINAIRE (MATRICE)

1. Matrices:

On appelle matrice A, à éléments dans un corps K, tout tableau rectangulaire ou carré d'éléments a_{ij}€ K.

On désigne par l'indice "i" le numéro de la ligne et l'indice "j" le numéro de la colonne contenant l'élément a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right), i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$$

Exemple:

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, est une matrice d'ordre (2x3). $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, est une matrice d'ordre 3.

2. Matrices particulières:

a) Matrice nulle:

Une matrice nulle est une matrice dont tous les éléments sont nuls:

Exemple:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, est une matrice nulle.

b) Matrice unité:

La matrice unité d'ordre n(noté I_n) est une matrice carré d'ordre n, dont les termes de la diagonale principale sont $a_{ii}=1$, $i=\overline{1,n}$ et tous les autres termes $a_{ij}=0$, $i\neq j$:

Exemple:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, est une matrice unité d'ordre 3.

c) Matrice diagonale:

Une matrice diagonale est une matrice carré (a_{ij}) d'ordre n telle que $a_{ij}=0$, pour $i\neq j$ et $a_{ij}\neq 0$ pour au moins un indice i_o.

Exemple:

$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, est une matrice diagonale d'ordre 3.

d) Matrice ligne:

Une matrice ligne est une matrice ayant une seule ligne.

Exemple:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, est une matrice ligne d'ordre (1x3).

e) Matrice colonne:

Une matrice colonne est une matrice ayant une seule colonne.

Exemple:

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, est une matrice colonne d'ordre (2x1).

3. Opération sur matrices:

a) La somme:

Si A et B sont deux matrices de même ordre (mxn) alors la somme A+B est égale à la matrice C, dans la quelle tout élément est la somme des éléments correspondants de A et B.

Exemple:

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, alors $A + B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

b) Le produit:

Soient A et B deux matrices d'ordre (mxp) et (pxn) respectivement, le produit A.B est une matrice C d'ordre (mxn), dont chaque élément c_{ij} est la somme des produits des éléments de la $i^{ème}$ ligne de A par les éléments correspondants de la $j^{ème}$ colonne de B. $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Ce produit n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Exemple:

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, alors $A.B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 16 & 7 & 27 \end{pmatrix}$

Le produit B.A est impossible.

4. Matrice transposée:

Si dans une matrice A d'ordre (mxn) on remplace les lignes par les colonnes respectives, on obtient une matrice A' (dite transposée), d'ordre (nxm), qui vérifie les propriétés suivantes:

(A')'=A (A+B)'=A'+B' (AB)'=B'A'

Exemple:

La matrice transposée de $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est $A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

5. Déterminant d'ordre 2:

Soit A une matrice carrée d'ordre 2

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Exemple:

Soit $A=\begin{pmatrix}1 & -9\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ alors $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & -9\\ 2 & 5\end{vmatrix}=5+18=23$

Soit $B=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ alors $\det(B)=\begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6-6=0$

6. Déterminant d'ordre 3:

Soit $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ une matrice carrer d'ordre 3

On appelle **mineur** de a_{ij}, noté M_{ij}, le déterminant obtenu en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne. Le nombre $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ est appelé **cofacteur** de l'élément a_{ij}.

Exemple:

$M_{21}=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ est le mineur de a_{21} et $A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}$

Pour calculer le déterminant de A, on somme les produits des éléments d'une ligne ou d'une colonne (à notre choix) par leurs cofacteurs respectifs. En pratique, on développe selon la ligne ou la colonne qui contient le maximum d'éléments nuls (s'il y en a).

Les éléments $(-1)^{i+j}$ forment la matrice suivante, dite matrice de signe :

$$\begin{pmatrix}(-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3}\\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3}\\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{pmatrix}$$

En développant selon la deuxième ligne on trouve :

$$\det(A)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$$

$$\dots\dots\dots\dots = (-1)^{2+1}a_{21}M_{21}+(-1)^{2+2}a_{22}M_{22}+(-1)^{2+3}a_{23}M_{23}$$

$$\dots\dots\dots\dots = -a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$\dots\dots\dots\dots = -a_{21}\left[a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13}\right]+a_{22}\left[a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}\right]-a_{23}\left[a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12}\right]$$

Exemple:

Soit la matrice carrée A d'ordre 3: $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$ alors

Si on développe selon la première ligne :

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}0 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=2*3-3*0+2*(-12)=-18$$

Si on développe selon la deuxième ligne (le calcul est simplifié) :

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}=-0\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=0+3*(-6)+0=-18$$

7. Déterminant d'ordre n:

Le tableau des signes est le suivant :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots & (-1)^{1+j} & \dots & (-1)^{1+n} \\ - & + & - & \dots & (-1)^{2+j} & \dots & (-1)^{2+n} \\ + & - & + & \dots & (-1)^{3+j} & \dots & (-1)^{3+n} \\ . & & & \dots & & \dots & . \\ (-1)^{i+1} & (-1)^{i+2} & (-1)^{i+3} & \dots & (-1)^{i+j} & \dots & (-1)^{i+n} \\ . & . & . & \dots & & \dots & . \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+2} & (-1)^{n+3} & \dots & (-1)^{n+j} & \dots & + \end{pmatrix}$$

Exemple:

Soit la matrice carrée A d'ordre 4:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ alors, le tableau de signe est le suivant : $\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$

Si on développe selon la troisième ligne (contient deux zéros) :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -3\left(2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\right) - 4\left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right) = -60$$

RÈGLES SIMPLIFICATRICES DES DÉTERMINANTS:

- Une matrice dont au moins une ligne (respectivement colonne) est nulle a un déterminant nul.

Soients $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ Sans faire de calcul, det(A)=0 et det(B)=0.

- Une matrice dont au moins deux lignes (respectivement deux colonnes) sont identiques a un déterminant nul.

Soients $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ Sans faire de calcul, det(A)=0 et det(B)=0.

- Une matrice dont au moins une ligne (respectivement une colonne) est combinaison linéaire d'autres lignes (respectivement d'autres colonnes) de la matrice a un déterminant nul.

Soients $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

Sans faire de calcul, det(A)=0 (car $L_4=L_2+L_1$)et det(B)=0 (car $C_3= C_2-C_1$).

- Le déterminant d'une matrice ne change pas si on ajoute à une ligne (respectivement colonne) une combinaison linéaire d'autres lignes (respectivement d'autres colonnes). En pratique, on applique cette propriété pour faire apparaître le maximum des éléments nuls dans une ligne ou une colonne de la matrice.

Exemple:

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ alors,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} \ldots L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} \ldots L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = 1\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

- Si on multiplie une seule ligne (respectivement une colonne) d'une matrice par un scalaire, alors son déterminant est multiplié par ce même scalaire.

Exemple:

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ alors, $\det(B) = 2\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 * 6 = 12$

- Le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée : det(A)=det(A^t).
- Le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants de ces matrices.

8. Matrices inversibles:

On dit qu'une matrice $A \in U_n(K)$ est inversible s'il existe une matrice $B \in U_n(K)$ telle que: $AB = BA = I_n$

Théorème:

Soit $A \in U_n(K)$ alors A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ et on a $A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det A}$