جامعة حمه لخضر بالود

كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات الدرس الاول جبر -3- 2021/2020

ملاحظة / على الطالب مراجعة دروس المصفوفات والمحددات للفصل السابق

المتوفرة في الموقع .

ليكن E فضاء شعاعيا على الحقل K بعده منتهي و $f \in \mathcal{L}(E)$ (تطبيق خطي داخلي)

ولتكن f التطبيق المرفق بالمصفوفة . A.

تعريف1) ليكن x عنصر غير معدوم من E .نقول بان x شعاع ذاتي لتطبيق f الموفق بالقيمة الذاتية λ اذا وفقط اذا كان ; $f(x) = \lambda x$

الكتابة المصفوفية ونستنتج من التعريف

$$f(x) = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad Ax = \lambda x$$

$$Ax - \lambda x = 0 \Longrightarrow \quad (A - \lambda I)x = 0$$

تعريف 2) الفضاء ألشعاعي الذاتي

ندعوا الفضاء ألشعاعي الذاتي للمصفوفة A المرفق بالقيمة الذاتية λ الفضاء ألشعاعي

$$E_\lambda = \ker (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})$$

تعريف 3) كثير الحدود المميز; ندعوا كثير الحدود المميز للمصفوفة A كثير الحدود الذي يرمز له

ب $P(\lambda)$ المعرف ب $P(\lambda) = \det (A - \lambda I) = |A - \lambda I|$

تعريف 4) القيم الذاتية للمصفوفة A هي عبارة عن جذور كثير الحدود المميز $\mathrm{P}(\lambda)$ اي ان

$$\mathrm{P}(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0$$

تدعى جذور $\mathrm{P}(\lambda)=0$ مجموعة القيم الذاتية للمصفوفة A ويرمز لها ب $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$

مثال توضيحي للتعاريف السابقة

لتكن لدينا المصفوفة

$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ 1) اوجد كثير الحدود المميز للمصفوفة A .

2) اوجد القيم الذاتية للمصفوفة A .

3) اوجد الفضاءات الشعاعية الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية

جامعة حمه لخضر بالود

كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات الدرس الاول جبر -3- 2021/2020

الجواب1) بعد الحساب للمحدد نجد

$$\mathrm{P}(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -5 & 5 \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 5 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)(16-\lambda)$$

2) القيم الذاتية هي $\mathrm{P}\ (\ \lambda) = \lambda(1-\lambda)(16-\lambda) = 0 \implies \lambda = 0,\ \lambda = 1,\ \lambda = 16$

$$\mathrm{Sp(A)} = \{0, \quad 1, \quad 16\}$$

3) الفضاءات الشعاعية الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية .

من اجل $\lambda = 0$

$$E_0 = ker(A - 0\lambda).$$

$$(x, y, z) \in E_0 \implies \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} 11x - 5y + 5z = 0 \\ -5x + 3y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

ومما سبق نجد ان $E_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

من اجل $\lambda = 1$ بنفس الطريقة نجد

$$E_1 = ker(A - \lambda).$$

ونحصل على $E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

من اجل $\lambda = 16$

$$E_{16} = ker(A - 16\lambda).$$

ونجد

$$E_{16} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

جامعة حمه لخضر بالود

كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات الدرس الاول جبر -3- 2021/2020

تطبيق اعد نفس العملية السابقة على المصفوفات التالية

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathrm{C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

بالتوفيق